АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2003, том 49, № 1, с. 77–84

УДК 534.24

РАССЕЯНИЕ ЗВУКОВЫХ ВОЛН НА ТЕЛЕ В ПЛОСКОСЛОИСТОМ ВОЛНОВОДЕ

© 2003 г. В. М. Кузькин

Научный центр волновых исследований Института общей физики РАН
119991 Москва, ул. Вавилова 38
E-mail: gera@kapella.gpi.ru

Поступила в редакцию 25.12.2001 г.

В рамках теории интегральных уравнений рассмотрена задача о дифракции звукового поля на акустически мягкой и акустически жесткой неоднородностях, расположенных в волноводе океанического типа. Методом итераций получены рекуррентные соотношения для поверхностных токов, описывающих процесс дифракции как последовательность воздействий, оказываемых попеременно телом и границами волновода друг на друга (многократное переотражение). Сформулировано и физически обосновано условие применимости нулевого приближения, при котором многократным переотражением можно пренебречь.

Строгая теория дифракции, как известно, исходит из принципа Гюйгенса в сочетании с интегральными уравнениями, характеризующими краевую задачу. Современное состояние теории дифракции на телах в волноводах, однако, таково, что получить строгие аналитические решения краевой задачи в замкнутой форме не представляется возможным [1, 2]. В большинстве задач гидроакустики приходится иметь дело с функциями Грина, для которых решение интегральных уравнений может быть найдено только путем численных расчетов. Несмотря на наличие надежных и быстродействующих программ для вычисления дифракционных полей, определенный интерес представляет развитие приближенных аналитических подходов, позволяющих просто и наглядно в замкнутом виде исследовать характеристики изучаемого процесса рассеяния. К настоящему времени приближенные методы расчета дифракционной структуры поля в волноводах [3–6], исходящие из тех или иных физических представлений, ограничены исключительно случаем, когда можно пренебречь эффектами многократного переотражения звука между телом и границами волновода. Вместе с тем очевидно, что при расположении тела вблизи одной из поверхностей волновода эффекты многократного рассеяния играют существенную роль. Широкий круг относящихся сюда проблем образуют явления, связанные с учетом влияния границ раздела сред на дифракционное поле [7–9]. В связи с этим представляется важным получение приближенного решения, позволяющего рассмотреть и оценить эффекты многократного рассеяния. Задачи подобного типа осложнены тем обстоятельством, что звуковые поля должны удовлетворять граничным условиям на поверхностях волновода и тела, имеющих разную геометрию и акустические свойства. Оказывается, что наиболее целесообразно в таких случаях внешние поля разлагать по собственным функциям волновода, а саму дифракционную задачу решать на основе волнового уравнения в интегральной форме. Преимущество такого подхода состоит в том, что решения интегральных уравнений автоматически удовлетворяют требуемым граничным условиям на границе раздела двух сред.

В данной работе изложен метод последовательных приближений (итераций) к решению интегральных уравнений, описывающих дифракцию звуковых волн на теле с однородными условиями Дирихле и Неймана, расположенном в плоскослоистом волноводе океанического типа. Сформулировано и физически обосновано условие применимости нулевого приближения, при котором многократным переотражением можно пренебречь.

ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ

Рассмотрим задачу о дифракции звука на акустически мягком (p-случай) и акустически жестком (s-случай) телах в регулярном плоскослоистом волноводе, воспользовавшись методом интегральных уравнений. Волновод глубиной H и профилем скорости $c(z)$ ограничен сверху границей $z = 0$, а снизу – границей $z = H$. Пусть гармонический точечный источник единичной амплитуды расположен в точке $Q_0(\mathbf{R}_0)$ с координатами $\mathbf{r} = (0, 0)$, $z = z_0$, геометрический центр тела – в точке $Q_s(\mathbf{R}_s)$ с координатами $\mathbf{r}_s = (x_s, y_s)$, $z = z_s$, а приемник – в точке $Q(\mathbf{R})$ с координатами $\mathbf{r} = (x, y)$, $z = z$. Здесь $\mathbf{R} = \mathbf{r} + \mathbf{a}_z z$, $\mathbf{r} = \mathbf{a}_x x + \mathbf{a}_y y$ – радиус-вектор в го-

ризонтальной плоскости (x, y), $\mathbf{a}_x$, $\mathbf{a}_y$, $\mathbf{a}_z$ – единичные орты. Введем вторую декартовую систему координат, начало отсчета которой расположим в точке Q_s. В ней произвольная точка среды описывается радиус-вектором $\hat{\mathbf{R}} = \hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{a}}_z\hat{z}$, $\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{a}}_x\hat{x} + \hat{\mathbf{a}}_y\hat{y}$ – радиус-вектор в горизонтальной плоскости, $\hat{\mathbf{a}}_x$, $\hat{\mathbf{a}}_y$, $\hat{\mathbf{a}}_z$ – единичные орты. Очевидно, имеет место соотношение $\mathbf{R} = \mathbf{R}_s + \hat{\mathbf{R}}$.

В результате дифракции полное поле p в точке наблюдения $Q(\mathbf{R})$ представляет собой суперпозицию падающего u и рассеянного w полей, $p(\mathbf{R}) = u(\mathbf{R}) + w(\mathbf{R})$. Падающее монохроматическое поле u точечного источника (функция Грина волновода G) с частотой ω определяется волновым уравнением

$$[\Delta + k^2(z)]u(\mathbf{R}) = -\delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}_0) \tag{1}$$

и удовлетворяет соответствующим граничным условиям на верхней $z = 0$ и нижней $z = H$ поверхностях волновода и условию излучения на бесконечности. Здесь $k(z) = \omega/c(z)$ – волновое число на горизонте z. Ограничимся цилиндрически-симметричной задачей и будем предполагать решение уравнения (1) известным [10]

$$u(\mathbf{R}) = G(\mathbf{R}) = \\ = \frac{i}{4}\sum_m \psi_m(z_0)\psi_m(z)H_0^{(1)}(h_m r)\exp(-\kappa_m r), \tag{2}$$

где $H_0^{(1)}$ – функция Ханкеля нулевого порядка первого рода; h_m, ψ_m и κ_m – постоянная распространения, ортонормированная собственная функция и коэффициент затухания m-й моды соответственно; $r = |\mathbf{r}|$ – горизонтальное расстояние от источника до точки наблюдения. С помощью принципа Гюйгенса рассеянное поле можно записать как [11]

а) в p-случае [$p = 0$ на (S)]

$$w(\mathbf{R}) = -\oint_S \varphi(\hat{\mathbf{R}}')G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_s + \hat{\mathbf{R}}')d\hat{\mathbf{R}}', \tag{3а}$$

б) в s-случае [$\partial p/\partial n = 0$ на (S)]

$$w(\mathbf{R}) = \oint_S \vartheta(\hat{\mathbf{R}}')\frac{\partial}{\partial n'}G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_s + \hat{\mathbf{R}}')d\hat{\mathbf{R}}', \tag{3б}$$

где φ и ϑ – поверхностные плотности соответственно простых и дипольных источников, $\partial/\partial n$ – производная по направлению внешней нормали к поверхности (S), $d\hat{\mathbf{R}}'$ – элемент поверхности тела (S) вблизи точки $\hat{\mathbf{R}}'$. Интегрирование проводится по поверхности тела (S). Здесь и ниже штрихом отмечены все величины и операторы, относящиеся к точке интегрирования. Выражения (3а) и (3б) удовлетворяют граничным условиям уравнения Гельмгольца (1) и условию излучения, так что остается удовлетворить граничным условиям на (S). Из краевого условия на поверхности тела получаем неоднородное интегральное уравнение Фредгольма второго рода для неизвестных функций φ и ϑ [11]

а) в p-случае

$$\varphi(\hat{\mathbf{R}}) = 2\frac{\partial u(\hat{\mathbf{R}})}{\partial n} - 2\oint_S \varphi(\hat{\mathbf{R}}')\frac{\partial}{\partial n}G(\hat{\mathbf{R}}, \hat{\mathbf{R}}')d\hat{\mathbf{R}}', \\ \hat{\mathbf{R}} \in (S), \tag{4а}$$

б) в s-случае

$$\vartheta(\hat{\mathbf{R}}) = 2u(\hat{\mathbf{R}}) + 2\oint_S \vartheta(\hat{\mathbf{R}}')\frac{\partial}{\partial n'}G(\hat{\mathbf{R}}, \hat{\mathbf{R}}')d\hat{\mathbf{R}}', \\ \hat{\mathbf{R}} \in (S). \tag{4б}$$

Поверхностные плотности φ и ϑ определяются как падающим полем, так и вторичным полем, обусловленным всеми элементами поверхности. Выражение (4б) для ϑ представляет собой интегральное уравнение такого же вида, как и уравнение (4а) для φ. Отличаются они первыми членами в правых частях и ядрами, так как в них входят нормали к поверхности в разных точках, а именно, $n = n(\hat{\mathbf{R}})$ и $n' = n(\hat{\mathbf{R}}')$. Эти ядра несимметричны, причем для "транспонированных" ядер справедливо соотношение

$$\frac{\partial}{\partial n}G(\hat{\mathbf{R}}', \hat{\mathbf{R}}) = -\frac{\partial}{\partial n'}G(\hat{\mathbf{R}}, \hat{\mathbf{R}}'). \tag{5}$$

Уравнения (1)–(4) решают в общем виде задачу дифракции звука на теле в волноводе, так как их решения удовлетворяют граничным условиям на поверхностях волновода и тела и условию излучения.

Для строгого вывода соотношений (3), (4) достаточно повторить известный вывод интеграла Гельмгольца применительно к уравнению (1), а затем совершить переход к интегральным уравнениям для поверхностных токов. Он ничем не отличается от случая свободного пространства [11]. Опуская эти выкладки, отметим лишь следующее. Эти выражения фактически являются следствием обобщения интеграла Гельмгольца, в подынтегральном выражении которого используется функция Грина $G_0(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0)$ для свободного пространства. В основе возможности такого обобщения лежит известное свойство решения волнового уравнения, что значение волновой функции в некоторой регулярной точке может быть представлено интегралом по произвольной

замкнутой поверхности, охватывающей эту точку. При этом вид функции Грина $G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0)$ не является существенным. Действительно, уравнения (3) и (4) отвечают принципу Гюйгенса и остаются эквивалентными соответствующим граничным условиям на поверхности тела и в том случае, когда под $G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0)$ понимается любая функция, удовлетворяющая волновому уравнению (1), если только она удовлетворяет физическим условиям задачи. В свободном пространстве единственным таким условием было условие излучения на бесконечности. Поэтому функция Грина выбиралась в виде $G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0) = \exp(ik|\mathbf{R} - \mathbf{R}_0|)/4\pi|\mathbf{R} - \mathbf{R}_0|$. В случае задачи о рассеянии в волноводе под функцией Грина $G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0)$ следует понимать такое решение уравнения (1), которое определяет поля, удовлетворяющие граничным условиям на поверхностях волновода. В нашем случае оно дается выражением (2).

Применим полученные уравнения (1)–(4) к вычислению дифракционного поля Фраунгофера в волноводе. Полагая, что тело находится на достаточно большом горизонтальном удалении от излучателя, разложим поле источника (2) по плоским волнам. Если воспользоваться асимптотической формой функции Ханкеля, то падающее поле на поверхности тела можно привести к виду

$$u(\mathbf{R}_s + \hat{\mathbf{R}}) = \sum_m [u_m^+(\mathbf{R}_s + \hat{\mathbf{R}}) + u_m^-(\mathbf{R}_s + \hat{\mathbf{R}})], \quad (\mathbf{R}_s + \hat{\mathbf{R}}) \in (S), \tag{6}$$

где

$$u_m^\pm(\mathbf{R}_s + \hat{\mathbf{R}}) = u_m(\mathbf{R}_s)[a_m^\pm(z_s)\exp(i\mathbf{k}_m^\pm\hat{\mathbf{R}})], \quad \hat{\mathbf{R}} \in (S) \tag{7}$$

– парциальные плоские волны, отвечающие m-й моде;

$$u_m(\mathbf{R}_s) = \sqrt{\frac{i}{8\pi}}\frac{\psi_m(z_0)\psi_m(z_s)}{\sqrt{h_m r_s}}\exp(ih_m r_s - \kappa_m i_s) \tag{8}$$

– поле m-й моды точечного источника в центре тела;

$$a_m^\pm(z_s) = \frac{1}{2} \pm \frac{\psi_m'(z_s)}{2ig_m(z_s)\psi_m(z_s)}. \tag{9}$$

Здесь $\mathbf{k}_m^\pm = (\mathbf{h}_m \pm \mathbf{g}_m)$ – локальные волновые вектора бриллюэновских лучей падающего поля с горизонтальной $\mathbf{h}_m$ и вертикальными $\pm\mathbf{g}_m$ составляющими, $\mathbf{h}_m = (\mathbf{r}_s/r_s)h_m$, $\mathbf{g}_m = \hat{\mathbf{a}}_z g_m$, $g_m(z_s) = \sqrt{k^2(z_s) - h_m^2}$, $r_s = |\mathbf{r}_s|$ – горизонтальное расстояние между источником и центром тела. При выводе соотношения (6) использовалось разложение собственной функции $\psi_m(z)$ в окрестности реперной точки z_s

$$\psi_m(z_s + \hat{z}) = \psi_m(z_s)[a_m^+\exp(ig_m\hat{z}) + a_m^-\exp(-ig_m\hat{z})], \tag{10}$$

что допустимо в приближении локально-однородной среды [12]. Последнее означает, что в пределах характерного вертикального размера тела неоднородная среда близка к однородной.

Пусть парциальные плоские волны $u_m^\pm$ индуцируют на поверхности тела поверхностные токи с плотностями $\varphi_m^\pm$ (p-случай) или $\vartheta_m^\pm$ (s-случай), которые со своей стороны обусловливают возникновение вторичных дифракционных полей. Тогда для дифрагированного поля (3а, б) в дальней зоне, используя соотношения (2) и (10), приходим к выражению

$$w(\mathbf{R}) = \sqrt{\frac{i}{8\pi}}\sum_\mu T_\mu\psi_\mu(z_s)\psi_\mu(z) \times \frac{\exp(ih_\mu|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s| - \kappa_\mu|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|)}{\sqrt{h_\mu|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|}}, \tag{11}$$

где функция T_μ имеет вид

а) в p-случае

$$\begin{aligned} T_\mu = -\sum_m \Big\{ & a_\mu^+\oint_S \varphi_m^+(\hat{\mathbf{R}}')\exp(-i\mathbf{k}_\mu^-\hat{\mathbf{R}}')d\hat{\mathbf{R}}' + \\ & + a_\mu^+\oint_S \varphi_m^-(\hat{\mathbf{R}}')\exp(-i\mathbf{k}_\mu^-\hat{\mathbf{R}}')d\hat{\mathbf{R}}' + \\ & + a_\mu^-\oint_S \varphi_m^+(\hat{\mathbf{R}}')\exp(-i\mathbf{k}_\mu^+\hat{\mathbf{R}}')d\hat{\mathbf{R}}' + \\ & + a_\mu^-\oint_S \varphi_m^-(\hat{\mathbf{R}}')\exp(-i\mathbf{k}_\mu^+\hat{\mathbf{R}}')d\hat{\mathbf{R}}' \Big\}, \end{aligned} \tag{12а}$$

б) в s-случае

$$\begin{aligned} T_\mu = \sum_m \Big\{ & a_\mu^+\oint_S \vartheta_m^+(\hat{\mathbf{R}}')\frac{\partial\exp(-i\mathbf{k}_\mu^-\hat{\mathbf{R}}')}{\partial n'}d\hat{\mathbf{R}}' + \\ & + a_\mu^+\oint_S \vartheta_m^-(\hat{\mathbf{R}}')\frac{\partial\exp(-i\mathbf{k}_\mu^-\hat{\mathbf{R}}')}{\partial n'}d\hat{\mathbf{R}}' + \\ & + a_\mu^-\oint_S \vartheta_m^+(\hat{\mathbf{R}}')\frac{\partial\exp(-i\mathbf{k}_\mu^+\hat{\mathbf{R}}')}{\partial n'}d\hat{\mathbf{R}}' + \\ & + a_\mu^-\oint_S \vartheta_m^-(\hat{\mathbf{R}}')\frac{\partial\exp(-i\mathbf{k}_\mu^+\hat{\mathbf{R}}')}{\partial n'}d\hat{\mathbf{R}}' \Big\}. \end{aligned} \tag{12б}$$

Здесь $\mathbf{k}_\mu^\pm = \mathbf{h}_\mu \pm \mathbf{g}_\mu$ – локальные волновые вектора бриллюэновских лучей дифрагированного поля, $\mathbf{h}_\mu = [(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s)/|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|]h_\mu$, вектора $\pm\mathbf{g}_\mu$ и коэффициенты $a_\mu^\pm$ аналогичны величинам $\pm\mathbf{g}_m$ и $a_m^\pm$ (9). Здесь и ниже используются для нумерации нормальных волн рассеянного поля греческие индексы (μ, ν, ...), а для мод первичного поля – латинские индексы (m, n, ...). Подынтегральные выражения в правой части (12б) равны

$$\vartheta_m^\pm(\hat{\mathbf{R}}')\frac{\partial \exp(-i\mathbf{k}_\mu^\pm\hat{\mathbf{R}}')}{\partial n'} = \\ = -i\vartheta_m^\pm(\hat{\mathbf{R}}')(\mathbf{k}_\mu^\pm, \mathbf{n}')\exp(-i\mathbf{k}_\mu^\pm\hat{\mathbf{R}}'). \quad (13)$$

Интегральные преобразования в (12а) и (12б), согласно (13), имеют смысл трансформанты Фурье для поверхностной плотности источников. В соответствии с теоремой взаимности [13] они описывают угловое распределение парциального дифракционного поля Фраунгофера в направлении волнового вектора $\mathbf{k}_\mu^\pm$ при условии, что на тело падает плоская волна, распространяющаяся в направлении $\mathbf{k}_m^\pm$. Величину $F(\mathbf{k}_m^\pm, \mathbf{k}_\mu^\pm)$

а) в p-случае

$$F(\mathbf{k}_m^\pm, \mathbf{k}_\mu^\pm) = \frac{1}{a_m^\pm u_m(\mathbf{R}_s)}\oint_S \varphi_m^\pm(\hat{\mathbf{R}}')\exp(-i\mathbf{k}_\mu^\pm\hat{\mathbf{R}}')d\hat{\mathbf{R}}', \quad (14а)$$

б) в s-случае

$$F(\mathbf{k}_m^\pm, \mathbf{k}_\mu^\pm) = \\ = \frac{-i}{a_m^\pm u_m(\mathbf{R}_s)}\oint_S \vartheta_m^\pm(\hat{\mathbf{R}}')(\mathbf{k}_\mu^\pm\mathbf{n}')\exp(-i\mathbf{k}_\mu^\pm\hat{\mathbf{R}}')d\hat{\mathbf{R}}', \quad (14б)$$

имеющую размерность [м], можно рассматривать как обобщение понятия амплитуды рассеяния на случай волноводного распространения. В правой части (14а, б) множитель перед интегралом $(1/a_m^\pm u_m(\mathbf{R}_s))$ определяет нормировку амплитуды падающей плоской волны m-й моды. Поверхностная плотность определяется здесь, согласно (4а, б), из интегрального уравнения

а) в p-случае

$$\varphi_m^\pm(\hat{\mathbf{R}}) = 2\frac{\partial u_m^\pm(\hat{\mathbf{R}})}{\partial n} - 2\oint_S \varphi_m^\pm(\hat{\mathbf{R}}')\frac{\partial}{\partial n}G(\hat{\mathbf{R}}, \hat{\mathbf{R}}')d\hat{\mathbf{R}}', \quad (15а)$$
$$\hat{\mathbf{R}} \in (S),$$

б) в s-случае

$$\vartheta_m^\pm(\hat{\mathbf{R}}) = 2u_m^\pm(\hat{\mathbf{R}}) + 2\oint_S \vartheta_m^\pm(\hat{\mathbf{R}}')\frac{\partial}{\partial n'}G(\hat{\mathbf{R}}, \hat{\mathbf{R}}')d\hat{\mathbf{R}}', \quad (15б)$$
$$\hat{\mathbf{R}} \in (S),$$

где величины $G(\hat{\mathbf{R}}, \hat{\mathbf{R}}')$ и $u_m^\pm(\hat{\mathbf{R}})$ даются выражениями (2) и (7). С учетом определений (8) и (14а, б) дифракционное поле (11) запишем в форме

$$w(\mathbf{R}) = -\sqrt{\frac{i}{8\pi}}\sum_\mu\sum_m S_{\mu m}(z_s)u_m(\mathbf{R}_s)\psi_\mu(z_s)\psi_\mu(z)\times \\ \times\frac{\exp(ih_\mu|\mathbf{r}-\mathbf{r}_s| - \kappa_\mu|\mathbf{r}-\mathbf{r}_s|)}{\sqrt{h_\mu|\mathbf{r}-\mathbf{r}_s|}}, \quad (16)$$

где матрица рассеяния волноводных мод имеет вид

$$S_{\mu m} = a_m^+a_\mu^+F(\mathbf{k}_m^+, \mathbf{k}_\mu^-) + a_m^-a_\mu^-F(\mathbf{k}_m^-, \mathbf{k}_\mu^+) + \\ + a_m^+a_\mu^-F(\mathbf{k}_m^+, \mathbf{k}_\mu^+) + a_m^-a_\mu^+F(\mathbf{k}_m^-, \mathbf{k}_\mu^-). \quad (17)$$

Выражение (16) согласуется с обычными представлениями о том, что дифракционное поле в дальней зоне является суперпозицией плоских волн, испускаемых в направлениях $\mathbf{k}_\mu^\pm$ отдельными элементами поверхности тела. В результате задача состоит в определении неизвестных функций $\varphi_m^\pm(\hat{\mathbf{R}})$ и $\vartheta_m^\pm(\hat{\mathbf{R}})$. Точное решение интегральных уравнений (15а, б) может быть получено только для ограниченного круга задач, связанных с использованием функции Грина $G_0(\mathbf{R})$ однородного пространства. Это обусловлено тем, что математический аппарат теории дифракции основан на использовании функции Грина однородного пространства [11, 14] и замена этой функции на другую (функцию Грина волновода $G(\mathbf{R})$) требует фактически полной переделки методов решения интегральных уравнений. Таким образом, в условиях волноводного распространения мы сталкиваемся с необходимостью привлечения приближенных методов.

МЕТОД ИТЕРАЦИЙ

Для приближенного решения $\varphi_m^\pm(\hat{\mathbf{R}})$, $\vartheta_m^\pm(\hat{\mathbf{R}})$ интегральных уравнений (15а, б) воспользуемся методом последовательных приближений. Метод итераций особенно хорошо применим, когда рассматриваемая задача очень близка к задаче, которая может быть точно решена. При этом предполагается, что отличия не носят сингулярного характера, т.е. изменения от точно разрешимой задачи до рассматриваемой можно произвести непрерывным образом. Аналитически это выражается в требовании, чтобы возмущение было не-

прерывной функцией параметра, определяющего величину возмущения. Примем в качестве нулевого приближения величины $\varphi_m^{\pm(0)}$ и $\vartheta_m^{\pm(0)}$, являющиеся решениями уравнений (15а) и (15б) с ядром в виде функции Грина однородного пространства $G_0(\hat{\mathbf{R}}, \hat{\mathbf{R}}') = \exp(ik|\hat{\mathbf{R}} - \hat{\mathbf{R}}'|)/4\pi|\hat{\mathbf{R}} - \hat{\mathbf{R}}'|$, которые будем предполагать известными. Подставив в правые части уравнений (15а, б) под знак интеграла известные функции $\varphi_m^{\pm(0)}$ и $\vartheta_m^{\pm(0)}$, найдем первые приближения в виде суммы двух членов $\varphi_m^{\pm[1]} = \varphi_m^{\pm(0)} + \varphi_m^{\pm(1)}$ и $\vartheta_m^{\pm[1]} = \vartheta_m^{\pm(0)} + \vartheta_m^{\pm(1)}$,

причем в p-случае

$$\varphi_m^{\pm(1)}(\hat{\mathbf{R}}) = 2\oint_S \varphi_m^{\pm(0)}(\hat{\mathbf{R}}')\frac{\partial}{\partial n}[G_0(\hat{\mathbf{R}}, \hat{\mathbf{R}}') - G(\hat{\mathbf{R}}, \hat{\mathbf{R}}')]d\hat{\mathbf{R}}', \quad \hat{\mathbf{R}} \in (S), \tag{18а}$$

а в s-случае

$$\vartheta_m^{\pm(1)}(\hat{\mathbf{R}}) = 2\oint_S \vartheta_m^{\pm(0)}(\hat{\mathbf{R}}')\frac{\partial}{\partial n'}[G(\hat{\mathbf{R}}, \hat{\mathbf{R}}') - G_0(\hat{\mathbf{R}}, \hat{\mathbf{R}}')]d\hat{\mathbf{R}}', \quad \hat{\mathbf{R}} \in (S). \tag{18б}$$

Если теперь в правые части интегральных выражений (15а) и (15б) вместо неизвестных функций подставить соответственно их первые приближения $\varphi_m^{\pm[1]}$ и $\vartheta_m^{\pm[1]}$, то найдем вторые приближения $\varphi_m^{\pm[2]}$ и $\vartheta_m^{\pm[2]}$ в виде суммы трех слагаемых: $\varphi_m^{\pm[2]} = \varphi_m^{\pm(0)} + \varphi_m^{\pm(1)} + \varphi_m^{\pm(2)}$ и $\vartheta_m^{\pm[2]} = \vartheta_m^{\pm(0)} + \vartheta_m^{\pm(1)} + \vartheta_m^{\pm(2)}$,

причем в p-случае

$$\varphi_m^{\pm(2)}(\hat{\mathbf{R}}) = -2\oint_S \varphi_m^{\pm(1)}(\hat{\mathbf{R}}')\frac{\partial}{\partial n}G(\hat{\mathbf{R}}, \hat{\mathbf{R}}')d\hat{\mathbf{R}}', \quad \hat{\mathbf{R}} \in (S), \tag{19а}$$

а в s-случае

$$\vartheta_m^{\pm(2)}(\hat{\mathbf{R}}) = 2\oint_S \vartheta_m^{\pm(1)}(\hat{\mathbf{R}}')\frac{\partial}{\partial n'}G(\hat{\mathbf{R}}, \hat{\mathbf{R}}')d\hat{\mathbf{R}}', \quad \hat{\mathbf{R}} \in (S). \tag{19б}$$

В соотношениях (19а, б) величины $\varphi_m^{\pm(1)}$ и $\vartheta_m^{\pm(1)}$ определяются выражениями (18а, б). Повторяя много раз эти итерационные процедуры, получим последовательности функций $\varphi_m^{\pm(n)}(\hat{\mathbf{R}})$, $\vartheta_m^{\pm(n)}(\hat{\mathbf{R}})$, сумма которых стремится к искомым точным решениям $\varphi_m^{\pm}(\hat{\mathbf{R}})$ и $\vartheta_m^{\pm}(\hat{\mathbf{R}})$

$$\varphi_m^{\pm}(\hat{\mathbf{R}}) = \sum_{n=0}^{\infty}\varphi_m^{\pm(n)}(\hat{\mathbf{R}}), \quad \vartheta_m^{\pm}(\hat{\mathbf{R}}) = \sum_{n=0}^{\infty}\vartheta_m^{\pm(n)}(\hat{\mathbf{R}}), \tag{20}$$

поскольку на основании физических соображений поверхностные плотности источников ограничены. При этом n-е шаги итерации $\varphi_m^{\pm(n)}$ и $\vartheta_m^{\pm(n)}$ даются рекуррентными соотношениями

а) в p-случае

$$\varphi_m^{\pm(n)}(\hat{\mathbf{R}}) = -2\oint_S \varphi_m^{\pm(n-1)}(\hat{\mathbf{R}}')\frac{\partial}{\partial n}G(\hat{\mathbf{R}}, \hat{\mathbf{R}}')d\hat{\mathbf{R}}', \quad \hat{\mathbf{R}} \in (S), \quad n \geq 2, \tag{21а}$$

б) в s-случае

$$\vartheta_m^{\pm(n)}(\hat{\mathbf{R}}) = 2\oint_S \vartheta_m^{\pm(n-1)}(\hat{\mathbf{R}}')\frac{\partial}{\partial n'}G(\hat{\mathbf{R}}, \hat{\mathbf{R}}')d\hat{\mathbf{R}}', \quad \hat{\mathbf{R}} \in (S), \quad n \geq 2. \tag{21б}$$

Отметим, что согласно (5) приближения $\varphi_m^{\pm(n)}$ и $\vartheta_m^{\pm(n)}$, $n \geq 1$, определяемые выражениями (18а, б) и (21а, б), описываются одинаковой функциональной зависимостью. Величинам $\varphi_m^{\pm(n)}$ и $\vartheta_m^{\pm(n)}$ ряда возмущения (20) можно дать наглядное истолкование. Нулевые члены $\varphi_m^{\pm(0)}$ и $\vartheta_m^{\pm(0)}$ определяют дифракционное поле без учета переотражений между телом и границами волновода. Высшие члены $\varphi_m^{\pm(n)}$ и $\vartheta_m^{\pm(n)}$, $n \geq 1$, можно трактовать как поверхностные плотности, определяемые n-кратным взаимодействием границ волновода с телом. При этом первые члены, определяемые выражениями (18а, б), являются хорошо известными борновским приближением. Таким образом, с помощью ряда (20), являющимся решением интегральных уравнений (15а, б), процесс дифракции в волноводе представлен как последовательность воздействий, оказываемых попеременно телом и границами волновода друг на друга (многократное переотражение). Изложенные соображения позволяют в каждом конкретном случае установить, при каких условиях несколько первых приближений дают достаточно хороший результат. После разрешения интегральных уравнений (15а, б) в виде ряда (20) величина $F(\mathbf{k}_m^{\pm}, \mathbf{k}_\mu^{\pm})$ определяющая матрицу рассеяния волновых мод $S_{\mu m}$ (17), находится из выражений (14а, б).

Аналогично может быть развита теория возмущений для задачи о дифракции звука на теле с импедансной поверхностью в регулярном плоскослоистом волноводе.

ПРИМЕНИМОСТЬ НУЛЕВОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Обсудим условия, при которых нулевое приближение является оправданным. В этом случае

матрица рассеяния волноводных мод $S_{\mu m}$ (17), как следует из выражений (14а, б) и (15а, б), определяется амплитудой рассеяния в однородном пространстве. Ранее это было показано в работах [3, 12].

Для этого необходимо, очевидно, чтобы остаток ряда суммы возмущений (20) был много меньше по абсолютной величине, чем модуль нулевого члена. В общем случае произвольных функций $\varphi_m^{\pm(0)}$, $\vartheta_m^{\pm(0)}$ оценка бесконечной суммы отброшенных членов весьма затруднительна. Поэтому обычно ограничиваются рассмотрением первых членов $\varphi_m^{\pm(1)}$, $\vartheta_m^{\pm(1)}$ и находят условия, при которых

$$\left|\varphi_m^{\pm(1)}(\hat{\mathbf{R}})\right| \ll \left|\varphi_m^{\pm(0)}(\hat{\mathbf{R}})\right|, \quad \left|\vartheta_m^{\pm(1)}(\hat{\mathbf{R}})\right| \ll \left|\vartheta_m^{\pm(0)}(\hat{\mathbf{R}})\right|. \quad (22)$$

Строго говоря, этот критерий применимости нулевого приближения справедлив только, если ряды (20) являются сходящимися и знакопеременными. В нашем случае это имеет место. Первое условие вытекает из физических представлений об ограниченности поверхностной плотности источников, а второе – согласно соотношению (21а, б). Следовательно, условие (22) является необходимым и достаточным для применимости нулевого приближения. Используя (5) и (18а, б), условие (22) можно записать в виде неравенства

а) в p-случае

$$2\left|\oint_S \varphi_m^{\pm(0)}(\hat{\mathbf{R}}')\frac{\partial}{\partial n}[G_0(\hat{\mathbf{R}}, \hat{\mathbf{R}}') - G(\hat{\mathbf{R}}, \hat{\mathbf{R}}')]d\hat{\mathbf{R}}'\right| \ll \left|\varphi_m^{\pm(0)}(\hat{\mathbf{R}})\right|, \quad \hat{\mathbf{R}} \in (S), \quad (23а)$$

б) в s-случае

$$2\left|\oint_S \vartheta_m^{\pm(0)}(\hat{\mathbf{R}}')\frac{\partial}{\partial n}[G_0(\hat{\mathbf{R}}', \hat{\mathbf{R}}) - G(\hat{\mathbf{R}}', \hat{\mathbf{R}})]d\hat{\mathbf{R}}'\right| \ll \left|\vartheta_m^{\pm(0)}(\hat{\mathbf{R}})\right|, \quad \hat{\mathbf{R}} \in (S). \quad (23б)$$

В общем случае неравенства (23а, б) слишком сложны для непосредственного анализа. Для того чтобы извлечь из них простые и наглядные оценки применимости нулевого приближения, упростим задачу.

Рассмотрим случай расположения тела вблизи одной из границ волновода, например, свободной поверхности воды $z = 0$. Примем, что характерный вертикальный размер тела d намного меньше толщины волновода H, $d \ll H$ и в пределах толщины слоя $z_s + d$ вблизи границы среда является локально-однородной [12]. Тогда в первом приближении функцию Грина волновода можно заменить на функцию Грина полупространства с идеальной мягкой границей и свести вопрос к задаче рассеяния на двух зеркально симметричных телах (действительного и мнимого) относительно плоскости $z = 0$. При этом функция $G(\hat{\mathbf{R}}, \hat{\mathbf{R}}')$ в (23а, б) равна [11]

$$G(\hat{\mathbf{R}}, \hat{\mathbf{R}}') = \frac{\exp(ik|\hat{\mathbf{R}} - \hat{\mathbf{R}}_1'|)}{4\pi|\hat{\mathbf{R}} - \hat{\mathbf{R}}_1'|} - \frac{\exp(ik|\hat{\mathbf{R}} - \hat{\mathbf{R}}_1' + \mathbf{a}|)}{4\pi|\hat{\mathbf{R}} - \hat{\mathbf{R}}_1' + \mathbf{a}|}, \quad \hat{\mathbf{R}}, \hat{\mathbf{R}}_1' \in (S_1). \quad (24)$$

Здесь (S_1) – поверхность действительного тела с геометрическим центром в точке $Q_s(\mathbf{R}_s)$; $\mathbf{a}$ – вектор, соединяющий две зеркально симметричные точки $\hat{\mathbf{R}}_2'$ и $\hat{\mathbf{R}}_1'$ поверхностей (S_2) и (S_1); (S_2) – поверхность мнимого тела с геометрическим центром в точке $Q_s^*(\mathbf{R}_s^*)$, $\mathbf{R}_s^* = \mathbf{R}_s - 2\hat{\mathbf{a}}_z z_s$. Подставив (24) в выражение (23а, б), приходим к неравенству

а) в p-случае

$$\frac{1}{2\pi}\left|\oint_{S_1} \varphi_m^{\pm(0)}(\hat{\mathbf{R}}_1')K(\hat{\mathbf{R}}, \hat{\mathbf{R}}_1')d\hat{\mathbf{R}}_1'\right| \ll \left|\varphi_m^{\pm(0)}(\hat{\mathbf{R}})\right|, \quad \hat{\mathbf{R}} \in (S_1), \quad (25а)$$

б) в s-случае

$$\frac{1}{2\pi}\left|\oint_{S_1} \vartheta_m^{\pm(0)}(\hat{\mathbf{R}}_1')K(\hat{\mathbf{R}}, \hat{\mathbf{R}}_1')d\hat{\mathbf{R}}_1'\right| \ll \left|\vartheta_m^{\pm(0)}(\hat{\mathbf{R}})\right|, \quad \hat{\mathbf{R}} \in (S_1), \quad (25б)$$

где ядро $K(\hat{\mathbf{R}}, \hat{\mathbf{R}}_1')$ определяется формулой

$$K(\hat{\mathbf{R}}, \hat{\mathbf{R}}_1') = \frac{(\mathbf{n}, \mathbf{b})}{b^3}(ikb - 1)\exp(ikb), \quad \mathbf{b} = \hat{\mathbf{R}} - \hat{\mathbf{R}}_1' + \mathbf{a}, \quad b = |\mathbf{b}|. \quad (26)$$

Оценка условия выполнимости приближения (25а, б) в каждом конкретном случае не вызывает трудностей, и мы не будем на ней останавливаться.

Грубую оценку области применимости нулевого приближения (25а, б) можно получить следующим образом. Положим в (25а, б) $\varphi_m^{\pm(0)} = \text{const}$, $\vartheta_m^{\pm(0)} = \text{const}$ и воспользуемся теоремой о среднем для тройного интеграла. При этом учтем, что модуль значения интеграла не больше значения интеграла от модуля подынтегральной функции. Усиливая неравенства (25а, б), положим в (26) $(\mathbf{n}, \mathbf{b}) = b$. Входящая в эти неравенства величина b не меньше наименьшего и не больше наибольшего расстояний между двумя точками, одна из которых лежит на поверхности (S_1), а другая – на (S_2).

В качестве характерного значения величины b примем расстояние $2z_s$ между геометрическими центрами тел, $b = 2z_s$. В результате получаем

$$S\sqrt{1+(2kz_s)^2}/8\pi z_s^2 \ll 1, \qquad (27)$$

где S – площадь поверхности тела. В двух предельных случаях коротких и длинных волн из (27) находим

а) короткие волны, $(2kz_s)^2 \gg 1$

$$S/2\lambda z_s \ll 1, \qquad (28а)$$

б) длинные волны, $(2kz_s)^2 \ll 1$

$$S/8\pi z_s^2 \ll 1. \qquad (28б)$$

Следовательно, если длина звуковой волны λ много меньше расстояния z_s от тела до поверхности воды $z = 0$, для применимости нулевого приближения достаточно малости площади поверхности по сравнению с величиной $2\lambda z_s$. Если же длина волны много больше этого расстояния, первым членом ряда теории возмущений можно пренебречь при достаточной малости площади поверхности по сравнению с величиной $8\pi z_s^2$. Оценочные условия (28а, б) неплохо согласуются с результатами численного моделирования [15–17]. Так, при рассмотрении рассеяния на двух сферах в [17] показано, что влияние вторично рассеянных полей не превышает 10%, если радиус сферы $r \le 2z_s/5$. Согласно (28б) получаем оценку $z_s \ge 2.2r$.

Таким образом в рамках теории интегральных уравнений сформулирована задача дифракции звуковых волн на акустически мягком и акустически жестком теле, расположенном в плоскослоистом волноводе океанического типа. Рассмотрена возможность применения теории возмущений к проблеме решения интегральных уравнений. Предложен последовательный метод вычисления поправок к параметрам рассеяния, учитывающий многократные переотражения волн между телом и границами волновода. Обсуждены условия, при которых многократным переотражением можно пренебречь (нулевое приближение). В нулевом приближении матрица рассеяния волноводных мод определяется амплитудой рассеяния в однородном пространстве.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 99-02-17671 и № 00-15-96636) и Федеральной целевой программы "Интеграция науки высшего образования России на 2002–2006 годы" (проект № И04-10).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Горский С.М., Зверев В.А., Хилько А.И.* Особенности дифракции акустических полей на пространственно-локализованных неоднородностях в волноводах океанического типа // Формирование акустических полей в океанических волноводах / Н. Новгород: ИПФ АН СССР, 1991. С. 82–114.
2. *Sarkissian A.* Extraction of a target scattering response from measurements mode over long ranges in shallow water // J. Acoust. Soc. Amer. 1997. V. 102. № 2. Pt. 1. P. 825–832.
3. *Кравцов Ю.А., Кузькин В.М., Петников В.Г.* Дифракция волн на регулярных рассеивателях в многомодовых волноводах // Акуст. журн. 1984. Т. 30. № 2. С. 339–343.
4. *Горская Н.В., Горский С.М., Зверев В.А., Николаев Г.Н., Курин В.В., Хилько А.И.* Коротковолновая дифракция в многомодовом слоистом волноводе // Акуст. журн. 1988. Т. 34. № 1. С. 55–59.
5. *Немцова В.Н., Федорюк М.В.* Дифракция звуковых волн на тонком теле вращения в двухслойной жидкости // Акуст. журн. 1986. Т. 32. № 1. С. 131–134.
6. *Sarkissan A.* Method of superposition applied to scattering from a target in shallow water // J. Acoust. Soc. Amer. 1994. V. 95. № 5. P. 2340–2345.
7. *Yang S.A.* A boundary integral equation method for two-dimensional acoustic scattering problems // J. Acoust. Soc. Amer. 1999. V. 105. № 1. P. 93–105.
8. *Martin Ochmann.* The full-field equations for acoustic radiation and scattering // J. Acoust. Soc. Amer. 1999. V. 105. № 5. P. 2557–2564.
9. *Зацерковный А.В., Сергеев В.А., Шарфарец Б.П.* Использование амплитуды рассеяния для решения задач дифракции волн в полупространстве // Акуст. журн. 2001. Т. 47. № 5. С. 650–656.
10. *Бреховских Л.М., Лысанов Ю.П.* Теоретические основы акустики океана. Л.: Гидрометеоиздат, 1982. 264 с.
11. *Хенл Х., Мауэ А., Вестпфаль К.* Теория дифракции. Пер. с нем. // Под ред. Малюжинца Г.Д. М.: Мир, 1964. 428 с.
12. *Кузькин В.М.* Об излучении и рассеянии звуковых волн в океанических волноводах // Акуст. журн. 2001. Т. 47. № 4. С. 483–489.
13. *Лямшев Л.М.* К вопросу о принципе взаимности в акустике // ДАН СССР. 1959. Т. 125. № 6. С. 1231–1234.
14. *Федорюк М.В.* Рассеяние плоской волны на цилиндрической поверхности с длинным возмущением // Изв. АН СССР. Сер. матем., 1985. Т. 49. № 1. С. 160–193.
15. *Клещев А.А.* Гидроакустические рассеиватели. Справочник // СПб.: Судостроение, 1992. 248 с.
16. *Varadan V.V., Varadan V.K.* Configurations with finite numbers of scatters-a self-consistent T-matrix approach // J. Acoust. Soc. Amer. 1981. V. 70. P. 213–217.
17. *Квятковский С.О.* Дифракция звуковых волн на объемных рассеивателях, помещенных в акустический волновод // Вопросы акустики океана и судов. Л.: ЛКИ, 1986. С. 43–50.

Sound Scattering by a Body in a Planar Layered Waveguide

V. M. Kuz'kin

Wave Research Center, General Physics Institute, Russian Academy of Sciences, ul. Vavilova 38, Moscow, 119991 Russia
e-mail: gera@kapella.gpi.ru

Abstract—In the framework of the theory of integral equations, the problem of sound diffraction by pressure-release and acoustically stiff inhomogeneities of an oceanic waveguide is considered. The iteration method is used to obtain recurrent relations for the surface currents. The relations describe the diffraction process as a sequence of interactions between the body and the waveguide boundaries (multiple reflections). The validity condition for the zero-order approximation, which ignores multiple reflections, is formulated and physically justified.