АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2003, том 49, № 1, с. 85–91

УДК 534.26

ПРОВОДИМОСТЬ КАНАВКИ НА ЖЕСТКОЙ ПОВЕРХНОСТИ, ОБТЕКАЕМОЙ ПОТОКОМ

© 2003 г. А. Д. Лапин, М. А. Миронов

Акустический институт им. Н.Н. Андреева РАН
117036 Москва, ул. Шверника 4
E-mail: mironov@akin.ru

Поступила в редакцию 18.05.2002 г.

Рассмотрена задача дифракции звука на канавке на жесткой поверхности, обтекаемой потоком. Рассчитана входная акустическая проводимость канавки и показано, что активная часть этой проводимости отрицательна.

Влияние среднего сдвига течения на акустическую проводимость отверстий в экране, разделяющем неподвижную и движущуюся среды, представляет значительный интерес для конструирования и анализа функционирования глушителей, работающих в движущейся среде. Эксперименты показали, что тангенциальный разрыв, перекрывающий горло резонатора Гельмгольца, меняет как его резонансную частоту, так и коэффициент потерь [1]. Подробное исследование проводимости изолированного отверстия в экране проведено в [2]. Строгий аналитический метод расчета влияния тангенциального разрыва на акустику отверстия в экране предложен в работах [3, 4]. Разностный численный метод решения уравнения Навье–Стокса использовался в работе [5] (в этой же работе приведен полный список работ, относящихся к проблеме влияния потока на акустику полостей). В настоящей работе метод работ [3, 4] обобщается на задачу о канавке в жесткой плоскости, перекрытой тангенциальным разрывом. Основное различие в постановках задач дифракции на отверстии без тангенциального разрыва и с тангенциальным разрывом состоит в разных граничных условиях на передней кромке. В отсутствие тангенциального разрыва на обеих кромках ставится условие равенства нулю потока энергии к кромке. При наличии тангенциального разрыва на передней кромке ставится условие Кутта–Жуковского: смещение и наклон тангенциального разрыва на кромке равны нулю. В [3, 4] показано, что задачу дифракции на отверстии, перекрытом тангенциальным разрывом, можно свести к двум последовательно решаемым задачам. Первая – дифракция на отверстии в отсутствие течения. Если эта задача решена, решение исходной задачи с тангенциальным разрывом получается из первой задачи путем некоторого операторного преобразования, выписываемого в явной аналитической форме. Обобщение, проведенное в данной работе, позволяет распространить этот прием на случаи, в которых функции Грина по разным сторонам тангенциального разрыва неодинаковы.

Рассмотрим дифракцию звука на прямоугольной канавке на жесткой поверхности (рис. 1). Плотность и скорость звука в полупространстве и в канавке одинаковы и равны соответственно ρ и c. Среда в полупространстве $y > 0$ движется вдоль оси x со скоростью U, среда в канавке покоится. При воздействии звукового поля граница раздела движущейся и неподвижной сред – тангенциальный разрыв – смещается. Обозначим через $\eta(x, t)$ отклонение этой границы от плоскости $y = 0$. Пусть известно гармоническое звуковое поле в движущейся среде при закрытой канавке ($\eta \equiv 0$). Обозначим звуковое давление в нем через $p_0(x, y)$, временной множитель $\exp(-i\omega t)$ опускаем. Требуется найти смещение $\eta(x)$ тангенциального разрыва в открытой канавке. По известному смещению можно определить поле звукового давления как в канавке, так и в полупространстве.

Обозначим через Φ_1 и Φ_2 звуковые потенциалы рассеянных полей в неподвижной и движу-

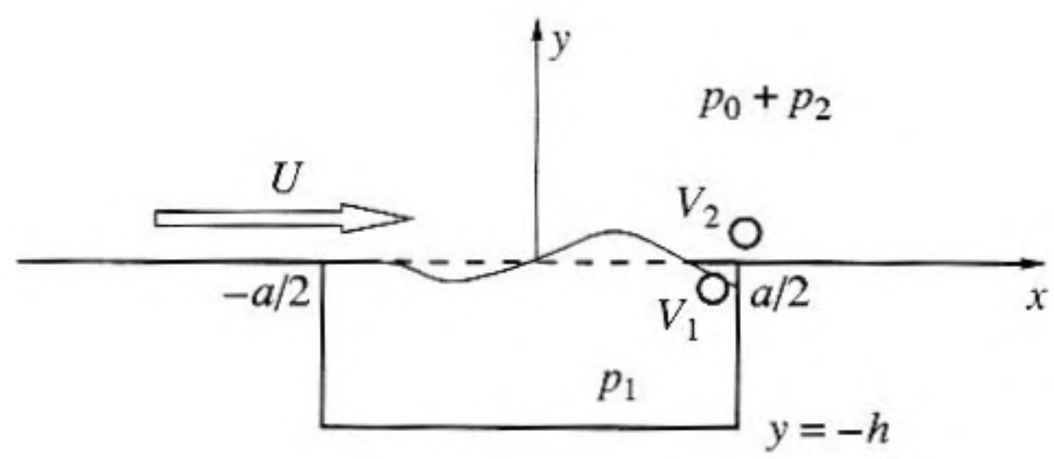

Рис. 1. Канавка в жесткой плоскости, обтекаемой потоком.

щейся средах. Звуковые давления и y-компоненты скоростей и смещений связны с этими потенциалами соотношениями

$$p_1 = i\omega\rho\Phi_1, \quad p_2 = i\omega\rho\left[1 + \frac{U}{-i\omega}\frac{\partial}{\partial x}\right]\Phi_2, \tag{1}$$

$$v_{1y} = \frac{\partial\Phi_1}{\partial y} = -i\omega\eta_1(x, y),$$
$$v_{2y} = \frac{\partial\Phi_2}{\partial y} = -i\omega\left[1 + \frac{U}{-i\omega}\frac{\partial}{\partial x}\right]\eta_2(x, y). \tag{2}$$

Полное поле должно удовлетворять условию непрерывности давления в отверстии

$$p_1(x, 0) = p_2(x, 0) + p_0(x, 0), \quad |x| < a/2, \tag{3}$$

непрерывности смещений в отверстии

$$\eta_1(x, 0) = \eta_2(x, 0) = \eta(x), \quad |x| < a/2, \tag{4}$$

условию Кутта–Жуковского на передней кромке

$$\eta\left(-\frac{a}{2}\right) = 0, \quad \left.\frac{d\eta}{dx}\right|_{x=-a/2} = 0. \tag{5}$$

Поля p_1 и p_2 ищем в виде

$$p_1 = p_{1r} + p_{1l}, \quad p_2 = p_{2r} + p_{2l},$$

где p_{1r} и p_{2r} – поля в неподвижной и движущейся средах, создаваемые нормальными смещениями тангенциального разрыва, p_{1l} и p_{2l} – поля в неподвижной и движущейся средах, создаваемые "концевыми" источниками, обусловленными обтеканием правого края канавки разрывным потоком. Отметим, что поля p_{1l} и p_{2l} вычисляются при закрытой канавке ($\eta \equiv 0$). Запишем интегральные выражения, связывающие поля p_{1r}, p_{2r}, p_{1l} и p_{2l} со смещением $\eta(x)$ и затем подставим эти выражения в граничное условие (3). Получаемое выражение и будет искомым уравнением для $\eta(x)$. Согласно формулам (1), (2) и (4) можно полагать, что поля p_{1r} и p_{2r} создаются соответственно источниками объемной скорости

$$f_1 = +i\omega\eta(x), \quad f_2 = -i\omega\left[1 + \frac{U}{-i\omega}\frac{\partial}{\partial x}\right]\eta(x),$$

распределенными по плоскости $y = 0$ в интервале $|x| < a/2$. Пользуясь методом Фурье, получим следующие выражения для полей p_{1r} и p_{2r}:

$$p_{1r}(x, y) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\omega^2\rho b_n}{\sqrt{k_n^2 - k^2}\,\mathrm{sh}[\sqrt{k_n^2 - k^2}h]} \times \cos\left[k_n\left(\frac{a}{2} + x\right)\right]\mathrm{ch}[\sqrt{k_n^2 - k^2}(h + y)], \tag{6}$$

$$p_{2r}(x, y) = -\rho\omega^2\int_{-\infty}^{+\infty} g(\alpha)\frac{\left(1 - \frac{U}{\omega}\alpha\right)^2}{\sqrt{\alpha^2 - (k - M\alpha)^2}} \times \exp[i\alpha x - \sqrt{\alpha^2 - (k - M\alpha)^2}\,y]d\alpha, \tag{7}$$

где $k_n = \pi n/a$, $k = \omega/c$, $M = U/c$, $\mathrm{Re}\sqrt{\alpha^2 - (k - M\alpha)^2} > 0$ при $\mathrm{Im}\,k > 0$.

Коэффициенты b_n и $g(\alpha)$ являются амплитудами Фурье-компонент разложений смещения $\eta(x)$ в ряд Фурье и в интеграл Фурье:

$$\eta(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n\cos\left[k_n\left(\frac{a}{2} + x\right)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} g(\alpha)e^{i\alpha x}d\alpha,$$

$$b_n = \frac{2}{a\varepsilon_n}\int_{-a/2}^{a/2} \eta(x)\cos\left[k_n\left(\frac{a}{2} + x\right)\right]dx, \tag{8}$$

$$g(\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_{-a/2}^{a/2} \eta(x)e^{-i\alpha x}dx,$$

$\varepsilon_0 = 2$, $\varepsilon_n = 1$ при $n \neq 0$. Они связаны соотношениями

$$b_n = \frac{2\pi}{a\varepsilon_n}\left\{g(-k_n)\exp\left(ik_n\frac{a}{2}\right) + g(k_n)\exp\left(-ik_n\frac{a}{2}\right)\right\},$$
$$g(\alpha) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty} G_n(\alpha)b_n, \tag{9}$$

где

$$G_n(\alpha) = \int_{-a/2}^{a/2} \cos\left[k_n\left(\frac{a}{2} + x\right)\right]e^{-i\alpha x}dx =$$
$$= \frac{\alpha}{(\alpha^2 - k_n^2)}\left\{[(-1)^n + 1]\sin\left(\frac{\alpha a}{2}\right) + i[(-1)^n - 1]\cos\left(\frac{\alpha a}{2}\right)\right\}.$$

Параметры "концевых" источников получим из следующих физических соображений. Если отклонение тангенциального разрыва в точке $x = a/2$ отрицательное, то в канавку проникает движущаяся среда. Это втекание среды можно описать действием источника объемной скорости, расположенного вблизи (ниже) правого края канавки. Амплитуда гармонической компоненты этой объемной скорости равна приблизительно $V_1 = -\beta_1 U\eta\left(\frac{a}{2}\right)$, где коэффициент β_1 по порядку величины равен 0.5. Если отклонение тангенци-

ального разрыва в точке $x = \frac{a}{2}$ положительное, то среда, находящаяся между этим разрывом и плоскостью $y = 0$, становится неподвижной. Эту остановку можно описать действием источника объемной скорости, расположенного вблизи (выше) правого конца канавки. Амплитуда гармонической компоненты этой объемной скорости равна приближенно $V_2 = -\beta_2 U\eta\left(\frac{a}{2}\right)$, где коэффициент β_2 по порядку величины также равен 0.5.

Эти монопольные компоненты "концевые" источники при закрытой канавке ($\eta \equiv 0$) создают поля

$$p_{1l}(x, y) = -i\omega\rho \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n 2V_1}{a\varepsilon_n \sqrt{k_n^2 - k^2}\,\mathrm{sh}[\sqrt{k_n^2 - k^2}h]} \times \tag{10}$$
$$\times \cos\left[k_n\left(\frac{a}{2} + x\right)\right]\mathrm{ch}[\sqrt{k_n^2 - k^2}(h + y)],$$

$$p_{2l}(x, y) = -i\omega\rho\frac{V_2}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left(1 - \frac{U}{\omega}\alpha\right)}{\sqrt{\alpha^2 - (k - M\alpha)^2}} \times \tag{11}$$
$$\times \exp\left[i\alpha\left(x - \frac{a}{2}\right) - \sqrt{\alpha^2 - (k - M\alpha)^2}\,y\right]d\alpha.$$

Поля $p_1 = p_{1r} + p_{1l}$ и $p_2 = p_{2r} + p_{2l}$, где p_{1r}, p_{2r}, p_{1l} и p_{2l} определяются по формулам (6), (7), (10) и (11), удовлетворяют граничному условию (4). Удовлетворим граничному условию (3). С этой целью разложим поля $p_{1r}(x, 0)$ и $p_{1l}(x, 0)$ в интегралы Фурье; при учете соотношений (9) имеем разложения

$$p_{1r}(x, 0) = \rho\omega^2 \int_{-\infty}^{\infty} g(\alpha)\frac{\mathrm{cth}[\sqrt{\alpha^2 - k^2}h]}{\sqrt{\alpha^2 - k^2}}e^{i\alpha x}d\alpha, \tag{12}$$

$$p_{1l}(x, 0) = -i\omega\rho\frac{V_1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{cth}[\sqrt{\alpha^2 - k^2}h]}{\sqrt{\alpha^2 - k^2}}e^{i\alpha(x - a/2)}d\alpha. \tag{13}$$

Подставляя формулы (7), (11), (12) и (13) в граничное условие (3), получим интегральное уравнение для $g(\alpha)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\alpha)\left\{\frac{\left(1 - \frac{U}{\omega}\alpha\right)^2}{\sqrt{\alpha^2 - (k - M\alpha)^2}} + \frac{\mathrm{cth}[\sqrt{\alpha^2 - k^2}h]}{\sqrt{\alpha^2 - k^2}}\right\}e^{i\alpha x}d\alpha = \tag{14}$$
$$= \frac{1}{\rho\omega^2}[p_0(x, 0) + p_l(x, 0)],$$
$$|x| < \frac{a}{2},$$

где

$$p_l(x, 0) = p_{2l}(x, 0) - p_{1l}(x, 0) =$$
$$= \frac{i\omega\rho}{2\pi}U\eta\left(\frac{a}{2}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\beta_2\frac{1 - \frac{U}{\omega}\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - (k - M\alpha)^2}} - \right. \tag{15}$$
$$\left. - \beta_1\frac{\mathrm{cth}[\sqrt{\alpha^2 - k^2}h]}{\sqrt{\alpha^2 - k^2}}\right\}e^{i\alpha(x - a/2)}d\alpha.$$

При заданном перепаде давления $P(x) \equiv p_0(x, 0) + p_l(x, 0)$ на отверстии смещение границы при $U \neq 0$ можно выразить через ее смещение при $U = 0$. Обозначим через $g_0(\alpha)$ решение уравнения (14) при $U = 0$. Тогда при $U \neq 0$ (при том же перепаде давления $P(x)$ на отверстии) его решением будет

$$g(\alpha) =$$
$$= g_0(\alpha)\frac{\left\{\frac{\left(1 - \frac{U}{\omega}\alpha\right)^2}{\sqrt{\alpha^2 - (k - M\alpha)^2}} + \frac{\mathrm{cth}[\sqrt{\alpha^2 - k^2}h]}{\sqrt{\alpha^2 - k^2}}\right\}_{U=0}}{\left\{\frac{\left(1 - \frac{U}{\omega}\alpha\right)^2}{\sqrt{\alpha^2 - (k - M\alpha)^2}} + \frac{\mathrm{cth}[\sqrt{\alpha^2 - k^2}h]}{\sqrt{\alpha^2 - k^2}}\right\}}.$$

Смещение получим по формуле

$$\eta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\alpha)e^{i\alpha x}d\alpha = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-a/2}^{a/2} \eta_0(x_0)\frac{1}{W(\alpha)} \times \tag{16}$$
$$\times \exp[i\alpha(x - x_0) + \sqrt{\alpha^2 - k^2}h]dx_0 d\alpha,$$

где

$$W(\alpha) = \left(1 - \frac{U}{\omega}\alpha\right)^2 \frac{\sqrt{\alpha^2 - k^2}}{\sqrt{\alpha^2 - (k - M\alpha)^2}}\mathrm{sh}[\sqrt{\alpha^2 - k^2}h] + \tag{17}$$
$$+ \mathrm{ch}[\sqrt{\alpha^2 - k^2}h],$$

$\eta_0(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g_0(\alpha)e^{i\alpha x}d\alpha$ – смещение границы при $U = 0$.

В формуле (16) интеграл по α вычислим на основе теории вычетов. Полюсы подынтегрального выражения являются корнями уравнения $W(\alpha) = 0$. Оно имеет два "физических" корня $\alpha = \alpha_1$ и $\alpha = \alpha_2$, являющихся волновыми числами свободных гидродинамических волн. Выполняя соответствующие расчеты и удовлетворяя граничным условиям (15) на кромке добавлением к

решению свободных гидродинамических волн, получим искомое смещение

$$\eta(x) = \\ = \frac{R(\alpha_1)+R(\alpha_2)}{\alpha_2-\alpha_1}\eta_0(-a/2)[e^{i\alpha_1(x+a/2)} - e^{i\alpha_2(x+a/2)}] + \\ + iR(\alpha_1)\int\limits_{-a/2}^{x}\eta_0(x_0)e^{-i\alpha_1 x_0}dx_0 e^{i\alpha_1 x} + \\ + iR(\alpha_2)\int\limits_{-a/2}^{x}\eta_0(x_0)e^{-i\alpha_2 x_0}dx_0 e^{i\alpha_2 x}, \tag{18}$$

где

$$R(\alpha) = \frac{1}{\frac{d}{d\alpha}W(\alpha)}\exp(\sqrt{\alpha^2-k^2}h),$$

$$\left\{\frac{d}{d\alpha}W(\alpha)\right\}_{\alpha=\alpha_{1,2}} = \mathrm{sh}[\sqrt{\alpha_{1,2}^2-k^2}h]\times \\ \times\left\{-2\frac{U}{\omega}\left(1-\frac{U}{\omega}\alpha\right)\frac{\sqrt{\alpha^2-k^2}}{\sqrt{\alpha^2-(k-M\alpha)^2}} + \right. \\ +\left(1-\frac{U}{\omega}\alpha\right)^2 M\frac{k\alpha^2(1-M)+k^3}{\sqrt{\alpha^2-k^2}[\alpha^2-(k-M\alpha)^2]^{3/2}} - \\ \left. -\frac{\alpha h}{\sqrt{\alpha^2-k^2}\,\mathrm{sh}^2[\sqrt{\alpha^2-k^2}h]}\right\}_{\alpha=\alpha_{1,2}}.$$

Предельные значения корней для случая несжимаемой среды ($c = \infty$) равны

$$\alpha_{1,2} = \frac{\omega}{U}\{1\pm i), \quad h\longrightarrow\infty;$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{\omega}{U}\left(\frac{U}{\omega h}\right)^{1/3}\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}, \quad h\longrightarrow 0.$$

Итак, для вычисления смещения $\eta(x)$ при $U \neq 0$ необходимо знать смещение $\eta_0(x)$ при $U = 0$ (при том же перепаде давления на отверстии). Его получим следующим образом. Подставим поля $p_1 = p_{1r} + p_{1l}$ и $p_2 = p_{2r} + p_{2l}$, где p_{1r} и p_{2r} определяются по формулам (6) и (7) при $U = 0$, в граничное условие (3), умножим обе части полученного соотношения на $\cos\left[k_m\left(\frac{a}{2}+x\right)\right]$ и проинтегрируем по x в интервале $|x| < a/2$. При учете соотношений (9) получим систему алгебраических уравнений для амплитуд b_n:

$$b_m\frac{\varepsilon_m a}{2}\frac{\mathrm{cth}[\sqrt{k_m^2-k^2}h]}{\sqrt{k_m^2-k^2}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{G_n(\alpha)G_m^*(\alpha)}{\sqrt{a^2-k^2}}d\alpha = \\ = \frac{1}{\rho\omega^2}\int\limits_{-a/2}^{a/2}P(x)\cos\left[k_m\left(\frac{a}{2}+x\right)\right]dx.$$

Зная эти амплитуды, смещение $\eta_0(x)$ получим по формуле

$$\eta_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty}b_n\cos\left[k_n\left(\frac{a}{2}+x\right)\right]. \tag{19}$$

Представим смещение $\eta_0(x)$ в виде

$$\eta_0(x) = \eta_0^{(0)}(x) + \eta\left(\frac{a}{2}\right)\zeta(x), \tag{20}$$

где $\eta_0^{(0)}(x)$ – смещение, порожденное давлением $p_0(x, 0)$, $\eta\left(\frac{a}{2}\right)\zeta(x)$ – смещение, порожденное давлением $p_l(x, 0)$ (в отсутствие потока). Пользуясь формулами (18) и (20), получим выражение для $\eta\left(\frac{a}{2}\right)$:

$$\eta\left(\frac{a}{2}\right) = -\left\{\frac{[R(\alpha_1)+R(\alpha_2)]}{\alpha_2-\alpha_1}\eta_0^{(0)}\left(-\frac{a}{2}\right)[e^{i\alpha_1 a} - e^{i\alpha_2 a}] + \right. \\ + iR(\alpha_1)\int\limits_{-a/2}^{a/2}\eta_0^{(0)}(x_0)e^{-i\alpha_1 x_0}dx_0 e^{i\alpha_1 a/2} + \\ \left. + iR(\alpha_2)\int\limits_{-a/2}^{a/2}\eta_0^{(0)}(x_0)e^{-i\alpha_2 x_0}dx_0 e^{i\alpha_2 a/2}\right\}\times \\ \times\left\{\frac{[R(\alpha_1)+R(\alpha_2)]}{\alpha_2-\alpha_1}\zeta\left(-\frac{a}{2}\right)[e^{i\alpha_1 a} - e^{i\alpha_2 a}] + \right. \\ + iR(\alpha_1)\int\limits_{-a/2}^{a/2}\zeta(x_0)e^{-i\alpha_1 x_0}dx_0 e^{i\alpha_1 a/2} + \\ \left. + iR(\alpha_2)\int\limits_{-a/2}^{a/2}\zeta(x_0)e^{-i\alpha_2 x_0}dx_0 e^{i\alpha_2 a/2} - 1\right\}^{-1}. \tag{21}$$

Формулы (18), (20) и (21) представляют собой решение задачи о движении тангенциального разрыва в отверстии. Рассмотрим кратко структуру решения. Согласно (18), смещение тангенциального разрыва есть сумма двух гидродинамических волн – одной нарастающей и одной убывающей экспоненциально. Эти волны возбуждаются ис-

точниками, представляющими собой вертикальные смещения частиц в отверстии, которые возникли бы в отсутствие течения в верхнем полупространстве под действием полей давления $p_0(x, 0)$ и $p_l(x, 0)$. Поле p_l осуществляет обратную связь между смещениями тангенциального разрыва на кромке $x = a/2$ и смещениями по всему отверстию.

На основе полученного решения можно рассчитывать, в частности, входную проводимость канавки, если длина канавки много меньше длины падающей волны. Она определяется по формулам

$$Y = V/\int_{-a/2}^{a/2} p_0(x, 0)dx, \tag{22}$$

$$V = -\int_{-a/2}^{a/2} (-i\omega)\eta(x)dx - \beta_1 U\eta\left(\frac{a}{2}\right) - \tag{23}$$

объемная скорость среды, проходящей через отверстие. В формуле (23) первое слагаемое связано с вытеснением среды при боковом движении тангенциального разрыва, второе слагаемое связано с проникновением струи движущейся среды в неподвижную среду, заполняющую канавку.

Предложенный алгоритм расчета является замкнутым, точным, но громоздким. Основная вычислительная трудность, не связанная с наличием тангенциального разрыва, состоит в решении системы уравнений для коэффициентов b_n. Чтобы получить правильное качественное представление о поведении тангенциального разрыва и акустической проводимости канавки, можно рассмотреть задачу в упрощенной постановке. Именно, предположим, что смещение $\eta_0(x)$ является чисто поршневым. Иными словами, в разложении в ряд Фурье (19) мы оставляем только первое слагаемое. Подчеркнем, что смещение тангенциального разрыва, вычисляемое по формуле (18), не предполагается поршневым. Мы упрощаем только вспомогательную задачу по вычислению поля смещения в отверстии в отсутствие потока. Такой же прием был применен в работе [1].

Итак, предполагаем, что оба источника – давление в исходном поле $p_0(x)$ и давление $p_l(x)$ (концевые источники объемной скорости) – действуют на невесомый недеформируемый поршень, закрывающий канавку. Необходимо найти смещение поршня под действием этих двух источников. Чтобы еще больше упростить задачу, будем считать среду слабо сжимаемой – длина звуковой волны много больше размеров канавки. Тогда смещение под действием внешнего давления $\eta_0^{(0)}$ равно (это смещение пропорционально сжимаемости среды в объеме канавки)

$$\eta_0^{(0)} = -\frac{h}{\rho c^2}p_0,$$

а параметр ζ – коэффициент пропорциональности между смещением тангенциального разрыва на задней кромке $\eta\left(\frac{a}{2}\right)$ и η_0 (вычисляется в предположении несжимаемости среды в канавке приравниванием объемного смещения концевого источника объемному смещению поршня) –

$$\zeta = \frac{-\beta_1 U}{-i\omega a}.$$

Интегралы в формуле (21) вычисляются, и смещение $\eta\left(\frac{a}{2}\right)$ оказывается равным

$$\eta\left(\frac{a}{2}\right) = -\frac{\dfrac{R(\alpha_1)+R(\alpha_2)}{\alpha_1-\alpha_2}(e^{i\alpha_1 a}-e^{i\alpha_2 a}) + \dfrac{iR(\alpha_1)}{-i\alpha_1}(1-e^{i\alpha_1 a}) + \dfrac{iR(\alpha_2)}{-i\alpha_2}(1-e^{i\alpha_2 a})}{\zeta\left[\dfrac{R(\alpha_1)+R(\alpha_2)}{\alpha_1-\alpha_2}(e^{i\alpha_1 a}-e^{i\alpha_2 a}) + \dfrac{iR(\alpha_1)}{-i\alpha_1}(1-e^{i\alpha_1 a}) + \dfrac{iR(\alpha_2)}{-i\alpha_2}(1-e^{i\alpha_2 a})\right]-1}\eta_0^{(0)}.$$

Далее определяем η_0 – смещение во вспомогательной задаче

$$\eta_0 = \eta_0^{(0)}\left\{1-\zeta\frac{\dfrac{R(\alpha_1)+R(\alpha_2)}{\alpha_1-\alpha_2}(e^{i\alpha_1 a}-e^{i\alpha_2 a}) + \dfrac{iR(\alpha_1)}{-i\alpha_1}(1-e^{i\alpha_1 a}) + \dfrac{iR(\alpha_2)}{-i\alpha_2}(1-e^{i\alpha_2 a})}{\zeta\left[\dfrac{R(\alpha_1)+R(\alpha_2)}{\alpha_1-\alpha_2}(e^{i\alpha_1 a}-e^{i\alpha_2 a}) + \dfrac{iR(\alpha_1)}{-i\alpha_1}(1-e^{i\alpha_1 a}) + \dfrac{iR(\alpha_2)}{-i\alpha_2}(1-e^{i\alpha_2 a})\right]-1}\right\},$$

или, после преобразования

$$\eta_0 = \eta_0^{(0)}\left\{\frac{-1}{\zeta\left[\dfrac{R(\alpha_1)+R(\alpha_2)}{\alpha_1-\alpha_2}(e^{i\alpha_1 a}-e^{i\alpha_2 a}) + \dfrac{iR(\alpha_1)}{-i\alpha_1}(1-e^{i\alpha_1 a}) + \dfrac{iR(\alpha_2)}{-i\alpha_2}(1-e^{i\alpha_2 a})\right]-1}\right\}.$$

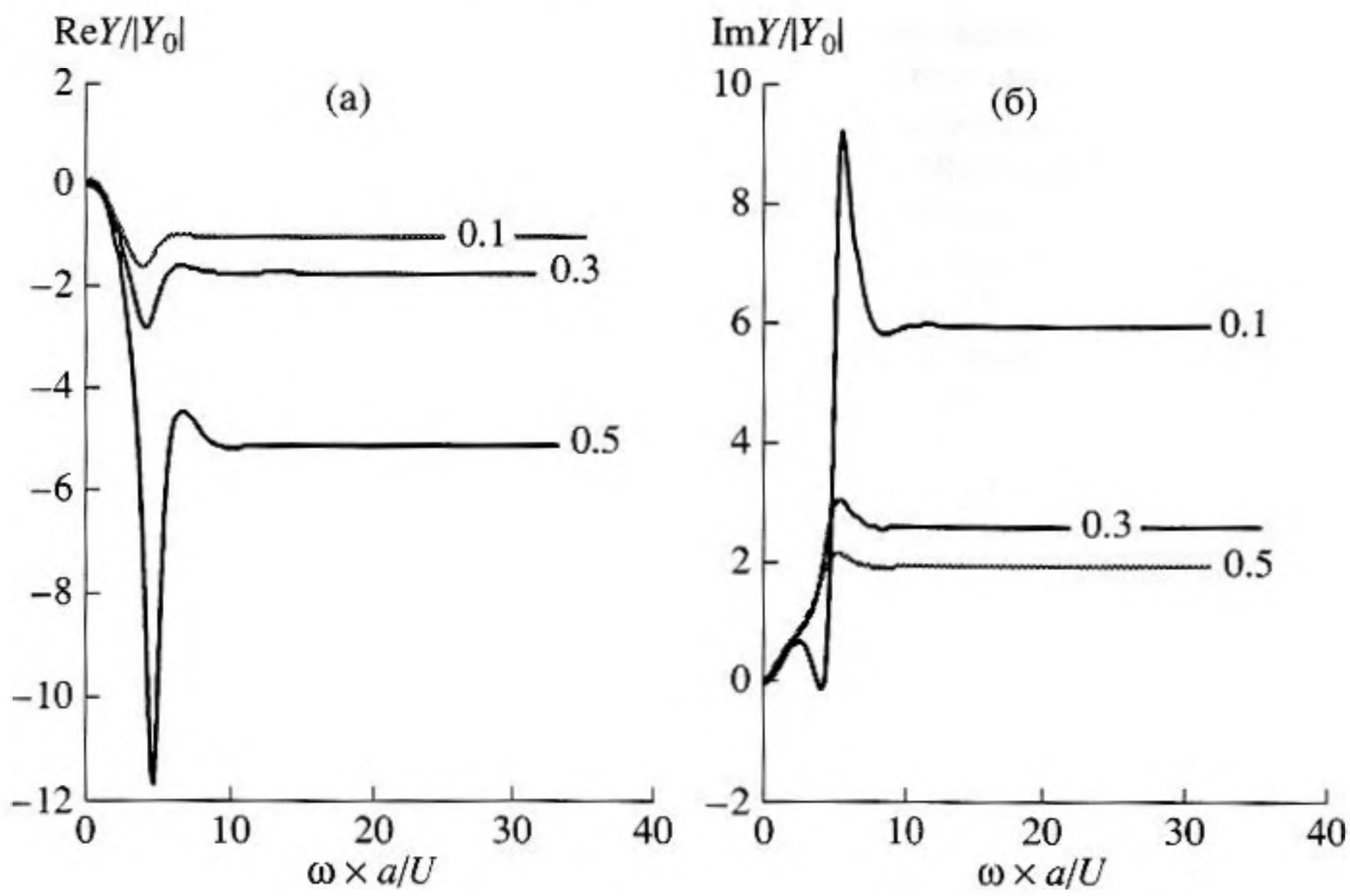

Рис. 2. Зависимости вещественной (а) и мнимой (б) частей проводимости канавки от частоты. По оси абсцисс безразмерная частота, по оси ординат безразмерная проводимость, нормированная на модуль проводимости канавки в отсутствие потока $Y_0 = i\omega h/\rho c^2$. Различные кривые соответствуют разным значения параметра β_1 (выписаны около каждой кривой). Размерные параметры равны: $h = 0.005$ м; $a = 0.005$ м; $U = 17$ м.

Далее вычисляем смещение тангенциального разрыва по формуле (18)

$$\eta(x) = \eta_0\left\{-\left(\frac{R(\alpha_1)}{\alpha_1} + \frac{R(\alpha_2)}{\alpha_2}\right) + \right.$$

$$+ e^{i\alpha_1\left(x+\frac{a}{2}\right)}\left[\frac{R(\alpha_1)+R(\alpha_2)}{\alpha_1-\alpha_2} + \frac{R(\alpha_1)}{\alpha_1}\right] -$$

$$\left. - e^{i\alpha_2\left(x+\frac{a}{2}\right)}\left[\frac{R(\alpha_1)+R(\alpha_2)}{\alpha_1-\alpha_2} + \frac{R(\alpha_2)}{\alpha_2}\right]\right\}.$$

Это выражение удовлетворяет условию Кутта–Жуковского.

Далее можно вычислить эффективную проводимость канавки. Объемная скорость равна

$$V = -(-i\omega)\eta_0\left[-\left(\frac{R(\alpha_1)}{\alpha_1} + \frac{R(\alpha_2)}{\alpha_2}\right)a + \right.$$

$$+\left(\frac{R(\alpha_1)+R(\alpha_2)}{\alpha_1-\alpha_2} + \frac{R(\alpha_1)}{\alpha_1}\right)\frac{1}{i\alpha_1}(e^{i\alpha_1 a} - 1) -$$

$$\left. -\left(\frac{R(\alpha_1)+R(\alpha_2)}{\alpha_1-\alpha_2} - \frac{R(\alpha_2)}{\alpha_2}\right)\frac{1}{i\alpha_1}(e^{i\alpha_2 a} - 1)\right] - \beta_1 U\eta\left(\frac{a}{2}\right).$$

Все входящие в это выражение величины ранее вычислены. Они выражаются, в конечном счете, через $\eta_0^{(0)}$. Проводимость канавки равна

$$Y = V/ap_0.$$

На рис. 2 приведены результаты расчета вещественной и мнимой частей проводимости, нормированной на модуль упругой проводимости канавки в отсутствие потока, $Y_0 = i\omega h/\rho c^2$. Разным кривым соответствуют разные коэффициенты β_1.

Активная часть проводимости отрицательна. Это означает, что над акустическим полем производится работа и суммарная мощность поля увеличивается.

Авторы посвящают эту работу памяти Леонида Михайловича Лямшева, внесшего большой вклад в исследование аэроакустических взаимодействий (см. например[6]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hersh A.S., Walker B., Bucka M.* Effect of grazing flow on the acoustic impedance of Helmholtz resonators consisting of single and clastered orifices // AIAA Paper. 1978. № 78–1125.
2. *Ronnenberger D.* The acoustical impedance of holes in the wall of flow ducts. // J. Sound and Vibr. 1972. V. 24, №. 1. P. 133–150.
3. *Howe M.S.* Edge, cavity and aperture tones at very low Mach numbers. // J. Fluid Mech. 1997. V. 330, P. 61–84.
4. *Миронов М.А.* Импеданс отверстия в экране, отделяющем движущуюся среду от неподвижной // Акуст. журн. 1982. Т. 28. № 4. С. 528–534.
5. *Radavich P.M., Selamet A., Novak J.M.* A computational approach for flow – acoustic coupling in a closed side branches // J. Acoust. Soc. Amer. 2001. V. 109. № 4. P. 1343–1353.
6. *Лямшев Л.М.* Об эоловых тонах // Акуст. журн. 1962. Т. 8. № 1. С. 91–98.

Admittance of a Groove on a Rigid Surface under a Grazing Flow

A. D. Lapin and M. A. Mironov

Andreev Acoustics Institute, Russian Academy of Sciences,
ul. Shvernika 4, Moscow, 117036 Russia
e-mail: mironov@akin.ru

Abstract—The problem of the sound diffraction by a groove on a rigid surface in the presence of a grazing flow is considered.