АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2003, том 49, № 3, с. 405–415

УДК 534.222

ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ В СРЕДАХ С ГИСТЕРЕЗИСНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ. ЧАСТЬ I

© 2003 г. **В. Е. Назаров, А. В. Радостин, Л. А. Островский, И. А. Соустова**

Институт прикладной физики РАН, 603950 Нижний Новгород, Ульянова 46

E-mail: nazarov@hydro.appl.sci-nnov.ru

Поступила в редакцию 4.05.2001 г.

Приведены описание и сравнение двух основных феноменологических моделей гистерезисных уравнений состояния для сред с несовершенной упругостью. В рамках этих уравнений проведено теоретическое исследование нелинейных эффектов, возникающих при распространении непрерывных продольных акустических волн в безграничной среде; определены профили волн, их параметры и спектры. Выявлены характерные отличительные признаки нелинейных волновых процессов в таких средах, способствующие правильному выбору гистерезисного уравнения состояния при аналитическом описании результатов экспериментальных исследований.

1. ВВЕДЕНИЕ

Традиционно описание распространения и взаимодействия акустических волн в различных твердотельных средах проводилось, в основном, в рамках классической 5- (или 9-) константной теории упругости [1, 2]. Эта теория, являясь, по существу, математической, определяет нелинейное (соответственно, в квадратичном или кубичном приближениях) уравнение состояния однородных сред (т.е. зависимость тензора упругих напряжений σ_{ij} от компонент тензора деформаций ε_{ij}). Для продольных напряжений σ и деформаций ε уравнение состояния может быть получено формально из разложения гладкой однозначной и дифференцируемой (т.е. аналитической) функции $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ в ряд Тейлора с точностью до квадратичных (или кубичных) слагаемых по ε:

$$\sigma(\varepsilon) = E\left(\varepsilon - \frac{\gamma}{2}\varepsilon^2 + \ldots\right), \qquad (1)$$

где $E = \left.\frac{\partial\sigma(\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}$ – модуль упругости, $\gamma = -E^{-1}\left.\frac{\partial^2\sigma(\varepsilon)}{\partial\varepsilon^2}\right|_{\varepsilon=0}$ – параметр квадратичной нелинейности, $|\gamma\varepsilon| \ll 1$. Для однородных твердых тел такая нелинейность обусловлена зависимостью межмолекулярных сил от смещения молекул, при этом параметр γ достаточно мал и не превышает 10 [2]. Наиболее простым нелинейным эффектом, возникающим при распространении гармонической волны, является генерация ее высших гармоник. В таких средах (на небольших расстояниях от излучателя – задолго до образования ударного фронта) амплитуда n-й гармоники пропорциональна n-й степени амплитуды первичной волны, распространяющейся с постоянной скоростью и без затухания.

Для описания микронеоднородных сред, к которым, по-видимому, относятся большинство горных пород, а также некоторые металлы и конструкционные материалы (вследствие их сложной структуры и наличия различных микродефектов – трещин, зерен, дислокаций и т.д.), подобный подход не применим. Уравнения состояния таких сред отвечают типу и количеству содержащихся в них дефектов и, как правило, являются неаналитическими (т.е. негладкими и недифференцируемыми). Так, например, наличие в твердом теле трещин может привести к его разномодульности – различию модулей упругости при сжатии и растяжении; зеренная структура материала может изменить степень нелинейности уравнения состояния, в частности, с целого числа 2, как в пятиконстантной теории упругости, на дробное 3/2 [3, 4], одномерные дефекты кристаллической решетки – дислокации, приводят к гистерезисной (т.е. неоднозначной) зависимости $\sigma = \sigma(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$ ($\dot{\varepsilon}$ – скорость деформации) для поликристаллов [5, 6] и т.д., при этом обычно эффективный параметр нелинейности микронеоднородных сред на 3–4 порядка превышает соответствующий параметр однородных сред и материалов. В связи с этим характер нелинейных эффектов при распространении и взаимодействии упругих волн в различных микронеоднородных средах является, вообще говоря, не только количественно, но и качественно различным, что можно использовать для их диагностики и неразрушающего контроля. Этому также способствует и то, что нелинейные акустические свойства таких сред являются более чувствительными и к наличию в них дефектов, чем линейные.

В последнее время в акустике (и сейсмоакустике [7]) для описания нелинейных волновых процессов в различных микронеоднородных средах все чаще применяют уравнения состояния, содержащие гистерезисную нелинейность. В работах [3, 8–14], на основе анализа экспериментально установленных амплитудных зависимостей нелинейных потерь, сдвига резонансных частот и уровней высших гармоник в резонаторах из металлов (меди, цинка, свинца) и горных пород (гранита, мрамора), были предложены гистерезисные уравнения состояния с квадратичной и кубичной нелинейностью. В рамках этих уравнений методом возмущений исследовались нелинейные волновые процессы в безграничной среде и стержневом резонаторе; из сравнения аналитических расчетов с результатами проведенных экспериментов были определены значения параметров гистерезисной нелинейности этих сред. В цикле теоретических и экспериментальных работ [15–18], основные результаты которых изложены в обзоре [19], гистерезисные зависимости были получены в результате численного моделирования поведения среды, содержащей ансамбль элементов Priesach–Mayergoyz [20, 21], обладающих гистерезисом "триггерного" типа. В рамках полученного таким образом гистерезиса (опять же численно) проводилось исследование нелинейного искажения первоначально гармонической волны; из сравнения результатов численного счета с данными экспериментов были определены значения эффективных параметров нелинейности для песчаника, известняка и бетона. В статьях [22–26], на основе и в развитие работ [15, 16], предложено аналитическое (в квадратичном приближении) описание такого гистерезиса и проведено теоретическое исследование распространения и взаимодействия первоначально гармонических волн и треугольных импульсов. Однако в статьях [22, 24, 26] форма гистерезиса определялась одним параметром и была строго симметричной, что скорее соответствует поведению реальных твердых тел при сдвиговой деформации, чем при деформации сжатия и растяжения, а в [23, 25] одинаковыми полагались параметры, определяющие средний наклон гистерезисной петли и ее квадратичную нелинейность; эти, вообще говоря, довольно жесткие условия сильно ограничивают класс описываемых сред.

Гистерезисные свойства характерны для многих микронеоднородных сред, особенно для "мягких" металлов и горных пород, однако было бы неправильно полагать, что для всех таких сред существует универсальное гистерезисное уравнение состояния, отличающееся только численными значениями параметров нелинейности (подобно тому, как линейное деформирование всех однородных и изотропных сред описывается одним законом Гука [1, 2] с различными для различных сред коэффициентами упругости). Нелинейные акустические свойства микронеоднородных сред проявляют (по сравнению с однородными) большое разнообразие, поскольку даже одна и та же такая среда в разных амплитудных и частотных диапазонах может вести себя по-разному. Так, в экспериментах по изучению нелинейных эффектов амплитудно-зависимого внутреннего трения в стержневых акустических резонаторах наблюдались различные степенные зависимости сдвига резонансных частот и нелинейных потерь от амплитуды волны: для неотожженной меди показатель степени был равен 1, а для отожженной – 1/2 [3, 8, 9]; для неотожженного цинка – 1, а для отожженного – 2 [13, 14]; для свинца при малых амплитудах – 2, а при больших 1/2 [12]; для гранита и песчаника – 1 [11, 27, 28], а для мрамора – 2 [11]. В обзоре [19] также отмечалась линейная зависимость сдвига резонансных частот от амплитуды возбуждения резонатора из песчаника, известняка и бетона. Проявление одинаковых зависимостей изменения скорости распространения волны и нелинейных потерь от ее амплитуды свидетельствует о том, что среда обладает гистерезисной нелинейностью. Другим проявлением такой неаналитической нелинейности является одинаковая степенная, с показателем степени гистерезисной нелинейности, зависимость уровня высших гармоник, генерируемых в среде, от амплитуды волны на основной частоте [8–10]; в работах [3, 8, 9, 11, 14] наблюдались именно такие закономерности.

В вышеупомянутых работах [3, 8–19, 22–26] использовались гистерезисы различного типа, и в настоящее время, по-видимому, не существует единого подхода при выборе гистерезисного уравнения состояния для той или иной среды, в связи с чем разработка некоторых принципов, согласно которым такой выбор можно было бы сделать, является актуальной проблемой нелинейной акустики (и сейсмоакустики). Нам представляется, что определенный прогресс здесь может быть связан с изучением и сопоставлением различных нелинейных эффектов, проявляющихся в средах с различными типами гистерезисной нелинейности, поскольку характер нелинейных волновых процессов определяется, главным образом, нелинейностью среды.

В настоящей работе, состоящей из двух частей, теоретически изучаются эффекты нелинейного распространения непрерывных и импульсных продольных акустических волн в средах, уравнение состояния которых обладает гистерезисной нелинейностью. Вначале приводится описание двух основных (в общем случае несимметричных) моделей гистерезисных уравнений состояния, а затем, в рамках этих уравнений, исследуются эволюция и нелинейное искажение непрерывных (Часть I) и импульсных акустичес-

ких волн в безграничной среде и кольцевом резонаторе (Часть II). На основе проведенных исследований выявлены характерные отличительные признаки нелинейных волновых процессов в таких средах, способствующие сделать правильный выбор гистерезисного уравнения состояния при аналитическом описании результатов экспериментальных исследований. При описании таких процессов мы будем предполагать, что нелинейность уравнения состояния среды преобладает над кинематической нелинейностью уравнений движения и последней можно пренебречь. В этом приближении можно считать, что $\varepsilon = U$, $\rho = \text{const}$ (U – продольное смещение, ρ – плотность), при этом уравнения теории упругости в лагранжевой и эйлеровой формах совпадают.

2. ГИСТЕРЕЗИСНЫЕ УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ СРЕД С НЕСОВЕРШЕННОЙ УПРУГОСТЬЮ

Существует довольно много феноменологических уравнений состояния сред с гистерезисной нелинейностью; их подробное описание приведено в работах [29–31]. Впервые аналитическое описание механического гистерезиса для объяснения амплитудно-зависимого внутреннего трения материалов с так называемой несовершенной упругостью было предложено Давиденковым в 1938 году [32]; само внутреннее трение связывалось с микропластической деформацией материала. В 1956 году Гранато и Люкке на основе струнной модели дислокации Келера [33] разработали физическую теорию амплитудно-зависимого внутреннего трения поликристаллов [5, 6]. В обеих этих теориях уравнение состояния среды содержит гистерезис: площадь петли гистерезиса определяет нелинейные потери, а среднее (по периоду волны) значение производной $\sigma_\varepsilon(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$ – дефект модуля упругости. В различных гистерезисных моделях нелинейные потери и дефект модуля различным образом зависят от амплитуды деформации волны, но часто их отношение r (при относительно малых амплитудах) является постоянной величиной, не зависящей от амплитуды [29–31]. Общей причины гистерезисного поведения различных материалов, по-видимому, не существует, однако установлено, что для поликристаллов гистерезис связан с отрывом дислокаций от примесных атомов [5, 6, 34]. (Впервые идею о дефектах кристаллической решетки как причине механического гистерезиса выдвинул Прандтль еще в 1913 году [35], а в 1940 году Рид экспериментально доказал, что пластическая деформация влияет на амплитудно-зависимое внутреннее трение металлов и объяснил это явление на основе движения дислокаций [36].) Теория Гранато–Люкке качественно (а иногда и количественно) достаточно хорошо объясняет результаты экспериментальных исследований амплитудных зависимостей нелинейных потерь и дефекта модуля упругости лишь в некоторых достаточно чистых поликристаллах, поэтому для описания нелинейных эффектов в других твердых телах с несовершенной упругостью используются феноменологические гистерезисные уравнения.

В настоящей работе мы будем использовать наиболее простые зависимости $\sigma = \sigma(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$, отражающие основные и характерные особенности гистерезиса, проявляющегося в некоторых металлах и горных породах, например, неотожженных меди [3, 8, 9] и цинке [18], граните [11], песчанике [19, 27, 28] и известняке [19]:

– каждая ветвь гистерезиса является квадратичной функцией деформации;

– переход с одной ветви на другую происходит при смене знака ε и (или) $\dot{\varepsilon}$, при этом функция $\sigma = \sigma(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$ – непрерывна;

– для бесконечно малых деформаций гистерезисная нелинейность пренебрежимо мала;

– отношение r нелинейного декремента затухания к дефекту модуля упругости (при малых амплитудах деформации) является постоянной величиной.

Следует заметить, что первая из отмеченных выше особенностей не является универсальной и общей для всех твердых тел, в которых механический гистерезис проявляется, поскольку для мрамора [11], свинца [12] и отожженного цинка [13, 14] каждая ветвь гистерезиса является не квадратичной, а кубичной функцией деформации; этот случай здесь не рассматривается.

В общем случае уравнение состояния среды можно представить в виде

$$\sigma(\varepsilon, \dot{\varepsilon}) = E[\varepsilon - f(\varepsilon, \dot{\varepsilon})], \tag{2}$$

где $f(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$ – нелинейная функция деформации и скорости деформации, $|f_\varepsilon(\varepsilon, \dot{\varepsilon})| \ll 1$. (Отметим, что в уравнениях состояния (1), (2) необходимо учитывать и линейное диссипативное слагаемое $\eta\dot{\varepsilon}$ [1, 2], однако, вследствие того, что не оно определяет характер нелинейных волновых процессов, мы, считая его достаточно малым, будем им пренебрегать, при этом полученные ниже формулы будут справедливы на расстояниях $x \ll L_0 = 2C_0^3/\eta\omega^2$, где η – коэффициент вязкости среды, C_0 – скорость продольной волны малой амплитуды, ω – частота волны.)

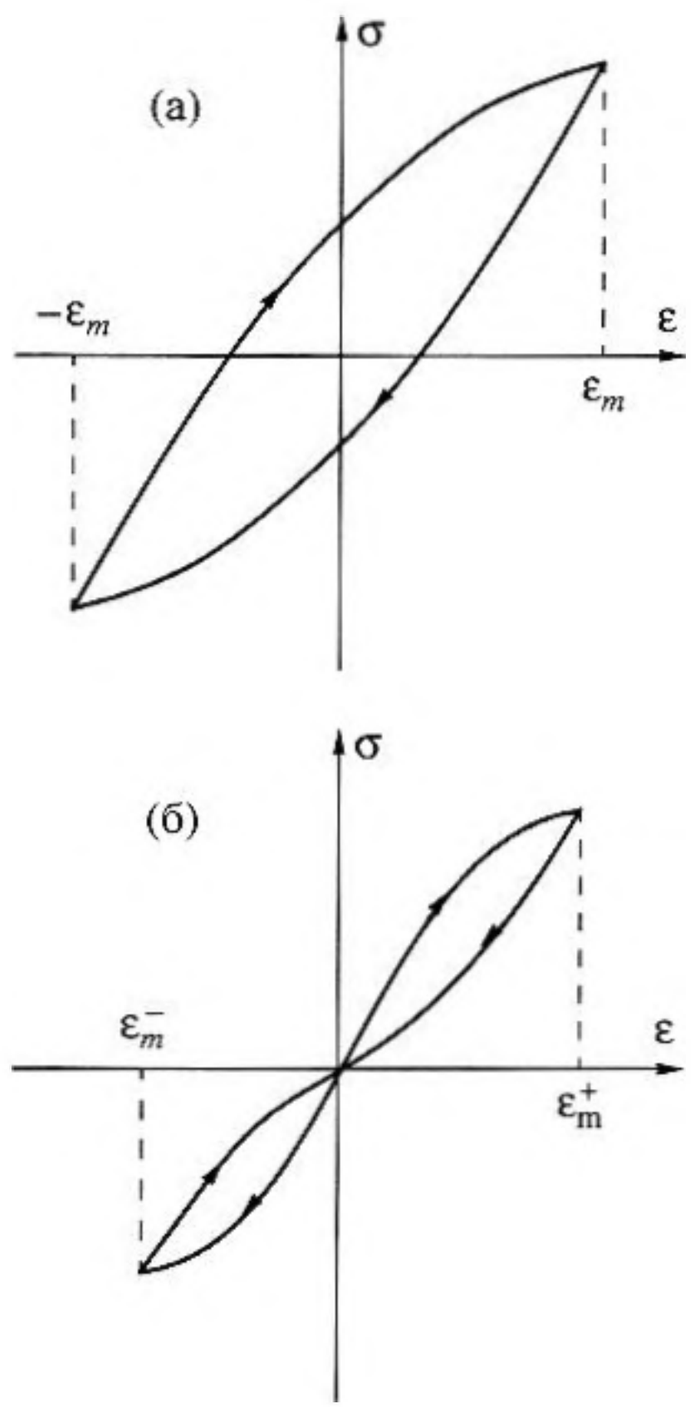

Рис. 1. Зависимость $\sigma = \sigma(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$ для среды с неупругим (а) и упругим (б) гистерезисом.

В первой модели гистерезиса нелинейная функция имеет вид:

$$f(\varepsilon, \dot{\varepsilon}) = \alpha\varepsilon_m\varepsilon + \begin{cases} \dfrac{\beta_1}{2}\varepsilon^2 - \dfrac{\beta_1 + \beta_2}{4}\varepsilon_m^2, & \dot{\varepsilon} > 0; \\ -\dfrac{\beta_2}{2}\varepsilon^2 + \dfrac{\beta_1 + \beta_2}{4}\varepsilon_m^2, & \dot{\varepsilon} < 0, \end{cases} \tag{3}$$

где $|\alpha|\varepsilon_m \ll 1$, $|\beta_{1,2}|\varepsilon_m \ll 1$, $|\beta_{1,2}| \gg 1$. В этом уравнении содержится три независимых параметра нелинейности α и $\beta_{1,2}$, ответственных за дефект модуля упругости и нелинейные потери. Вообще говоря, нелинейности первого и второго слагаемых в уравнении (3) могут быть также независимыми, однако для того, чтобы отношение r (при малых амплитудах деформации) не зависело от амплитуды волны ε_m, необходимо положить, чтобы степень первого слагаемого была равна степени гистерезисной нелинейности, т.е. равна 2. Легко видеть, что при $\alpha = 0$ и $\beta_1 + \beta_2 = 0$ дефект модуля упругости и нелинейные потери равны нулю и уравнения (3) описывают квадратичную нелинейность, как и пятиконстантная теория упругости. Из уравнения (3) следует, что при $\beta_1 + \beta_2 \neq 0$ нулевым напряжениям (деформациям) соответствуют ненулевые деформации (напряжения). Обычно ненулевые деформации называются микропластическими, а ненулевые напряжения – остаточными. В соответствии с этой терминологией первый гистерезис (рис. 1а) мы будем называть неупругим. Гистерезис такого типа был предложен Давиденковым [32]; он наблюдался в экспериментах по статическому деформированию австралийского песчаника, южно-африканского кварцита [37], кристаллов LiF и NaCl [38–41] и использовался для описания амплитудно-зависимого внутреннего трения (декремента и дефекта модуля) в этих кристаллах.

Во второй модели гистерезиса нелинейная функция имеет вид:

$$f(\varepsilon, \dot{\varepsilon}) = \begin{cases} \dfrac{\gamma_1}{2}\varepsilon^2, & \varepsilon > 0, \quad \dot{\varepsilon} > 0; \\ -\dfrac{\gamma_2}{2}\varepsilon^2 + \dfrac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}\varepsilon_m^+\varepsilon, & \varepsilon > 0, \quad \dot{\varepsilon} < 0; \\ -\dfrac{\gamma_3}{2}\varepsilon^2, & \varepsilon < 0, \quad \dot{\varepsilon} < 0; \\ \dfrac{\gamma_4}{2}\varepsilon^2 + \dfrac{\gamma_3 + \gamma_4}{2}\varepsilon_m^-\varepsilon, & \varepsilon < 0, \quad \dot{\varepsilon} > 0, \end{cases} \tag{4}$$

где $|\gamma_{1,2}\varepsilon_m^+| \ll 1$, $|\gamma_{3,4}\varepsilon_m^-| \ll 1$, $|\gamma_{1-4}| \gg 1$, $\varepsilon_m^+ > 0$, $\varepsilon_m^- < 0$. В этой модели содержится четыре параметра нелинейности γ_{1-4}, в зависимости от их соотношения уравнения (2), (4) описывают широкий класс сред: при $\gamma_1 = -\gamma_2 = -\gamma_3 = \gamma_4$ имеем уравнение (1); при $\gamma_{2,4} = 0$ получаем уравнение с линейным возвратом (как и в модели Гранато–Люкке [5, 30]). Для такой среды (при малых амплитудах волны) и декремент затухания, и дефект модуля пропорциональны амплитуде волны, поэтому автоматически $r = \text{const}$ [10]. В этой модели нулевым напряжениям соответствуют нулевые деформации и наоборот, поэтому второй гистерезис (рис. 1б) мы будем называть упругим. Такой гистерезис был предложен в работе [10] и использовался для описания результатов экспериментальных исследований нелинейных акустических эффектов в стержневых резонаторах из поликристаллических металлов и горных пород [3, 11–14].

В уравнениях (3), (4) величины ε_m и $\varepsilon_m^{\pm}$, в отличие от параметров α, $\beta_{1,2}$ и γ_{1-4}, не являются характеристиками среды, а определяются максимальной и минимальной ее деформациями. В первой модели гистерезиса его ветви зависимы, поэтому ε_m – это амплитуда волны ($\varepsilon_m > 0$). Во второй модели гистерезиса его положительные ($\varepsilon > 0$) и отрицательные ($\varepsilon < 0$) ветви задаются не-

зависимо, поэтому величины $|\varepsilon_m^{\pm}|$ являются, вообще говоря, различными, т.е. $\varepsilon_m^+ \neq -\varepsilon_m^-$. (Значения ε_m^+ и ε_m^- соответствуют амплитудам положительного и отрицательного полупериодов волны.) Для неупругого гистерезиса нелинейная функция неаналитична в двух точках: $\varepsilon = \varepsilon_m$ и $\varepsilon = -\varepsilon_m$, а для упругого гистерезиса – в трех: $\varepsilon = \varepsilon_m^+$, $\varepsilon = \varepsilon_m^-$ и $\varepsilon = 0$. Отметим также, что в гистерезисных моделях положительным нелинейным потерям отвечает движение рабочей точки на диаграммах $\sigma = \sigma(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$ по часовой стрелке. Это соответствует тому, что сумма параметров нелинейности должна удовлетворять неравенствам: $\beta_1 + \beta_2 > 0$ и $\gamma_{1,3} + \gamma_{2,4} > 0$. Кроме этих неравенств, мы пока не будем накладывать никаких других условий на параметры α, $\beta_{1,2}$, γ_{1-4} и будем считать их различными, что отражает асимметрию диаграммы деформирования твердого тела при его сжатии и растяжении. Наличие такой асимметрии подтверждается, в частности, результатами экспериментальных исследований амплитудно-зависимого внутреннего трения в некоторых металлах и горных породах. Так, например, для поликристаллической меди (в зависимости от ее зеренной структуры, изменяющейся при отжиге) значения параметров $\gamma_1 + \gamma_3$ и $\gamma_2 + \gamma_4$ изменялись соответственно от 6.6×10^2 и 1.8×10^3 до 1.9×10^4 и 1.5×10^5 [3], для неотожженного поликристаллического цинка те же параметры составляли 6.3×10^3 и 2.6×10^4 [14], а для гранита – 9.2×10^3 и 7×10^3 [11]. Столь сильные (в несколько раз) отличия параметров $\gamma_1 + \gamma_3$ и $\gamma_2 + \gamma_4$ свидетельствует о значительном различии параметров γ_{1-4}. Далее, несмотря на то, что в обеих моделях гистерезисов содержатся лишь линейные и квадратичные по деформации слагаемые, нелинейная функция $f = f(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$ является функцией общего вида, т.е. содержит как четную, так и нечетную составляющие, одинаково (в данном случае квадратично) зависящие от деформации. Это приводит к тому, что (на малых расстояниях от излучателя, где нелинейное затухание первичной волны еще не существенно) амплитуды всех ее высших гармоник (как четных, так и нечетных) пропорциональны квадрату амплитуды деформации первичной гармонической волны [10]. (Для сред с кубичной гистерезисной нелинейностью амплитуды высших гармоник (на таких же расстояниях) пропорциональны кубу амплитуды деформации первичной волны; этот отличительный признак позволяет легко определить показатель степени нелинейности гистерезисного уравнения состояния [3, 11–14].)

Приведенные гистерезисные уравнения существенно отличаются друг от друга: второе уравнение нельзя получить из первого, а первое – из второго, и, кроме того, первое уравнение, в отличие от второго, не является эволюционным. Это, в частности, проявляется в том, что в неупругом гистерезисе обе его ветви зависят от амплитуды деформации ε_m, чего не должно быть, поскольку при этом остаточное напряжение определяется амплитудой ε_m волны, а это нарушает принцип причинности – до воздействия на среду "она уже знает", какова будет амплитуда деформации и с какой скоростью в ней будет распространяться волна. Поэтому первое гистерезисное уравнение можно применять лишь для описания установившихся периодических волн, а для описания переходных процессов и распространения однополярных импульсов (или возмущений) оно не пригодно. Тем не менее, здесь мы, помня об ограниченной применимости первого уравнения, исследуем распространение как непрерывных волн, так и импульсных возмущений в рамках обоих гистерезисных уравнений, а затем, с целью выявления качественных закономерностей и отличий нелинейных акустических эффектов в таких средах, проведем сравнительный анализ полученных результатов.

3. УПРУГИЕ ВОЛНЫ В БЕЗГРАНИЧНОЙ СРЕДЕ

Гистерезисные уравнения состояния (2)–(4) совместно с уравнением движения [42–44]

$$\rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma(\varepsilon, \dot{\varepsilon})}{\partial x} \tag{5}$$

позволяют исследовать нелинейные волновые процессы в средах с несовершенной упругостью. При решении этих уравнений мы будем пользоваться методом сращивания (или "сшивания") простых волн, отвечающих каждой ветви гистерезиса; такой метод был предложен в [45] и затем развит в работах [22–26]. Подставляя (2)–(4) в (5) и переходя к переменным $\tau = t - x/C_0$, $x = x$, получим уравнение для волн, бегущих в положительном направлении оси x [42–44]:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = -\frac{1}{2C_0}\frac{\partial f(\varepsilon, \dot{\varepsilon})}{\partial \tau}, \tag{6}$$

где $C_0 = (E/\rho)^{1/2}$. Это уравнение описывает простые волны деформации для каждой ветви гистерезиса; для первоначально гармонической волны

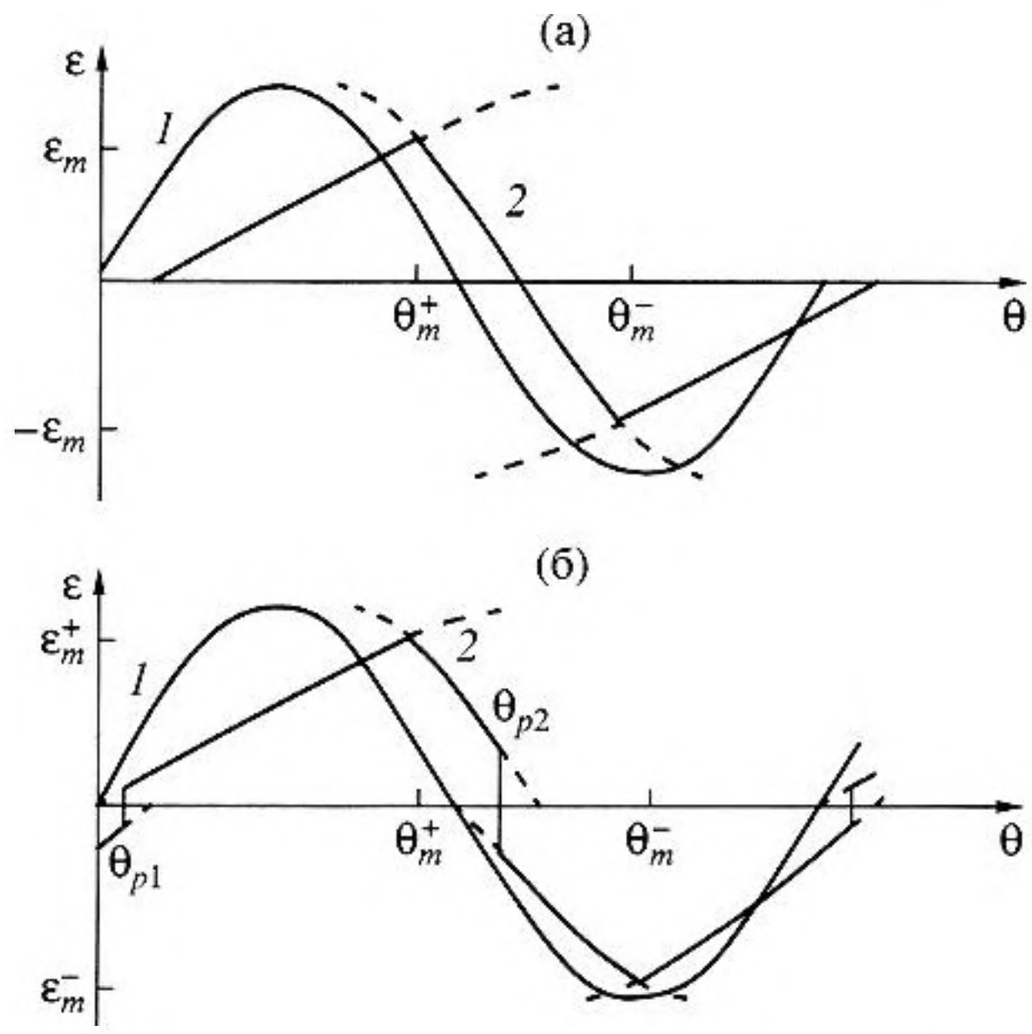

Рис. 2. Эволюция первоначально гармонической волны в среде с неупругим (а) и упругим (б) гистерезисом ($1 - x = 0$, $2 - x > 0$).

$\varepsilon(x = 0, t) = \varepsilon_0 \sin\omega t$ его решение (для первой и второй моделей гистерезиса) имеет вид:

$$\varepsilon(x, \theta) = \varepsilon_0 \begin{cases} \sin\left(\theta - \dfrac{\beta_1}{2}\varepsilon kx - \dfrac{\alpha}{2}k\displaystyle\int_0^x \varepsilon_m(x')dx'\right), & \dot\varepsilon > 0; \\ \sin\left(\theta + \dfrac{\beta_2}{2}\varepsilon kx - \dfrac{\alpha}{2}k\displaystyle\int_0^x \varepsilon_m(x')dx'\right), & \dot\varepsilon < 0; \end{cases} \tag{7}$$

$$\varepsilon(x, \theta) = \varepsilon_0 \begin{cases} \sin\left(\theta - \dfrac{\gamma_1}{2}\varepsilon kx\right), & \varepsilon > 0, \quad \dot\varepsilon > 0; \\ \sin\left(\theta + \dfrac{\gamma_2}{2}\varepsilon kx - \dfrac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}k\displaystyle\int_0^x \varepsilon_m^+(x')dx'\right), & \\ \varepsilon > 0, \quad \dot\varepsilon < 0; & \\ \sin\left(\theta + \dfrac{\gamma_3}{2}\varepsilon kx\right), & \varepsilon < 0, \quad \dot\varepsilon < 0; \\ \sin\left(\theta - \dfrac{\gamma_4}{2}\varepsilon kx - \dfrac{\gamma_3 + \gamma_4}{2}k\displaystyle\int_0^x \varepsilon_m^-(x')dx'\right), & \\ \varepsilon < 0, \quad \dot\varepsilon > 0, & \end{cases} \tag{8}$$

где $\theta = \omega\tau$, $k = \omega/C_0$.

На рис. 2а,б изображены профили простых волн, описываемых уравнениями (7), (8), на некотором расстоянии x от излучателя. Из этих рисунков видно, что на каждом периоде в волне образуются неоднозначности (вследствие неаналитичности нелинейных функций (3), (4)) вблизи точек $\varepsilon = \pm\varepsilon_m$ для первой модели гистерезиса и $\varepsilon = \varepsilon_m^\pm$, $\varepsilon = 0$ – для второй). Для второй модели существует два вида неоднозначностей: первый – вблизи точек $\varepsilon = \varepsilon_m^\pm$, где так же, как и в первой модели (при $\varepsilon = \pm\varepsilon_m$), простые волны пересекаются, и второй – вблизи точек $\varepsilon = 0$, где происходит наложение простых волн. Устранение неоднозначностей, связанных с наложением простых волн, осуществляется введением в профиль волны разрывов, определяемых из закона сохранения импульса [42–44]. Поскольку в среде, описываемой уравнением (1), разрывы в профиле волны при $\gamma > 0$ образуются на "заднем" фронте ($\dot\varepsilon < 0$), а при $\gamma < 0$ – на "переднем" ($\dot\varepsilon > 0$), то для первой модели гистерезиса в случае $\beta_{1,2} \geq 0$ (который в основном мы и будем рассматривать) разрывов в волне не образуется вообще, а неоднозначности вблизи точек пересечения простых волн устраняются их "сшиванием" в этих точках. Из уравнения (7) нетрудно определить значения амплитуды волны $\varepsilon_m(x)$ и фаз $\theta_m^\pm(x)$, соответствующих точкам пересечения простых волн (рис. 2а):

$$\varepsilon_m(x) = \varepsilon_0 \cos\left[\frac{(\beta_1 + \beta_2)\varepsilon_m(x)kx}{4}\right],$$

$$\theta_m^+(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{\beta_1 - \beta_2}{4}\varepsilon_m kx + \frac{\alpha}{2}k\int_0^x \varepsilon_m(x')dx', \tag{9}$$

$$\theta_m^-(x) = \frac{3\pi}{2} - \frac{\beta_1 - \beta_2}{4}\varepsilon_m kx + \frac{\alpha}{2}k\int_0^x \varepsilon_m(x')dx'.$$

Рассмотрим асимптотический профиль волны (7) на малых и на больших расстояниях от излучателя. Из уравнений (7), (9) следует, что при $x \ll x_0 = 4/(\beta_1 + \beta_2)\varepsilon_0 k$ форма волны близка к исходной, и $\varepsilon_m \cong \varepsilon_0$, а при $x \geq x_0$ профиль волны становится треугольным:

$$\varepsilon(x, \theta) = \varepsilon_0 \begin{cases} \dfrac{\theta - \dfrac{\pi\alpha}{\beta_1 + \beta_2}\ln\left(1 + \dfrac{\beta_1 + \beta_2}{4}\varepsilon_0 kx\right)}{1 + \beta_1\varepsilon_0 kx/2}, & \\ \theta_m^- - 2\pi \leq \theta < \theta_m^+, & \\ \dfrac{\pi - \theta + \dfrac{\pi\alpha}{\beta_1 + \beta_2}\ln\left(1 + \dfrac{\beta_1 + \beta_2}{4}\varepsilon_0 kx\right)}{1 + \beta_2\varepsilon_0 kx/2}, & \\ \theta_m^+ \leq \theta < \theta_m^-. & \end{cases} \tag{10}$$

Амплитуда и скорость распространения такой волны определяются выражениями:

$$\varepsilon_m(x) = \frac{2\pi\varepsilon_0}{4 + (\beta_1 + \beta_2)\varepsilon_0 kx} \ll \varepsilon_0,$$
$$C(x) = \frac{C_0}{1 + \alpha\varepsilon_m(x)/2}. \quad (11)$$

Таким образом, на больших расстояниях от излучателя ($x \gg x_0$) первоначально гармоническая волна в среде с неупругим гистерезисом трансформируется в волну треугольного профиля с амплитудой ε_m, не зависящей от начальной амплитуды и убывающей по закону $\varepsilon_m(x) \sim x^{-1}$.

Интересно проследить за эволюцией спектра волны. На малых расстояниях имеем:

$$\varepsilon(x, \theta) = \left(1 - \frac{\beta_1 + \beta_2}{3\pi}\varepsilon_0 kx\right)\left[\varepsilon_0 \sin(\theta - \alpha\varepsilon_0 kx/2) - \right.$$
$$- \frac{\beta_1 - \beta_2}{8}\varepsilon_0^2 kx \sin 2(\theta - \alpha\varepsilon_0 kx/2) + \frac{\beta_1 + \beta_2}{\pi}\varepsilon_0^2 kx \times \quad (12)$$
$$\left. \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)(2n-3)} \sin(2n+1)(\theta - \alpha\varepsilon_0 kx/2)\right],$$

при этом декремент затухания δ и относительное изменение скорости волны $\Delta C/C_0$ определяются выражениями:

$$\delta = \frac{2(\beta_1 + \beta_2)}{3}\varepsilon_0, \quad \frac{\Delta C}{C_0} = \frac{\alpha}{2}\varepsilon_0. \quad (13)$$

На больших расстояниях ($x \gg x_0$) получаем:

$$\varepsilon(x, \theta) =$$
$$= \frac{4(\beta_1 + \beta_2)}{\pi\beta_1\beta_2 kx} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{\pi n \beta_1}{\beta_1 + \beta_2}\right) \sin n\left[\theta - \frac{\pi\alpha}{(\beta_1 + \beta_2)kx}\right], \quad (14)$$

$$\delta = (\beta_1 + \beta_2)\varepsilon_m, \quad \frac{\Delta C}{C_0} = \frac{\alpha}{2}\varepsilon_m. \quad (15)$$

Из уравнения (14) следует, что относительный уровень ζ первой гармоники в треугольной волне определяется выражением

$$\zeta = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_m} = \frac{2(1 + \beta_1/\beta_2)^2}{\pi^2} \cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{1 - \beta_2/\beta_1}{1 + \beta_2/\beta_1}\right). \quad (16)$$

Отметим, что при $\beta_1 < 0$ (или $\beta_2 < 0$), но $\beta_1 + \beta_2 \geq 0$ в волне образуются разрыв на переднем (или заднем) фронте соответственно в точке $\varepsilon = 0$ на расстоянии $x^* = 2/|\beta_{1,2}|\varepsilon_0 k$. В этом случае выражения (9) будут справедливы до координаты $x_1 = x^*(\chi/\sin\chi) > x^*$, $\chi = \pi|\beta_{1,2}|/(|\beta_{1,2}| + |\beta_{2,1}|)$ – на этом расстоянии амплитуда разрыва становится равной амплитуде волны. На больших расстояниях волна будет содержать разрывы, амплитуда которых определяется выражением $\varepsilon_m(x) = 2\pi/|\beta_{1,2}|kx$.

Определим теперь форму волны и ее параметры в среде с упругим гистерезисом, при этом, для упрощения расчетов, мы будем полагать, что $\gamma_{1-4} > 0$. Здесь первый вид неоднозначностей также устраняется "сшиванием" простых волн в точках их пересечения. Из уравнений (8) получаем:

$$\pi \mp 2\arcsin\left(\frac{\varepsilon_m^{\pm}}{\varepsilon_0}\right) \mp \frac{\gamma_{1,3} + \gamma_{2,4}}{4}\varepsilon_m^{\pm} kx \pm$$
$$\pm \frac{\gamma_{1,3} + \gamma_{2,4}}{4} k \int_0^x \varepsilon_m^{\pm}(x')dx' = 0.$$

Из этого уравнения находим:

$$\left|\varepsilon_m^{\pm}(x)\right| = \sqrt{\frac{\sqrt{1 + 4\mu_{\pm}^2\varepsilon_0^2} - 1}{2\mu_{\pm}^2}},$$

$$\theta_m^{+}(x) = \arcsin\left(\frac{\varepsilon_m^{+}}{\varepsilon_0}\right) + \frac{\gamma_1}{2}\varepsilon_m^{+} kx, \quad (17)$$

$$\theta_m^{-}(x) = \pi + \arcsin\left|\frac{\varepsilon_m^{-}}{\varepsilon_0}\right| + \frac{\gamma_3}{2}\left|\varepsilon_m^{-}\right| kx,$$

где $\mu_{\pm} = (\gamma_{1,3} + \gamma_{2,4})kx/8$.

Из первого уравнения (17) следует, что так же, как и в среде с неупругим гистерезисом, на малых расстояниях от излучателя ($x \ll x_0 = \min[4/(\gamma_1 + \gamma_2)\varepsilon_0 k;\ 4/(\gamma_3 + \gamma_4)\varepsilon_0 k]$) выполняется соотношение $\left|\varepsilon_m^{\pm}(x)\right| \cong \varepsilon_0$, однако на больших ($x \gg x_0$) – амплитуда волны уменьшается иначе: $\left|\varepsilon_m^{\pm}(x)\right| = \sqrt{\varepsilon_0/\mu_{\pm}} \sim (\varepsilon_0/x)^{1/2}$.

Неоднозначности второго вида устраним введением в профиль волны разрывов, определяемых из условия равенства отсекаемых этим разрывом площадей под кривой $\varepsilon = \varepsilon(x, \theta)$ при $\varepsilon > 0$ и $\varepsilon < 0$ (рис. 2б) [42–44]. Поскольку (при $\gamma_{1-4} > 0$) на малых и больших расстояниях от излучателя выполняются соотношения $\left|\varepsilon_{p1,2}^{\pm}(x)\right| \ll \varepsilon_0$, то для нахождения амплитуд $\varepsilon_{p1,2}^{\pm}(x)$ и фаз $\theta_{p1,2}(x)$ разрывов воспользуемся приближенным выражением для $\varepsilon = \varepsilon(x, \theta)$, следующим из уравнения (8) и спра-

ведливым вблизи разрывов на любых расстояниях и вне их – на больших расстояниях:

$$\varepsilon(x,\theta) = \varepsilon_0\begin{cases}\dfrac{\theta}{1+\dfrac{\gamma_1}{2}\varepsilon_0 kx}, & \theta_{p1}\le\theta<\theta_m^+;\\[2ex] \dfrac{\pi-\theta+\theta_+^*}{1+\dfrac{\gamma_2}{2}\varepsilon_0 kx}, & \theta_m^+\le\theta<\theta_{p2};\\[2ex] \dfrac{\pi-\theta}{1+\dfrac{\gamma_3}{2}\varepsilon_0 kx}, & \theta_{p2}\le\theta<\theta_m^-;\\[2ex] \dfrac{\theta-2\pi-\theta_-^*}{1+\dfrac{\gamma_4}{2}\varepsilon_0 kx}, & \theta_m^-\le\theta<2\pi+\theta_{p1};\end{cases} \tag{18}$$

где $\theta_\pm^*(x) = 4\mu_\pm\left|\varepsilon_m^\pm(x)\right| + 2\arcsin\left|\dfrac{\varepsilon_m^\pm(x)}{\varepsilon_0}\right| - \pi.$

Из условия равенства площадей, отсекаемых разрывами под кривой $\varepsilon = \varepsilon(x,\theta)$ в точках разрывов $\theta_{p1,2}(x)$, находим:

$$\varepsilon_{p1}^+(x) = \frac{\varepsilon_0\theta_-^*(x)}{(1+\mu_1)\left(1+\dfrac{\gamma_1}{2}\varepsilon_0 kx\right)},$$

$$\varepsilon_{p1}^-(x) = -\mu_1\frac{\varepsilon_0\theta_-^*(x)}{(1+\mu_1)\left(1+\dfrac{\gamma_4}{2}\varepsilon_0 kx\right)},$$

$$\theta_{p1}(x) = \frac{\theta_-^*(x)}{1+\mu_1},$$

$$\varepsilon_{p2}^+(x) = \mu_2\frac{\varepsilon_0\theta_+^*(x)}{(1+\mu_2)\left(1+\dfrac{\gamma_2}{2}\varepsilon_0 kx\right)}, \tag{19}$$

$$\varepsilon_{p2}^-(x) = -\frac{\varepsilon_0\theta_+^*(x)}{(1+\mu_2)\left(1+\dfrac{\gamma_3}{2}\varepsilon_0 kx\right)},$$

$$\theta_{p2}(x) = \pi + \frac{\theta_+^*(x)}{1+\mu_2},$$

где $\mu_{1,2} = \sqrt{\dfrac{1+\gamma_{4,2}\varepsilon_0 kx/2}{1+\gamma_{1,3}\varepsilon_0 kx/2}}.$

Таким образом, на больших расстояниях в среде с упругим гистерезисом положительный и отрицательный полупериоды первоначально гармонической волны приобретают форму "пятиугольников" с амплитудами, убывающими по закону $\left|\varepsilon_m^\pm(x)\right| \sim (\varepsilon_0/x)^{1/2}$.

Рассмотрим спектральный состав волны. На малых расстояниях, аналогично (12), имеем:

$$\varepsilon(x,\theta) = \left(1-\frac{a_1\varepsilon_0 kx}{2\pi}\right)\Bigg[\varepsilon_0\sin(\theta-b_1\varepsilon_0 kx) + \varepsilon_0^2 kx\sum_{n=2}^{\infty} n\sqrt{a_n^2+b_n^2}\sin[n(\theta-b_1\varepsilon_0 kx)+\Psi_n]\Bigg], \tag{20}$$

$$\delta = a_1\varepsilon_0, \quad \Delta C/C_0 = b_1\varepsilon_0, \tag{21}$$

где

$$a_1 = \frac{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4}{12}, \quad b_1 = \frac{1}{6\pi}\left\{\gamma_1-\gamma_2+\gamma_3-\gamma_4+\frac{3\pi}{8}(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4)\right\},$$

$$a_2 = \frac{1}{12\pi}\left\{\gamma_1+\gamma_2-\gamma_3-\gamma_4+\frac{3\pi}{8}(\gamma_1-\gamma_2-\gamma_3+\gamma_4)\right\}, \quad b_2 = \frac{\gamma_1+\gamma_2-\gamma_3-\gamma_4}{24\pi},$$

$$a_n = \frac{\gamma_1+\gamma_2-(-1)^n(\gamma_3+\gamma_4)}{4\pi}\left\{\frac{(n^2-2)\sin\dfrac{\pi n}{2}}{(n^2-4)n} - \frac{(-1)^n+n\sin\dfrac{\pi n}{2}}{n^2-1}\right\},$$

$$b_n = \frac{2(n^2-1)[\gamma_1+(-1)^n(\gamma_2-\gamma_3)-\gamma_4]+[\gamma_1+\gamma_2-(-1)^n(\gamma_3+\gamma_4)]\cos\dfrac{\pi n}{2}}{4\pi n(n^2-1)(n^2-4)}, \quad \operatorname{tg}\Psi_n = \frac{a_n}{b_n}, \quad n>2.$$

На больших расстояниях (при $\gamma_1 = \gamma_4$, $\gamma_2 = \gamma_3$, когда $\mu_+ = \mu_-$ и $\varepsilon_m^+ = |\varepsilon_m^-| = \varepsilon_m$) получаем:

$$\varepsilon(x, \theta) = \frac{2}{\pi\gamma_1\gamma_2}\sqrt{\frac{2(\gamma_1+\gamma_2)\varepsilon_0}{kx}}\times \times\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\gamma_2-(-1)^n\gamma_1}{n}\sin n[\theta-\mu_+\varepsilon_m(x)], \quad (22)$$

$$\delta = \frac{\pi(\gamma_1+\gamma_2)\varepsilon_m^2}{2}\frac{}{\varepsilon_0}, \quad \frac{\Delta C}{C_0} = \frac{\gamma_1+\gamma_2}{8}\varepsilon_m. \quad (23)$$

Из уравнения (22) следует, что относительный уровень первой гармоники в такой волне определяется простым выражением:

$$\zeta = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_m} = \frac{1}{\pi}\frac{(\gamma_1+\gamma_2)^2}{\gamma_1\gamma_2}. \quad (24)$$

Выражения (16), (24) потребуются во второй части работы для нахождения амплитуды установившейся волны в кольцевом резонаторе.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Из сравнения выражений (12), (13) и (20), (21) видно, что на малых расстояниях декремент затухания, изменение скорости волны и амплитуда второй гармоники для обеих моделей гистерезисов определяются похожими выражениями и, следовательно, на основании измерения этих характеристик можно сделать вывод только о том, что среда обладает (или не обладает) гистерезисной нелинейностью, но однозначно указать вид гистерезиса (без привлечения каких-либо других физических соображений), вообще говоря, нельзя. Тем не менее, небольшие отличия здесь все же существуют, они проявляются в профилях волн: в среде с неупругим гистерезисом в волне разрывов нет, а в среде с упругим гистерезисом на периоде волны есть два разрыва. Эти отличия приводят к различному спектральному составу волны: в среде с неупругим гистерезисом отсутствуют четные гармоники выше второй, а в среде с упругим – они имеются.

Из уравнений (12), (13) следует, что для определения трех независимых параметров нелинейности α и $\beta_{1,2}$ неупругого гистерезиса необходимо провести измерения, по крайней мере, трех независимых характеристик волны – декремента затухания, относительного изменения скорости и амплитуды второй гармоники, при этом амплитуды более высоких гармоник будут однозначно определяться этими величинами. С другой стороны, по измеренной в эксперименте амплитуде одной из этих высших гармоник (например, третьей) можно также независимо определить значение параметра $\beta_1 + \beta_2$, уже найденного ранее из измерения декремента затухания. Из сравнения значений $\beta_1 + \beta_2$, полученных в результате этих двух независимых измерений, можно сделать вывод о пригодности – если они получились близкими (или непригодности – если их значения различны), неупругого гистерезиса для описания исследуемой среды.

Из уравнений (20), (21) следует, что для определения четырех независимых параметров нелинейности $\gamma_{1\text{–}4}$ упругого гистерезиса необходимо провести измерения не менее четырех независимых характеристик волны на заданном расстоянии x – декремента затухания, относительного изменения скорости, амплитуды четной (например, второй) гармоники и ее фазы Ψ_2 (относительно второй гармоники для волны основной частоты, принятой на этом же расстоянии x), при этом амплитуды более высоких гармоник и их фазы Ψ_n (относительно фазы n-й гармоники для волны основной частоты на том же расстоянии) будут однозначно определяться этими величинами. (Фазу второй гармоники в среде следует определять относительно фазы второй гармоники для принятой волны на основной частоте – для этого принятую волну основной частоты следует возвести в квадрат и выделить в нем вторую "аппаратурную" гармонику, после чего фазу волны на второй гармонике в среде сравнивать с фазой этой "аппаратурной" второй гармоники).

По измеренным в эксперименте амплитудам и фазам высших гармоник можно независимо определить значения параметров a_n и b_n, а по ним – значения параметров a_1 и b_1. Из сравнения значений a_1и b_1, полученных в результате двух пар независимых измерений, можно также сделать вывод о пригодности (или непригодности) упругого гистерезиса для описания среды. Подобная процедура уже применялась при аналитическом описании нелинейных акустических эффектов в стержневых резонаторах из металлов и горных пород [3, 8, 9, 11, 14], уравнение состояния которых определялось упругим гистерезисом. В этих работах значения параметров нелинейности, определенные по сдвигу резонансных частот, нелинейным потерям и уровню высших гармоник, находились в хорошем соответствии друг с другом.

Как следует из выражений (14), (15) и (22), (23), качественные отличия, по которым можно указать каким гистерезисом следует описывать среду, проявляются в волне на больших расстояниях $x \ll x_0 \sim (\gamma_0 k\varepsilon_0)^{-1}$, $\gamma_0 = [(\beta_1 + \beta_2)/4, \max\{(\gamma_1 + \gamma_2)/4, (\gamma_3 + \gamma_4)/4\}]$ – эффективный параметр гистерезисной нелинейности. Эти отличия проявляются в форме волны, в различной зависимости декремента затухания от ее амплитуды и в различной зависимости амплитуды волны от начальной амплитуды и расстояния. Следует, однако, заметить, что не во всех средах с гистерезисной нели-

нейностью может реализоваться сильнонелинейный волновой режим. Это связано с тем, что полученные выражения справедливы на расстояниях $x \ll L_0 = 2C_0^3/\eta\omega^2$, а значительные нелинейные искажения волны имеют место на расстояниях $x \geq x_0$, поэтому, строго говоря, для реализации такого режима необходимо выполнение условия $x_0 \ll L_0$, или $\varepsilon_0 \gg \vartheta/2\pi\gamma_0$, где $\vartheta = \pi\eta\omega/C_0^2$ – декремент затухания. Оценки показывают, что, например, для отожженной меди и гранита при $\vartheta \cong 10^{-2}$, $\eta = 1.6 \times 10^2$ см^2/с, $\gamma_0 \cong 10^4$ [3, 11, 46], $\omega \cong 2 \times 10^4$ с$^{-1}$ ($L_0 = 10^4$ см, $x_0 = 1.6 \times 10^3$ см) амплитуда ε_0 должна быть больше величины 2×10^{-7} ($\gamma_0 \mathrm{Re} = 2\gamma_0\rho C_0^2\varepsilon_0/\eta\omega \geq 6 \times 10^2$). Тем не менее, предложенную процедуру определения вида гистерезисного уравнения состояния можно применять и при меньших деформациях и для других твердых тел, у которых декремент затухания ϑ больше, а эффективный параметр нелинейности γ меньше выбранных величин, так как характер нелинейных волновых процессов (амплитудные зависимости нелинейных потерь, изменения скорости волны и уровней высших гармоник) определяется не вязкостью η (или декрементом ϑ) твердого тела, а его нелинейностью.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 01-05-64417, № 00-05-64252).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория упругости. М.: Наука, 1987. 246 с.
2. *Зарембо Л.К., Красильников В.А.* Введение в нелинейную акустику. М.: Наука, 1966.
3. *Назаров В.Е.* Влияние структуры меди на ее акустическую нелинейность // ФММ. 1991. Т. 37. № 1. С. 150–156.
4. *Зайцев В.Ю., Колпаков А.Б., Назаров В.Е.* Детектирование акустических импульсов в речном песке. Эксперимент // Акуст. журн. 1999. Т. 45. № 2. С. 235–241.
5. *Granato A., Lucke K.* Theory of mechanical damping due to dislocations // J. Appl. Phys. 1956. V. 27. № 5. P. 583–593.
6. Ультразвуковые методы исследования дислокаций / Сб. статей под ред. Л.Г. Меркулова. М.: ИИЛ, 1963.
7. *Pavlenko O.V.* Nonlinear seismic effects in soils: Numerical simulation and study // Bull. of the Seismol. Soc. of Amer. 2001. V. 91. № 2. P. 381–396.
8. *Nazarov V.E., Ostrovksy L.A., Soustova I.A., Sutin A.M.* Nonlinear acoustics of micro-inhomogeneous media // Physcis of the Earth ahd Planetary Interiors. 1988. V. 50. № 1. P. 65–73.
9. *Назаров В.Е., Островский Л.А., Соустова И.А., Сутин А.М.* Аномальная акустическая нелинейность в металлах // Акуст. журн. 1988. Т. 34. № 3. С. 491–499.
10. *Назаров В.Е., Сутин А.М.* Генерация гармоник при распространении упругих волн в твердых нелинейных средах // Акуст. журн. 1989. Т. 35. № 4. С. 711–716.
11. *Зименков С.В., Назаров В.Е.* Нелинейные акустические эффекты в образцах горных пород // Физика Земли. 1993. № 1. С. 13–18.
12. *Назаров В.Е.* Амплитудно-зависимое внутреннее трение свинца // ФММ. 1999. Т. 88. № 4. С. 82–90.
13. *Назаров В.Е.* Об амплитудной зависимости внутреннего трения цинка // Акуст. журн. 2000. Т. 46. № 2. С. 542–546.
14. *Nazarov V.E., Kolpakov A.B.* Experimental investigations of nonlinear acoustic phenomena in polycrystalline zinc // J. Acoust. Soc. Amer. 2000. V. 107. № 4. P. 1915–1921.
15. *McCall K.R., Guyer R.A.* Equation of state and wave propagation in hysteretic nonlinear elastic materials // JGR. 1994. V. 99. P. 23887–23897.
16. *McCall K.R., Guyer R.A.* A new theoretical paradigm to describe hysteretic, discrete memory and nonlinear elastic wave propagation in rock // Nonlinear Processes in Geophysics. 1996. V. 3. P. 89–101.
17. *TenCate J.A., Van Den Abeele K. E.-A., Shanklad T.J., Johnson P.A.* Laboratory study of linear and nonlinear elastic pulse propagation in sandstone // J. Acoust. Soc Amer. 1996. V. 100. № 3. P. 1383–1391.
18. *Van Den Abeele K.E.-A., Johnson P.A., Guyer R.A., McCall K.R.* On the quasi-analytic treatment of hysteresis nonlinear response in elastic wave propagation // J. Acoust. Soc. Amer. 1997. V. 101. № 4. P. 1885–1898.
19. *Guyer R.A., Johnson P.A.* Nonlinear mesoscopic elasticity: evidence for a new class materials // Physics Today. 1999. № 4. P. 30–36.
20. *Priesach F.* Uber die magnetische nachwirkung // Z. Phys. 1935. V. 94. P. 277–302.
21. *Mayergoyz I.D.* Hysteresis models from the mathematical and control theory point of view // J. Appl. Phys. 1985. V. 57. № 1. P. 3803–3805.
22. *Gusev V., Glorieux C., Lauriks W., Thoen J.* Nonlinear bulk and surface shear acoustic waves in materials with hysteretis and endpoint memory // Phys. Lett. A. 1997. V. 232. P. 77–86.
23. *Gusev V., Lauriks W., Thoen J.* Dispersion of nonlinearty, nonlinear dispersion, and absorption of sound in micro-inhomogeneous materials // J. Acoust. Soc. Amer. 1998. V. 103. № 6. P. 3216–3226.
24. *Gusev V.* Parametric acoustic source in a media with hysteretic quadratic nonlinearity // Acoust. Lett. 1998. V. 22. № 2. P. 30–34.
25. *Gusev V., Bailliet H., Lotton P., Bruneau M.* Interaction of the counter-propagating acoustic waves in the media with nonlinear dissipation and in the hysteretic media // Wave Motion. 1999. V. 29. P. 211–221.
26. *Gusev V.* Propagation of acoustic pulses in material with hysteretic nonlinearity // J. Acoust. Soc. Amer. 2000. V. 107. № 6. P. 3047–3058.
27. *Назаров В.Е., Радостин А.В., Соустова И.А.* Экспериментальное исследование взаимодействия уп-

ругих волн в акустическом резонаторе / Труды третьей научной конференции по радиофизике / Ред. А.В. Якимов. – Н. Новгород: ННГУ, 1999. С. 246–247.

28. *Назаров В.Е., Радостин А.В., Соустова И.А.* Экспериментальное исследование влияния мощной звуковой волны на акустические характеристики резонатора из песчаника // Акуст. журн. 2002. Т. 48. № 1. С. 85–90.
29. *Писаренко Г.С.* Колебания механических систем с учетом несовершенной упругости материала. Киев: Наук. думка, 1970.
30. *Asano S.* Theory of nonlinear damping due to dislocation hysteresis // J. Phys. Soc. Jap. 1970. V. 29. № 4. P. 952–963.
31. *Лебедев А.Б.* Амплитудно-зависимый дефект модуля упругости в основных моделях дислокационного гистерезиса // ФТТ. 1999. Т. 41. № 7. С. 1214–1221.
32. *Давиденков Н.Н.* О рассеянии энергии при вибрациях // ЖТФ. 1938. Т. 8. № 6. С. 483–499.
33. *Koehler J.S.* Imperfections in Nearly Perfect Crystal. New York, 1952.
34. Физическая акустика / Под ред. У. Мезона. Т. 4. Ч. А. Применения физической акустики в квантовой физике и физике твердого тела. М.: Мир, 1969. 436 с.
35. Физическая акустика / Под ред. У. Мезона. Т. 3. Ч. А. Влияние дефектов на свойства твердых тел. М.: Мир, 1969. 578 с.
36. *Read T.A.* The internal friction on single metal crystals // Phys. Rev. 1940. V. 58. P. 371–380.
37. *Cook N.G.W., Hodson K.* Some detailed stress-strain curves for rock // JGR. 1965. V. 70. № 12. P. 2883–2888.
38. *Кустов С.Б., Голяндин С.Н., Кардашев Б.К.* Неупругая деформация и амплитудно-зависимое внутреннее трение в кристаллах LiF и NaCl при низких частотах нагружения // ФТТ. 1998. Т. 30. № 7. С. 2167–2176.
39. *Кустов С.Б., Голяндин С.Н., Никифоров А.В., Кардашев Б.К.* Исследование частотной зависимости амплитудно-зависимого внутреннего трения в кристаллах LiF и NaCl // ФТТ. 1989. Т. 31. № 2. С. 260–263.
40. *Голяндин С.Н., Кустов С.Б.* Модель амплитудно-зависимой неупругости и амплитудно-частотный спектр внутреннего трения щелочно-галоидных кристаллов // ФТТ. 1992. Т. 34. № 12. С. 3763–3778.
41. *Голяндин С.Н., Кустов С.Б.* Термически активируемая и силовая микропластическая деформация и амплитудно-частотные спектры внутреннего трения в кристаллах // ФТТ. 1995. Т. 37. № 11. С. 3248–3261.
42. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
43. *Наугольных К.А., Островский Л.А.* Нелинейные волновые процессы в акустике. М.: Наука, 1990.
44. *Руденко О.В., Солуян С.И.* Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975. 287 с.
45. *Назаров В.Е.* Распространение однополярного импульса в среде с гистерезисной нелинейностью // Акуст. журн. 1997. Т. 43. № 2. С. 81–85.
46. Физическая акустика / Под ред. У. Мезона. Т. 3. Ч. Б. Динамика решетки. М.: Мир, 1968. 392 с.

Wave Processes in Media with Hysteretic Nonlinearity. Part I

V. E. Nazarov, A. V. Radostin, L. A. Ostrovsky, and I. A. Soustova

Institute of Applied Physics, Russian Academy of Sciences,
ul. Ul'yanova 46, Nizhni Novgorod, 603950 Russia
e-mail: nazarov@hydro.appl.sci-nnov.ru

Two phenomenological models of hysteretic equations of state for media with imperfect elasticity are described and compared. On the basis of these equations, a theoretical study of nonlinear effects caused by the acoustic wave propagation in an unbounded medium is performed. The profiles, parameters, and spectra of waves are determined. The distinctive features of nonlinear wave processes in such media are revealed, so that these features can be used to choose the appropriate hysteretic equation of state for analytically describing the experimental data.