АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2003, том 49, № 4, с. 529–534

УДК 534.222

ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ В СРЕДАХ С ГИСТЕРЕЗИСНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ. ЧАСТЬ II

© 2003 г. **В. Е. Назаров, А. В. Радостин, Л. А. Островский, И. А. Соустова**

Институт прикладной физики РАН
603950 Нижний Новгород, ул. Ульянова, 46
E-mail: nazarov@hydro.appl.sci-nnov.ru

Поступила в редакцию 04.05.2001 г.

В рамках двух основных гистерезисных уравнений для сред с несовершенной упругостью проводится теоретическое исследование нелинейных процессов, возникающих при распространении низкочастотных и высокочастотных акустических импульсов в безграничной среде и непрерывных волн в кольцевом резонаторе; определены профили и параметры импульсов, а также резонансная кривая резонатора, его добротность и отношение нелинейного сдвига резонансной частоты к нелинейному декременту затухания. Выявлены отличительные признаки нелинейных волновых процессов в таких средах, способствующие правильному выбору гистерезисного уравнения состояния при аналитическом описании результатов экспериментальных исследований.

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей статье, являющейся продолжением работы [1], в рамках феноменологических гистерезисных уравнений состояния проводится теоретическое исследование нелинейных волновых процессов, возникающих при распространении низкочастотных (НЧ) и высокочастотных (ВЧ) импульсов в безграничной среде и непрерывных волн в кольцевом резонаторе. Здесь используется единая (со статьей [1]) система обозначений.

2. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ОДНОПОЛЯРНЫХ ИМПУЛЬСОВ ДЕФОРМАЦИИ

Рассмотрим распространение и эволюцию в средах с гистерезисной нелинейностью однополярных (для определенности положительных) возмущений, задаваемых на границе $x = 0$ выражением: $\varepsilon(x = 0, \theta) = \varepsilon_0 \sin\theta$, $0 \le \theta \le \pi$. Как следует из уравнений (7), (8) [1], распространение таких возмущений характеризуется двумя параметрами: амплитудой и длительностью $\theta_+^*(x)$. Интегрируя уравнение (6) [1] от 0 до θ_+^* по θ, получаем для первой и второй моделей гистерезиса:

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_0^{\theta_+^*} \varepsilon(x, \theta)d\theta = -\frac{\beta_1 + \beta_2}{4}\varepsilon_m^2 < 0, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_0^{\theta_+^*} \varepsilon(x, \theta)d\theta = 0. \qquad (2)$$

Из уравнения (1) следует, что в первой модели гистерезиса площадь $S(x)$ под кривой $\varepsilon = \varepsilon(x, \theta)$ уменьшается при увеличении координаты x и, следовательно, импульс однополярного возмущения не сохраняется. Это также видно из уравнения (7) [1]: точки на профиле возмущения, соответствующие $\varepsilon = 0$, движутся с одинаковой скоростью, поэтому длительность возмущения остается постоянной, а его амплитуда, вследствие гистерезисных потерь, уменьшается, т.е. уменьшается и площадь под кривой $\varepsilon = \varepsilon(\theta)$. Таким образом, неупругий гистерезис не пригоден для описания распространения однополярных возмущений.

Для второй модели гистерезиса, из уравнения (2) имеем: $S(x) = 2\varepsilon_0 = \text{const}$, т.е. импульс однополярного возмущения сохраняется. Длительность $\theta_+^*(x)$ возмущения (при $\gamma_{1,2} \ge 0$) определяется из уравнения (8) [1]: $\theta_+^*(x) = 4\mu_+\varepsilon_m^+ + 2\arcsin(\varepsilon_m^+/\varepsilon_0)$, а его амплитуда $\varepsilon_m^+(x)$ – уравнением (17) [1]. На больших расстояниях от излучателя однополярный импульс становится треугольным (рис. 1); его амплитуда и длительность равны:

$$\varepsilon_m^+(x) \approx \sqrt{\varepsilon_0/\mu_+} \sim (\varepsilon_0/x)^{1/2},$$
$$\theta_+^*(x) \approx 4\sqrt{\varepsilon_0\mu_+} \sim (\varepsilon_0 x)^{1/2}.$$

При $\gamma_2 < 0$, но $\gamma_1 + \gamma_2 \ge 0$ (аналогично можно рассмотреть случай $\gamma_1 < 0$) в импульсе образуется разрыв на заднем фронте в точке $\varepsilon = 0$ на расстоянии

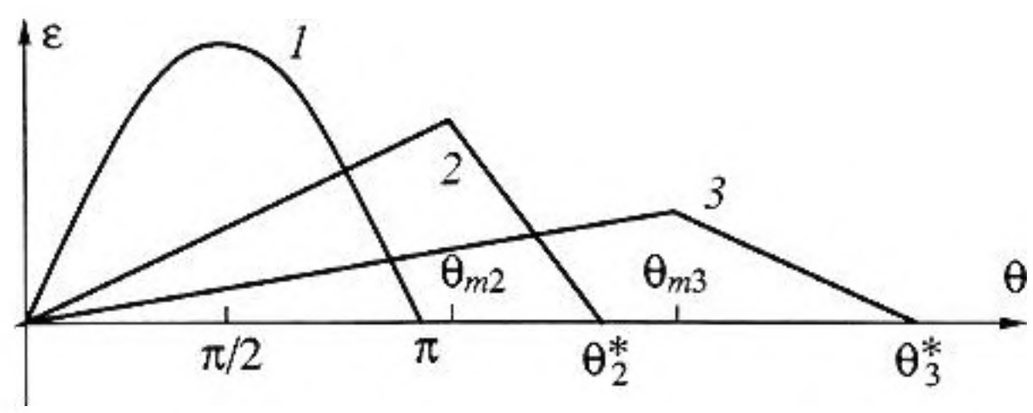

Рис. 1. Эволюция однополярного возмущения в среде с упругим гистерезисом ($1 - x = 0$; $2 - x_1 > 0$, $3 - x_2 > x_1$).

$x_p = 2/|\gamma_2|\varepsilon_0 k$; амплитуда $\varepsilon_p^+(x)$ и фаза $\theta_p^+(x)$ разрыва определяются выражениями:

$$\varepsilon_p^+(x) = \frac{\sqrt{8|\gamma_2|\varepsilon_0 kx - 16}}{|\gamma_2|kx},$$

$$\theta_p^+(x) = 4\mu_+\varepsilon_m^+ + 2\arcsin(\varepsilon_m^+/\varepsilon_0) -$$

$$- \arcsin(\varepsilon_p^+/\varepsilon_0) - \frac{\gamma_2}{2}\varepsilon_p^+ kx.$$

На расстоянии $x_2 = x_p(1 + |\gamma_2/\gamma_1|) > x_p$ фаза $\theta_m^+(x)$ "догонит" фазу разрыва $\theta_p^+(x)$, и в дальнейшем амплитуда возмущения будет уменьшаться по закону:

$$\varepsilon_m^+(x) = \frac{\sqrt{8\gamma_1\varepsilon_0 kx - 16}}{\gamma_1 kx}.$$

На больших расстояниях ($x \gg 2/\gamma_1\varepsilon_0 k$) амплитуда и длительность возмущения определяются выражениями: $\varepsilon_m^+ = \sqrt{8\varepsilon_0/\gamma_1 kx}$, $\theta_+^*(x) = \sqrt{2\gamma_1\varepsilon_0 kx}$.

3. САМОДЕТЕКТИРОВАНИЕ ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ ИМПУЛЬСОВ

При распространении амплитудно-модулированной высокочастотной (ВЧ) акустической волны в среде с четной нелинейностью происходит ее детектирование (или демодуляция), в результате чего в среде генерируется и распространяется низкочастотная (НЧ) волна; на этом принципе основана работа параметрических излучающих антенн [2–4]. Измерение характеристик такой волны также можно использовать для определения нелинейных акустический свойств среды с целью ее диагностики. Здесь мы исследуем процесс детектирования ВЧ акустических импульсов в средах с гистерезисной нелинейностью.

Зададим граничное условие на излучателе в следующем виде: $\varepsilon(x = 0, t) = \varepsilon_0 A(t)\sin\omega t$, где $A(t)$ – огибающая ВЧ-импульса длительностью T, $\omega T \gg 1$. Возникающий при детектировании распространяющегося ВЧ-импульса $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(x, \tau)$ НЧ-импульс $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(x, \tau)$ будем искать методом возмущений. Полагая в (6) [1] $\varepsilon(x, \tau) = \varepsilon_1(x, \tau) + \varepsilon_2(x, \tau)$, $|\varepsilon_2(x, \tau)| \ll |\varepsilon_1(x, \tau)|$, получим уравнение для НЧ-импульса:

$$\frac{\partial\varepsilon_2}{\partial x} = -\frac{1}{2C_0}\frac{\partial\langle f(\varepsilon_1, \dot\varepsilon_1)\rangle}{\partial\tau}, \tag{3}$$

где $\langle f(\varepsilon_1, \dot\varepsilon_1)\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varepsilon_1, \dot\varepsilon_1)d\theta$. Из выражений (7), (8) [1] (при $x \ll x_0$) получаем:

$$\langle f(\varepsilon_1, \dot\varepsilon_1)\rangle = a_0\varepsilon_0^2 A^2(\tau)\left(1 - \frac{d}{a_0}\varepsilon_0 A(\tau)kx\right), \tag{4}$$

где $a_0 = \frac{\beta_1 - \beta_2}{8}$, $d = \frac{4(\beta_1^2 - \beta_2^2)}{3\pi}$ – для первой модели гистерезиса и

$$a_0 = \frac{1}{16}\left[\gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3 + \gamma_4 + \frac{4}{\pi}(\gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4)\right],$$

$$d = -\frac{1}{24\pi}[\gamma_1^2 + 11\gamma_2^2 - \gamma_3^2 - 11\gamma_4^2 + 12\gamma_1\gamma_2 - 12\gamma_3\gamma_4] -$$

для второй.

Из уравнений (3), (4) находим:

$$\varepsilon_2(x, \tau) = -\frac{a_0\varepsilon_0^2 x}{2C_0}\frac{\partial}{\partial\tau}\left(A^2(\tau)\left[1 - \frac{d}{2a_0}\varepsilon_0 A(\tau)kx\right]\right). \tag{5}$$

Из этого выражения следует, что при $a_0 \neq 0$, практически независимо от вида гистерезиса, форма продетектированного импульса близка к первой производной по времени от квадрата огибающей, при этом вначале его амплитуда линейно растет с расстоянием, а затем, вследствие гистерезисных потерь ВЧ-импульса, рост НЧ-импульса замедляется, а его длительность увеличивается (рис. 2). Измеряя амплитуду и длительность продетектированного импульса на двух различных расстояниях x от излучателя (или при двух различных амплитудах ε_0), можно определить параметры нелинейности среды (a_0 и d). Здесь имеется одно небольшое отличие процессов детектирования в средах с неупругим и упругим гистерезисами, заключающееся в том, что при $a_0 = 0$ в первой модели гистерезиса детектирования нет [5], а во второй – есть (если $d \neq 0$); в этом случае форма НЧ-импульса совпадает с первой производной от куба огибающей, а его амплитуда пропорциональна $\varepsilon_0^2 x^2$. Последнее связано с несимметричным искажением ВЧ-волны, проявляющимся как в изменении профилей положительного и отрицательного полупериодов волны, так и их длительностей (см. (17), (19) [1]). (Такое детектирование, однако, является существенно более слабым, по сравнению со случаем $a_0 \neq 0$). Заметим, что в средах, уравнения состояния которых описываются симметричными гистерезисами ($\beta_1 = \beta_2$ [5] и

$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4$), процесс детектирования ВЧ-импульсов вида $A(t)\sin\omega t$ не идет, т.к. эффективные параметры квадратичной нелинейности также равны нулю ($a_0 = 0$, $d = 0$). В таких средах, как следует из уравнений (12), (14) и (20), (22) [1], четные гармоники также не возникают. Интересно отметить, что если несущая модулированной ВЧ-волны будет ангармоничной и имеющей различные длительности фаз нагрузки ($\dot{\varepsilon} > 0$) и разгрузки ($\dot{\varepsilon} < 0$), то при ее распространении в среде с симметричными гистерезисами возникнет НЧ-волна модуляции [5].

4. БЕГУЩИЕ ВОЛНЫ В КОЛЬЦЕВОМ РЕЗОНАТОРЕ

Более сильно (по сравнению с безграничной средой) нелинейные эффекты проявляются в резонаторах, где, за счет их высокой добротности, интенсивность акустических волн может быть значительно выше. При возбуждении стержневого резонатора в нем устанавливается стоячая волна, являющаяся суммой двух волн, бегущих навстречу друг другу, которые, вообще говоря, могут взаимодействовать из-за нечетной нелинейности среды. Однако в резонаторе с четной нелинейностью встречные волны не взаимодействуют, поэтому и задача о нелинейных колебаниях в таком резонаторе особых трудностей не представляет [4]. Поскольку (в общем случае) гистерезисная нелинейность содержит как четную, так и нечетную составляющие, то в резонаторах с гистерезисной нелинейностью встречные волны взаимодействуют, и задача о колебаниях в стержневых резонаторах усложняется. Здесь мы рассмотрим нелинейные колебания в кольцевом резонаторе (рис. 3), в котором волна бежит в одну сторону [6]. (Принципиально осуществить режим бегущей волны в кольцевом резонаторе можно, используя, например, два несимметрично расположенных излучателя, возбуждаемых синусоидальными колебаниями, сдвинутыми по фазе. Подбирая сдвиг фазы между этими колебаниями, можно эффективно возбуждать волну, бегущую по часовой стрелке, и подавлять волну, бегущую против часовой стрелки, или наоборот.)

Определим резонансную кривую, амплитуду установившейся волны и добротность такого кольцевого резонатора в двух режимах: квазигармоническом (или слабонелинейном) и сильнонелинейном, когда в резонаторе сформировалась волна с треугольным профилем – для первой модели гистерезиса, и пятиугольным – для второй (при $\gamma_1 = \gamma_4$, $\gamma_2 = \gamma_3$, когда $\mu_+ = \mu_-$ и $\varepsilon_m^+ = |\varepsilon_m^-| = \varepsilon_m$ – амплитуда волны). Граничное условие для деформации на излучателе зададим в виде: $\varepsilon(x = 0, t) = \varepsilon_0 \sin\omega t$. Очевидно, что в установившемся режиме в резонаторе будет выполняться условие:

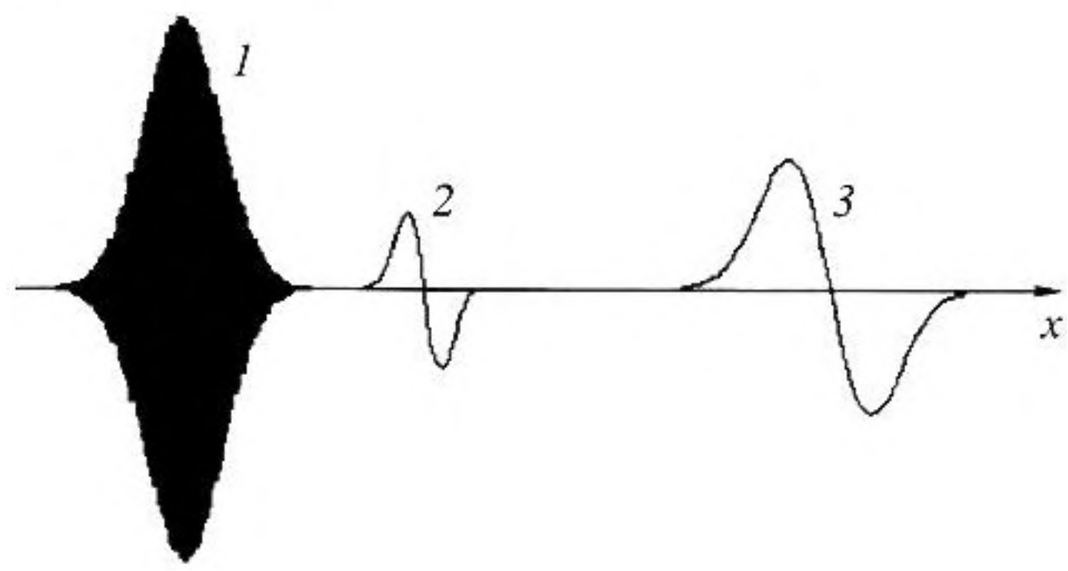

Рис. 2. Эволюция продетектированного импульса: *1* – ВЧ-импульс ($x = 0$); *2*, *3* – продетектированные импульсы на различных расстояниях от излучателя при $a_0 > 0$.

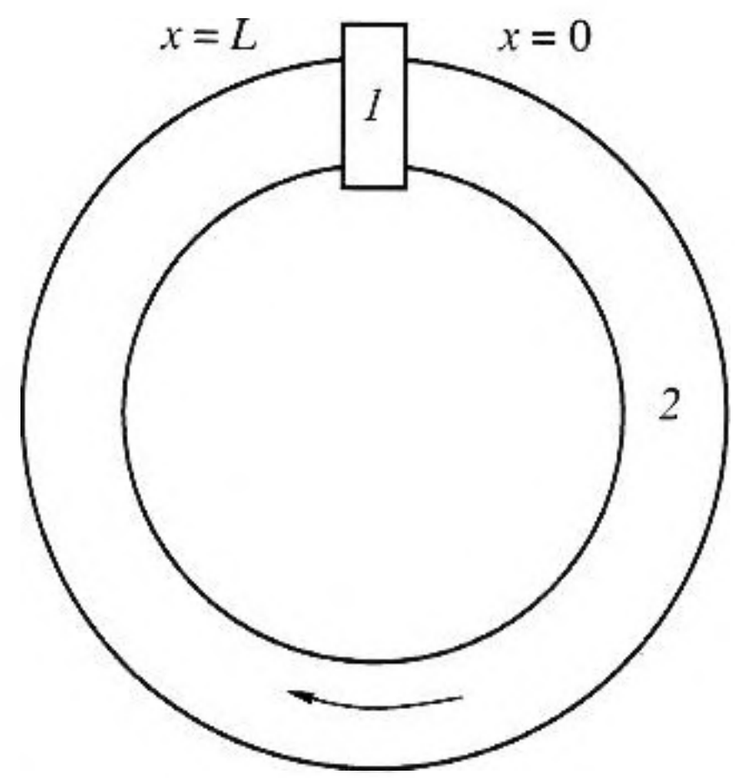

Рис. 3. Принципиальная схема кольцевого резонатора: *1* – излучатель, *2* – резонатор.

$$\varepsilon_1(L) = \varepsilon_1(L) \times \\ \times \exp\{-ik_pL[1 + \Delta_p + \Delta_h(\varepsilon_m) - i\delta(\varepsilon_m)]\} + \varepsilon_0, \tag{6}$$

где $k_p = \omega_p/C_0$, $\omega_p = 2\pi pC_0/L$, L – длина резонатора, p – номер моды, $\Delta\omega_p = \omega - \omega_p$, $\Delta_p = \Delta\omega_p/\omega_p$, $\Delta_h(\varepsilon_m) = \Delta C(\varepsilon_m)/C_0$, а параметры $\delta(\varepsilon_m)$ и $\Delta C(\varepsilon_m)/C_0$ определяются выражениями (13), (15) – для первой модели гистерезиса, и (21), (23) – для второй [1]. Из уравнения (6) получаем выражение для резонансной кривой:

$$\varepsilon_m = \frac{\varepsilon_0}{2\pi p\zeta\sqrt{\delta^2(\varepsilon_m) + [\Delta_p + \Delta_h(\varepsilon_m)]^2}}, \tag{7}$$

где $\zeta = \varepsilon_1/\varepsilon_m$; в квазигармоническом режиме $\zeta = 1$, а в сильнонелинейном – определяется выражениями (16) и (24) [1] соответственно. Отметим, что структура (т.е. формула (7)) резонансной кривой для кольцевого резонатора совпадает со структу-

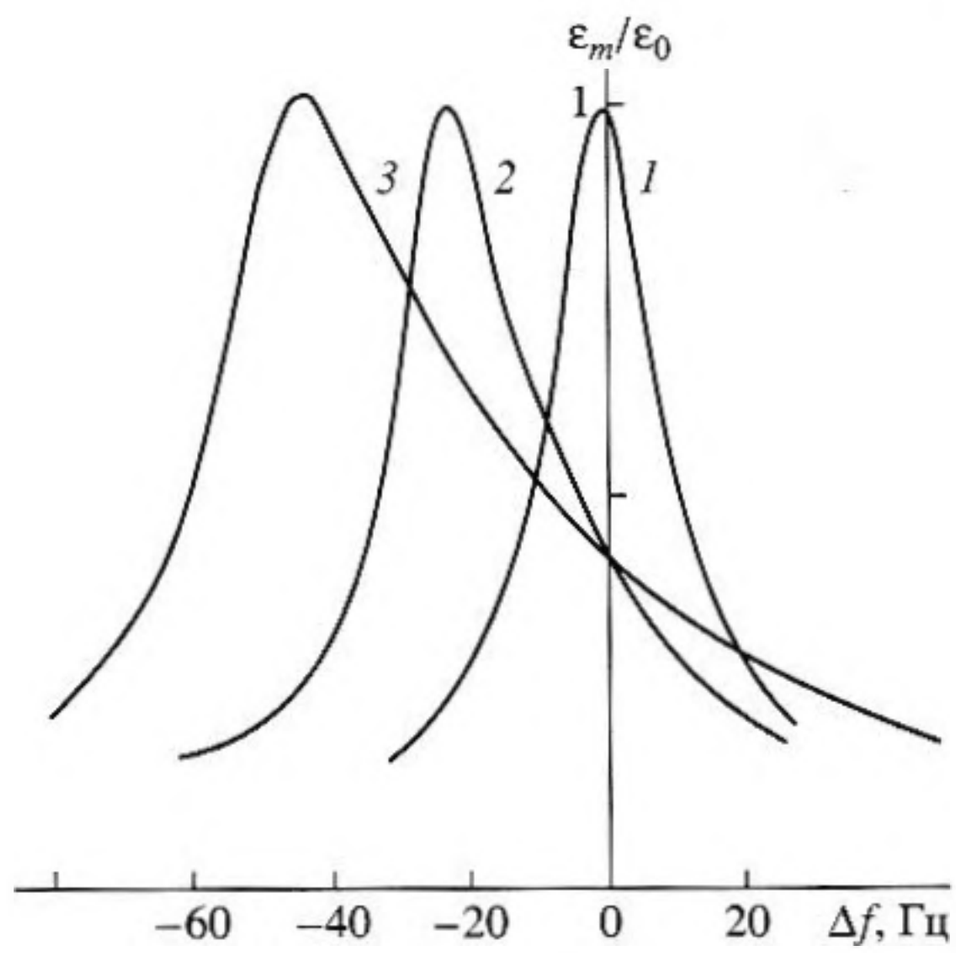

Рис. 4. Резонансные кривые при различных амплитудах возбуждения стержневого резонатора из поликристаллической меди (f_2 = 4350 Гц) [8]: *1* – $\varepsilon_0 = 4 \times 10^{-8}$; *2* – $\varepsilon_0 = 8.5 \times 10^{-7}$; *3* – $\varepsilon_0 = 7 \times 10^{-6}$.

рой резонансной кривой для стержневых резонаторов [7–13]. Как следует из (7), при увеличении амплитуды ε_0 излучаемой волны резонансные кривые для таких резонаторов сдвигаются и несимметрично расширяются, при этом, в отличие от систем с кубичной упругой нелинейностью [14, 15], где имеет место гистерезис резонансной кривой, здесь такой ситуации может не быть. Это связано с ростом нелинейных потерь и расширением резонансной кривой, предотвращающим ее перегиб. Именно такое поведение резонансных кривых для стержневых резонаторов из различных материалов наблюдалось экспериментально в работах [7–13] (рис. 4).

Определим добротность $Q_p(\varepsilon_m)$ резонатора как отношение частоты ω_p к ширине резонансной кривой по уровню $1/\sqrt{2}$: $Q_p(\varepsilon_m) \cong 0.4/\delta(\varepsilon_m)$. Интересно проследить за поведением добротности $Q_p(\varepsilon_m)$ при увеличении амплитуды ε_0. В квазигармоническом режиме мощность волны пропорциональна ε_0^2, а потери, определяемые площадью петли гистерезиса, пропорциональны ε_0^3, поэтому $Q_p(\varepsilon_0) \propto \varepsilon_0^{-1}$. В сильнонелинейном режиме мощность волны на частоте ω_p пропорциональна ε_m^2, а потери, связанные, в основном, с генерацией высших гармоник, также пропорциональны ε_m^2, поэтому $Q_p(\varepsilon_0) \cong \text{const}$.

Нелинейный сдвиг резонансной частоты определяется выражением: $\Delta\omega_{p,h}(\varepsilon_m) = -\omega_p\Delta_h(\varepsilon_m) \sim \varepsilon_m$, при этом зависимости $\Delta\omega_{p,h} = \Delta\omega_{p,h}(\varepsilon_0)$ для резонатора с неупругим и упругим гистерезисами оказываются различными, т.к. ε_m по-разному зависит от ε_0. Из уравнения (7) следует, что в резонансе, когда $\Delta_p + \Delta_h(\varepsilon_m) = 0$, для резонатора с неупругим и упругим гистерезисом имеем следующие зависимости $\varepsilon_m = \varepsilon_m(\varepsilon_0)$:

$$\varepsilon_m = \frac{3}{2p(\beta_1 + \beta_2)}, \quad \varepsilon_m = \frac{12}{p(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4)}$$

– в квазисинусоидальном режиме, и

$$\varepsilon_m = \left(\frac{\varepsilon_0}{p\zeta(\beta_1 + \beta_2)}\right)^{1/2}, \quad \varepsilon_m = \left(\frac{2\varepsilon_0^2}{\pi p\zeta(\gamma_1 + \gamma_2)}\right)^{1/3}$$

– в сильнонелинейном.

Независимость амплитуды ε_m от начальной амплитуды ε_0 в квазисинусоидальном режиме связана с пренебрежением линейным диссипативным слагаемым в уравнении состояния (2) [1]; при его учете мы, естественно, получим, что $\varepsilon_m \sim \varepsilon_0$ [7–13], однако зависимости $\varepsilon_m = \varepsilon_m(\varepsilon_0)$ для сильнонелинейного режима не изменятся.

Определим, наконец, параметр r, равный отношению декремента δ затухания к относительному изменению скорости волны $\Delta C/C_0$ и являющийся важной характеристикой амплитудно-зависимого внутреннего трения [16–20]. Для резонатора с неупругим и упругим гистерезисом имеем соответственно:

$$r_1 = \frac{4}{3}\frac{\beta_1 + \beta_2}{\alpha}, \quad r_2 = \frac{4}{3}\left(1 + \frac{8}{3\pi}\frac{\gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3 - \gamma_4}{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4}\right)^{-1}$$

– в квазисинусоидальном режиме, и

$$\varepsilon_1 = \frac{2(\beta_1 + \beta_2)}{\alpha}, \quad r_2 = \frac{4\pi\varepsilon_m}{\varepsilon_0} = \left(\frac{32\pi}{p(\gamma_1 + \gamma_2)\varepsilon_1}\right)^{1/2}$$

– в сильнонелинейном.

Из этих выражений видно, что параметр r является постоянной величиной только в квазисинусоидальном режиме, а при переходе к сильнонелинейному он становится амплитудно-зависимым. Кроме того, в сильнонелинейном режиме для неупругого гистерезиса параметр r не зависит от моды возбуждения резонатора, а для упругого – $r \sim p^{-1/2}$. Следует, по-видимому, ожидать, что аналогичные зависимости r от ε_1 и p будут наблюдаться и для стержневых резонаторов, в которых структура волны – стоячая.

5. ОБЩЕЕ ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе приведены описание и сравнение двух основных феноменологических моделей гистерезисных уравнений состояния для сред с несовершенной упругостью: первая модель (неупругий гистерезис) состоит из двух ветвей, а вторая (упругий гистерезис) – из четырех, при

этом все ветви каждого гистерезиса аппроксимируются квадратичными функциями деформации. В рамках этих гистерезисных уравнений проведено исследование нелинейных эффектов, возникающих при распространении непрерывных и импульсных продольных акустических волн в безграничной среде и кольцевом резонаторе: определены профили волн и их спектры, а также резонансная кривая резонатора и его добротность. Решение нелинейных волновых уравнений проводилось методом "сшивания" простых волн, отвечающих каждой ветви гистерезиса в точках пересечения и наложения этих волн. Показано, что при распространении первоначально гармонической волны в среде с упругим гистерезисом, вследствие нелинейных потерь и образования разрывов, обусловленных неаналитичностью уравнения состояния при нулевых напряжениях и деформациях, асимптотический профиль каждого полупериода волны становится пятиугольным, а в среде с неупругим гистерезисом, где такой неаналитичности нет, образуется волна треугольного профиля. Проведенные исследования показали, что распространение упругих волн в средах с различными гистерезисными уравнениями состояния сопровождается нелинейными эффектами, характер которых зависит от вида гистерезиса и может быть различным. Для одних эффектов (изменение скорости волны, генерация высших гармоник, детектирование высокочастотных импульсов) это отличие является количественным, а для других (форма волны, зависимость ее амплитуды от расстояния и от начальной амплитуды, отношение декремента затухания к относительному изменению скорости волны) – качественным. Последнее отличие наиболее ярко проявляется в резонаторах при их возбуждении в сильнонелинейном режиме, когда уровень высших гармоник в волне сравним с уровнем волны основной частоты. Поиск и выявление подобных отличий при проведении экспериментальных исследований нелинейных акустических эффектов позволит сделать правильный выбор гистерезисного уравнения состояния среды с несовершенной упругостью. В свою очередь, выбранное таким образом гистерезисное уравнение состояния и определенные (из сравнения аналитических расчетов нелинейных волновых процессов с экспериментальными результатами) параметры гистерезиса могут являться качественной и количественной основой для диагностики типа и количества (т.е. объемной концентрации) дефектов, определяющих акустическую (в широком смысле) нелинейность микронеоднородной среды. Для решения таких диагностических задач необходимо выявление физических механизмов нелинейности различных сред, создание моделей различных нелинейных дефектов (дислокаций, трещин, контактов, зерен и т.д.) и уравнений состояния (причем, не обязательно только гистерезисных), описывающих поведение этих дефектов в поле упругой волны. Такой "микроскопический" подход получения уравнения состояния требует знания дефектной структуры среды и, как правило, является более сложным, по сравнению с феноменологическим подходом, в котором уравнение состояния, по существу, постулируется или реконструируется на основе экспериментально установленных амплитудных и частотных зависимостей различных нелинейных эффектов. Практика, однако, показывает, что оба эти подхода могут успешно (а часто и независимо) применяться и взаимно дополнять друг друга при исследовании нелинейных волновых процессов. В заключение отметим, что нелинейные акустические методы диагностики различных сред и материалов могут быть довольно разнообразными и основанными не только на описанных здесь, но и на других нелинейных эффектах; в зависимости от конкретных условий эти методы могут быть более простыми или более эффективными. Среди таких эффектов, по-видимому, могут быть: модуляция звука звуком, затухание звука на звуке, генерация волн комбинационных частот (суммарной или разностной), самофокусировка, самопросветление и т.д. В средах с различными видами акустической нелинейности все эти эффекты будут проявляться по-разному, и эти отличия могут быть использованы для определения нелинейного уравнения состояния среды с целью ее диагностики.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 01-05-64417).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Назаров В.Е., Радостин А.В., Островский Л.А., Соустова И.А.* Упругие волны в средах с гистерезисной нелинейностью. Часть I. // Акуст. журн. 2003.
2. *Зарембо Л.К., Красильников В.А.* Введение в нелинейную акустику. М.: Наука. 1966.
3. *Руденко О. В., Солуян С. И.* Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука. 1975. 287 с.
4. *Наугольных К.А., Островский Л.А.* Нелинейные волновые процессы в акустике. М.: Наука. 1990.
5. *Gusev V.* Parametric acoustic source in a media with hysteretic quadratic nonlinearity // Acoust. Lett. 1998. V. 22. № 2. P. 30–34.
6. *Nazarov V.E, Ostrovsky L.A, Soustova I.A, Radostin A.V.* Finite-amplitude acoustic waves in materials with hysteresis in stress-strain relation // Nonlinear Acoustics at the Turn of the Millenium, ISNA 15, Gottingen 1999. Ed. by W. Lauterborn, T. Kurtz, (Amer. Inst. of Physics, Melville, N.Y.), 2000. P. 299–302.
7. *Nazarov V.E., Ostrovsky L.A., Soustova I.A., Sutin A.M.* Nonlinear acoustics of micro-inhomogeneous media // Physics of the Earth and Planetary Interiors. 1988. V. 50. № 1. P. 65–73.

8. *Назаров В.Е., Островский Л.А., Соустова И.А., Сутин А.М.* Аномальная акустическая нелинейность в металлах // Акуст. журн. 1988. Т. 34. № 3. С. 491–499.
9. *Зименков С.В., Назаров В.Е.* Нелинейные акустические эффекты в образцах горных пород // Физика Земли. 1993. № 1. С. 13–18.
10. *Назаров В.Е.* Амплитудно-зависимое внутреннее трение свинца // ФММ. 1999. Т. 88. № 4. С. 82–90.
11. *Nazarov V.E., Kolpakov A.B.* Experimental investigations of nonlinear acoustic phenomena in polycrystalline zinc // JASA. 2000. V. 107. № 4. P. 1915–1921.
12. *Guyer R.A., Johnson P.A.* Nonlinear mesoscopic elasticity: evidence for a new class materials // Physics Today. 1999. № 4. P. 30–36.
13. *TenCate J.A., Shanklad T.J.* Slow dynamics in the nonlinear elastic response of Berea sandstone // Geophys. Res. Lett. 1996. V. 23. № 21. P. 3019–3022.
14. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука. 1974. 504 с.
15. *Рабинович М.И., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984. 431 с.
16. *Granato A., Lucke K.* Theory of mechanical damping due to dislocations // J. Appl. Phys. 1956. V. 27. № 5. P. 583–593.
17. Ультразвуковые методы исследования дислокаций // Сб. статей под ред. Л.Г. Меркулова. М.: ИИЛ, 1963.
18. *Писаренко Г.С.* Колебания механических систем с учетом несовершенной упругости материала. Киев: Наук. Думка, 1970.
19. *Asano S.* Theory of nonlinear damping due to dislocation hysteresis // J. Phys. Soc. Jap. 1970. V. 29. № 4. P. 952–963.
20. *Лебедев А.Б.* Амплитудно-зависимый дефект модуля упругости в основных моделях дислокационного гистерезиса // ФТТ. 1999. Т. 41. № 7. С. 1214–1221.

Wave Processes in Media with Hysteretic Nonlinearity. Part 2

V. E. Nazarov, A. V. Radostin, L. A. Ostrovsky, and I. A. Soustova

Institute of Applied Physics, Russian Academy of Sciences, ul. Ul'yanova 46, Nizhni Novgorod, 603950 Russia
e-mail: nazarov@hydro.appl.sci-nnov.ru

Nonlinear processes caused by the propagation of low-frequency and high-frequency acoustic pulses in an unbounded medium and the propagation of continuous waves in a ring resonator are theoretically studied on the basis of two hysteretic equations of state for media with imperfect elasticity. The profiles and parameters of pulses, the resonance curve and the Q factor of the resonator, and the ratio of the nonlinear resonance frequency shift to the nonlinear damping decrement are determined. For nonlinear wave processes in such media, the distinctive features that allow one to choose an appropriate hysteretic equation of state for analytically describing the experimental data are revealed.