АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2003, том 49, № 5, с. 656–666

УДК 542.34

РАСПРОСТРАНЕНИЕ КОРОТКОГО ИМПУЛЬСА В СРЕДЕ С РЕЗОНАНСНОЙ РЕЛАКСАЦИЕЙ. ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ

© 2003 г. Г. А. Максимов, В. А. Ларичев

Московский инженерно-физический институт

115409 Москва, Каширское шоссе 31

E-mail: maximov@dpt39.mephi.ru, valar@dpt39.mephi.ru

Поступила в редакцию 16.12.2002 г.

Получено новое аналитическое представление фундаментального решения (функции Грина) задачи о распространении короткого импульса в произвольной среде с одним процессом резонансной релаксации. Это аналитическое представление основано на обобщенной функции локального отклика линейных сред [1], которая включает как частные случаи хорошо известные релаксационные модели Дебая и Лоренца. С использованием полученного представления установлено полное многообразие возможных типов динамики короткого импульса при его распространении в среде.

В настоящее время предметом многочисленных теоретических и экспериментальных исследований является анализ закономерностей распространения, диспергирования и затухания коротких акустических и электромагнитных импульсов в релаксирующих средах [2–11]. Интерес к этой проблеме связан с теми дополнительными возможностями, которые открываются при решении задач диагностики сред импульсными методами. Это прежде всего возможность дистанционного исследования быстропротекающих процессов в среде и значительно более простые требования к условиям эксперимента. Предыдущие исследования авторов [5] показали, что эффективность диагностики релаксационных свойств среды короткими акустическими импульсами малой амплитуды может существенно дополнять, а в ряде случаев и превосходить методы акустической спектроскопии, традиционно используемые для этих целей.

Основная трудность обратной задачи импульсной диагностики сред заключается в обоснованном выборе той физической модели, которая была бы достаточно общей, чтобы адекватно описывать свойства значительного числа реальных сред. Такая достаточно общая модель может быть получена в рамках термодинамического подхода Мандельштама и Леонтовича [12], в которой основным параметром, определяющим многообразие диссипативно-дисперсионных свойств реальных сред, является спектр времен релаксации (СВР). Однако такие, например, среды, как жидкости с пузырьками газа, обладают не только релаксационными, но и резонансными свойствами и обычно рассматриваются в рамках независимых моделей.

В работе [1] авторами показано, что при учете альтернативной формулировки принципа симметрии кинетических коэффициентов Онзагера термодинамический подход Мандельштама–Леонтовича позволяет получить единое описание произвольной линейной среды с локальным откликом. Модели Лоренца [13] и Дебая [14, 15] в таком подходе являются частными случаями более общей модели, характеризующейся еще одним дополнительным параметром – углом инерционности. Наличие дополнительного параметра приводит к значительно более разнообразной динамике диспергирования короткого импульса по сравнению со случаями чисто релаксационного (модель Дебая) и чисто резонансного (модель Лоренца) отклика среды.

Уравнение состояния, описывающее локальный отклик произвольной линейной среды с единственным процессом резонансной релаксации, может быть записано в виде [1]

$$\sigma(t) = \rho_0 c_\infty^2\left(\varepsilon(t) - \frac{\Delta\rho}{\tau}\int_0^t dt'\varepsilon(t-t')e^{-t/\tau}\cos(\Omega t' - \varphi)\right), \quad (1)$$

где σ – напряжение, ε – деформация, ρ_0 – плотность, c_0, c_∞ – низко- и высокочастотный пределы фазовой скорости в среде, а основными параметрами, определяющими дисперсионные свойства среды, являются время релаксации τ, резонансная частота Ω, угол инерционности φ. Кроме того, введены следующие обозначения: для нормировочного множителя $\rho = (1 + \Omega^2\tau^2)/(\cos\varphi + \Omega\tau\sin\varphi)$ и дисперсионного скачка фазовой скорости $\Delta = 1 - c_0^2/c_\infty^2$.

Уравнение состояния (1) при $\Omega = 0$ и $\varphi = \pi/2$ соответствует частным случаям чисто экспоненциальной релаксации (модель Дебая) и чисто резонансной релаксации (модель Лоренца).

Рассмотрим те особенности дисперсии и поглощения волн, к которым приводит уравнение состояния (1).

В линейном приближении распространение плоских акустических волн подчиняется уравнению движения

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial x},$$

где u – смещение; деформация определяется производной $\varepsilon = \partial u/\partial x$.

С учетом уравнения состояния (1) уравнение движения сводится к уравнению наследственного типа

$$\frac{1}{c_\infty^2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\Delta\rho}{\tau}\int_0^t dt' \frac{\partial^2 u(x,t-t')}{\partial x^2} e^{-t'/\tau}\cos(\Omega t' - \varphi).$$

В частотном представлении ($t \longrightarrow \omega$) оно эквивалентно уравнению Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 u(x,\omega)}{\partial x^2} + K^2(\omega)u(x,\omega) = 0,$$

где волновое число $K(\omega)$ имеет вид

$$K(p) = \frac{p}{c_\infty}\left(1 - \Delta\rho\frac{(p\tau+1)\cos\varphi + \Omega\tau\sin\varphi}{(p\tau+1)^2 + (\Omega\tau)^2}\right)^{-1/2}. \quad (2)$$

Фундаментальное решение (функцию Грина) задачи о распространении плоского импульса в бесконечной среде можно представить в виде интеграла Лапласа:

$$I(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\delta - i\infty}^{\delta + i\infty} dp \exp(pt - xK(p)) \quad (3)$$

с волновым числом (2).

В случае малой дисперсии скоростей $\Delta\rho \ll 1$ волновое число $K(p)$ можно разложить в ряд с точностью до линейного по $\Delta\rho \ll 1$ слагаемого:

$$K(p) \approx \frac{p}{c_\infty}\left(1 + \frac{\Delta\rho}{2}\frac{(p\tau+1)\cos\varphi + \Omega\tau\cos\varphi}{(p\tau+1)^2 + (\Omega\tau)^2}\right). \quad (4)$$

Исходя из (4), можно получить следующие выражения для коэффициента поглощения $\alpha(\omega) = \mathrm{Re}K(i\omega)$ и фазовой скорости $c(\omega)$: $c^{-1}(\omega) = \mathrm{Im}K(i\omega)/\omega$;

$$\alpha(\omega) = \frac{\Delta\rho}{2c_\infty\tau}\frac{(\omega\tau)^2((\omega\tau)^2\cos\varphi + (1-(\Omega\tau)^2)\cos\varphi + 2\Omega\tau\sin\varphi)}{((\omega\tau)^2 + (1-(\Omega\tau)^2))^2 + 4(\Omega\tau)^2},$$

$$c(\omega) = c_\infty\left(1 - \frac{\Delta\rho}{2\tau}\frac{((\omega\tau)^2(\cos\varphi - \Omega\tau\sin\varphi) + (1-(\Omega\tau)^2)(\cos\varphi + \Omega\tau\sin\varphi))}{((\omega\tau)^2 + (1-(\Omega\tau)^2))^2 + 4(\Omega\tau)^2}\right).$$

Требование устойчивости или диссипативности среды, которое эквивалентно положительности коэффициента поглощения, приводит к ограничению на допустимые значения параметров $\Omega\tau$ и φ:

$$\Omega\tau < \mathrm{tg}(\varphi) + 1/\cos(\varphi) \text{ при } -\pi/2 < \varphi < \pi/2. \quad (5)$$

В зависимости от значений параметров $\Omega\tau$ и φ частотные зависимости фазовой скорости $c(\omega)$ и коэффициента поглощения $\alpha(\omega)$ среды могут иметь различные особенности. Для устойчивых диссипативных сред с допустимыми параметрами $\Omega\tau$ и φ из области (5) все те особенности, которые могут иметь фазовая скорость $c(\omega)$ и коэффициент поглощения $\alpha(\omega)$, показаны на рис. 1 и рис. 2.

Как видно из приведенных рисунков, коэффициент поглощения $\alpha(\omega)$ может монотонно возрастать с ростом частоты или иметь максимум. Фазовая скорость $c(\omega)$ также может быть монотонной, но может иметь как максимум, так и минимум или максимум и минимум одновременно.

Максимум у коэффициента поглощения $\alpha(\omega)$ существует, если выполняется условие

$$\Omega\tau > -\mathrm{tg}(\varphi) + 1/\cos(\varphi) \text{ при } -\pi/2 < \varphi < \pi/2. \quad (6)$$

Максимум фазовой скорости существует при условии

$$\Omega\tau > \mathrm{ctg}(\varphi) \text{ при } 0 < \varphi < \pi/2, \quad (7)$$

а минимум – при условии

$$\Omega\tau > \mathrm{tg}((\varphi + \pi/2)/3) \text{ при } -\pi/2 < \varphi < \pi/2. \quad (8)$$

На плоскости параметров $\Omega\tau$, φ области, в которых коэффициент поглощения и фазовая скорость имеют отмеченные выше особенности, представлены на рис. 3. Как будет показано ниже, в этих областях динамика короткого импульса оказывается различной.

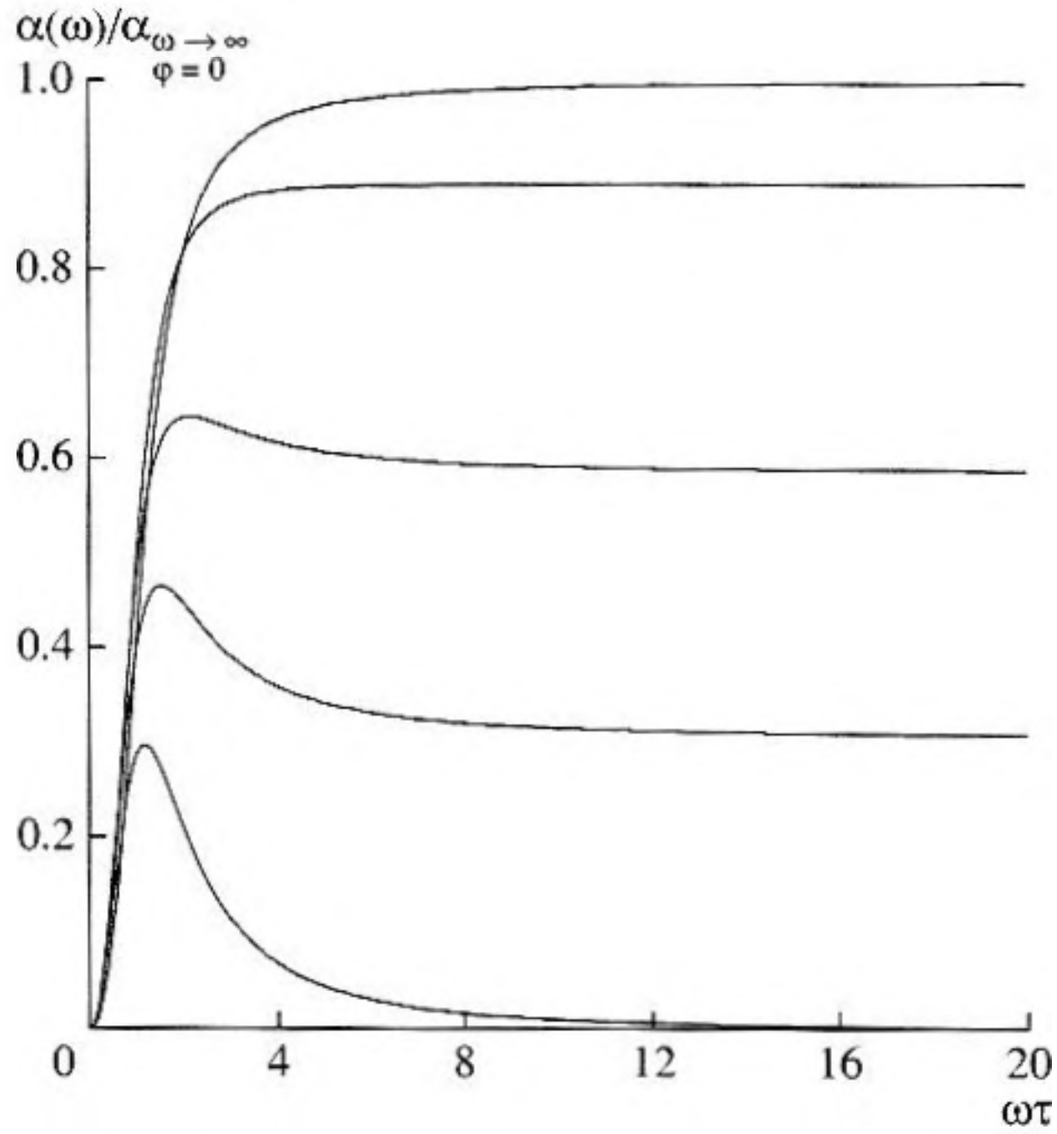

Рис. 1. Зависимость коэффициента поглощения от безразмерной частоты для различных значений $\Omega\tau$ и φ.

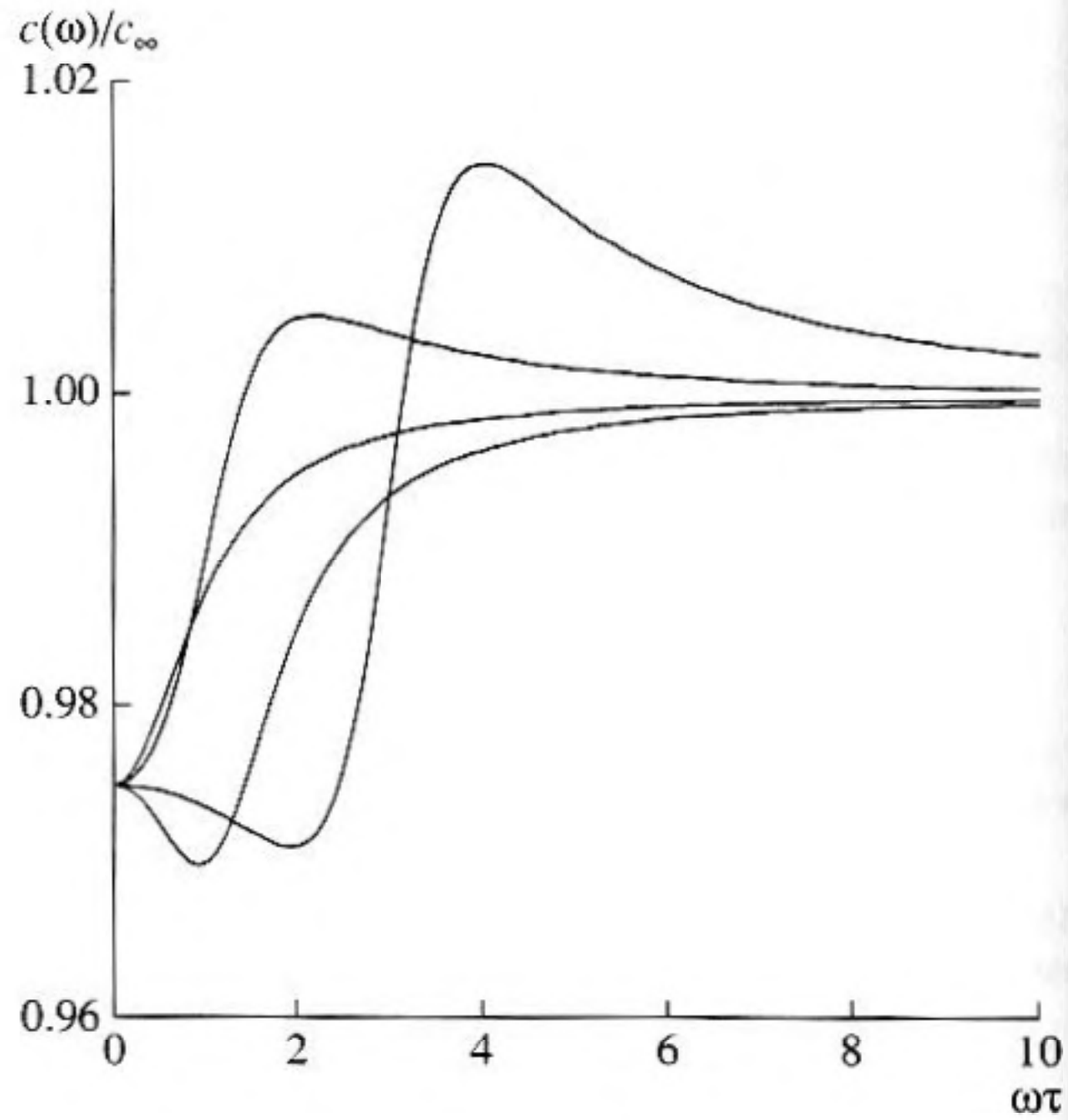

Рис. 2. Зависимость фазовой скорости от безразмерной частоты для различных значений $\Omega\tau$ и φ.

Исследование динамики импульса непосредственно с помощью представления в виде интеграла Лапласа (3) весьма затруднено. В основном для подобного исследования применяется асимптотический анализ методом перевала [3, 4, 7–9] или численные расчеты [10].

Ниже мы получим новое интегральное представление, которое более удобно для исследования закономерностей распространения коротких импульсов в средах с резонансной релаксацией.

После замены переменной интегрирования $p\tau + 1 \longrightarrow p$ выражение (3) с волновым числом (4) преобразуется к виду:

$$I(x, t) = \frac{e^{-t' - \beta\cos\varphi}}{\tau}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} dp \exp\left(pt' + \beta\frac{Ap + B}{p^2 + (\Omega\tau)^2}\right), \quad (9)$$

где введены обозначения $\beta = \Delta\rho x/2\tau c_\infty$, $t' = (t - x/c_\infty)/\tau$, а коэффициенты A и B определяются выражениями

$$A = (\cos\varphi - \Omega\tau\sin\varphi),$$
$$B = \Omega\tau(\sin\varphi + \Omega\tau\cos\varphi). \quad (10)$$

Отметим, что коэффициент A может быть как положительным, так и отрицательным.

Далее, подынтегральную функцию в (9) можно представить в виде

$$F(q(p)) = \exp\left(\beta\frac{A}{q(p)}\right), \text{ где } q = \frac{p^2 + (\Omega\tau)^2}{p + B/A}. \quad (11)$$

Тогда по теореме Эфроса об обобщенной свертке [16] интеграл Лапласа (9) можно представить в виде

$$I(x, t) = \frac{e^{-t' - \beta\cos\varphi}}{\tau}\int\limits_0^\infty d\xi F(\xi, \beta)Q(t', \xi), \quad (12)$$

где функции $F(\xi, \beta)$ и $Q(t', \xi)$ являются интегралами Лапласа

$$F(\xi, \beta) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} dp e^{p\xi}\exp\left(\frac{\beta A}{p}\right), \quad (13)$$

$$Q(t', \xi) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} dp e^{pt'}\exp\left(-\xi\frac{p^2 + (\Omega\tau)^2}{p + B/A}\right). \quad (14)$$

Проводя замену $p \longrightarrow p + B/A$ в последнем выражении, его нетрудно привести к виду:

$$Q(t', \xi) = \frac{\exp\left(-\frac{B}{A}(t' - 2\xi)\right)}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} dp \exp\left(p(t' - \xi) - \xi\frac{C}{p}\right), \quad (15)$$

где введено обозначение для положительного параметра C:

$$C = (B/A)^2 + (\Omega\tau)^2. \quad (16)$$

Таким образом, интеграл (15) имеет ту же структуру, что и (14). Интегралы типа (13), (15) могут,

например, быть вычислены путем прямого разложения экспоненты $\exp(\beta A/p)$ в ряд и дальнейшего почленного интегрирования:

$$F(\xi, \beta) = \delta(\xi) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\beta A)^k}{k!} \frac{\xi^{k-1}}{(k-1)!} \theta(\xi) = \\ = \delta(\xi) + \sqrt{\frac{\beta A}{\xi}} \left\{ \sqrt{\beta A \xi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{((2\sqrt{\beta A \xi})^2/4)^k}{k!\Gamma(1+(k+1))!} \right\} \theta(\xi). \quad (17)$$

Сумма в фигурных скобках при $A > 0$ является модифицированной функцией Бесселя первого порядка $I_1(2\sqrt{\beta A \xi})$ (см. [17]), а при $A < 0$ она преобразуется в обычную функцию Бесселя $J_1(2\sqrt{\beta |A| \xi})$, умноженную на мнимую единицу. В результате для функций $F(\xi, \beta)$ и $Q(t', \xi)$ получаются следующие представления:

$$F(\xi, \beta) = \delta(\xi) + \sqrt{\frac{\beta A}{\xi}} I_1(2\sqrt{\beta A \xi})\theta(\xi) \text{ при } A > 0,$$

$$F(\xi, \beta) = \delta(\xi) - \sqrt{\frac{\beta |A|}{\xi}} J_1(2\sqrt{\beta |A| \xi})\theta(\xi) \quad (18)$$

$$\text{при } A < 0,$$

$$Q(t', \xi) = e^{-\frac{B}{A}(t' - 2\xi)} \times \\ \times \left(\delta(t' - \xi) - \sqrt{\frac{C\xi}{t' - \xi}} J_1(2\sqrt{C\xi(t' - \xi)})\theta(t' - \xi) \right). \quad (19)$$

Подставляя выражения (18), (19) в (12), запишем фундаментальное решение для случая $A > 0$ в виде:

$$I(x, t) = \frac{e^{-\beta\cos\varphi - \left(1 - \frac{B}{A}\right)t'}}{\tau} \times \\ \times \left(\delta(t') + \sqrt{\frac{\beta A}{t'}} I_1(2\sqrt{\beta A t'})\theta(t') - \int_0^{t'} d\xi \exp\left(-2\frac{B}{A}\xi\right) \sqrt{\frac{\beta C A}{\xi}} I_1(2\sqrt{\beta A(t' - \xi)}) J_1(2\sqrt{C\xi(t' - \xi)}) \right). \quad (20a)$$

В случае $A < 0$, интегрируя аналогично (20), получим

$$I(x, t) = \frac{e^{-\beta\cos\varphi - \left(1 + \frac{B}{|A|}\right)t'}}{\tau} \times \\ \times \left(\delta(t') + \sqrt{\frac{\beta |A|}{t'}} J_1(2\sqrt{\beta |A| t'})\theta(t') + \int_0^{t'} d\xi e^{-2\frac{B}{|A|}\xi} \sqrt{\frac{\beta C |A|}{\xi}} J_1(2\sqrt{C\xi(t' - \xi)}) J_1(2\sqrt{\beta |A| (t' - \xi)}) \right). \quad (21a)$$

Первое слагаемое в (20а) и (21а) описывает упругий предвестник, который экспоненциально затухает с пройденным расстоянием по закону $\exp(-\beta\cos\varphi)$. Отметим, что для среды Лоренца $\varphi = \pi/2$ упругий предвестник, представляющий вклад предельно высоких частот, не затухает в полном соответствии с высокочастотным поведением коэффициента поглощения, который в этом случае стремится к нулю.

Два остальных слагаемых в круглых скобках, неинтегральное и интегральное (с учетом множителя перед скобкой), определяют тело импульса. При этом для случая $A < 0$ неинтегральное слагаемое соответствует предвестнику Зоммерфельда, а интегральное слагаемое описывает предвестник Бриллюэна [4, 7–9, 18–20].

Для того чтобы получить прифронтовую асимптотику импульса, заметим прежде всего, что интегралы в (20а) и (21б) имеют порядок $\sim t'^2$ при $t' \longrightarrow 0$; таким образом, профиль импульса вблизи его фронта определяется неинтегральными слагаемыми. Разлагая их в ряд по t' с точностью до линейных членов как в случае $A > 0$, так и в случае $A < 0$ получаем:

$$I(x, t) \approx \exp(-\beta\cos\varphi)\delta(t') + \\ + \frac{\beta\exp(-\beta\cos\varphi)A}{\tau}\left(1 + \left(\beta A - \left(1 - \frac{B}{A}\right)\right)t' + \ldots\right). \quad (22)$$

Это прифронтовое разложение можно получить и непосредственно из представления (2), раскладывая экспоненту $\exp(-xK(p))$ с волновым числом $K(p)$ в виде (3) в ряд при $p \longrightarrow \infty$, учитывая, таким образом, высокочастотную компоненту импульса, связанную с фронтом. Из (22), в частности, следует, что и в общем случае резонансной релаксации на фронте импульса имеется скачок величиной $(A\beta/\tau)\exp(-\beta\cos\varphi)$. Для диссипативных сред этот скачок отрицателен в области, где имеется минимум фазовой скорости (8), и положите-

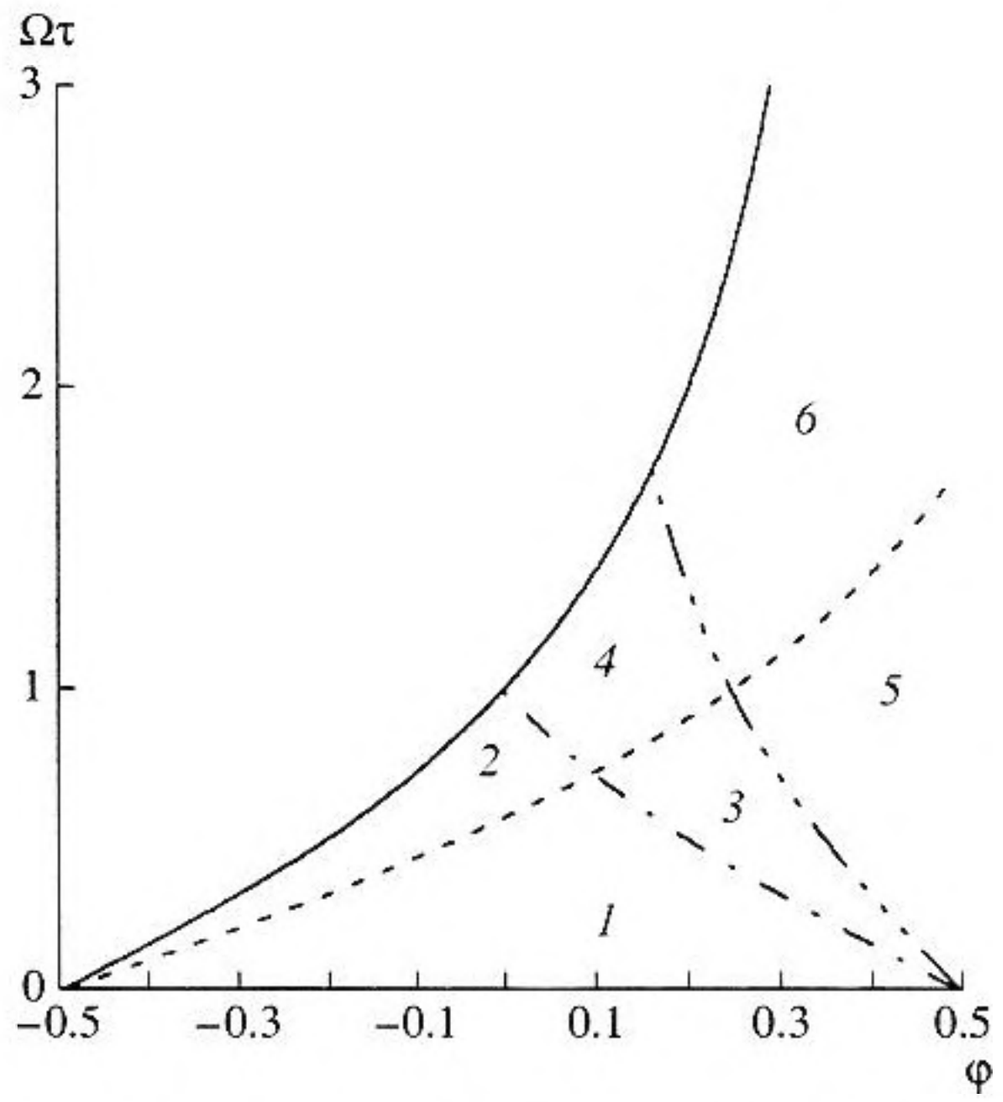

Рис. 3. Области значений параметров $\Omega\tau$ и φ диссипативных сред, соответствующие различным особенностям коэффициента поглощения и фазовой скорости (угол φ измерен в долях π): *1* – монотонность фазовой скорости и коэффициента поглощения. *2* – минимум у фазовой скорости и монотонность коэффициента поглощения. *3* – монотонность фазовой скорости и максимум у коэффициента поглощения. *4* – минимум у фазовой скорости и максимум коэффициента поглощения. *5* – максимум у фазовой скорости и максимум у коэффициента поглощения. *6* – минимум и максимум у фазовой скорости и максимум у коэффициента поглощения. $A > 0$ в областях *1*, *2*, *3* и *4*, $A < 0$ в областях *5* и *6*.

лен там, где он отсутствует. На линии (8), разделяющей эти области, $\Omega\tau = \mathrm{ctg}(\varphi)$, этот скачок равен нулю. Из прифронтовой асимптотики (22) следует также особенность поведения профиля импульса на начальном этапе его распространения, позволяющая различать среды с максимумом коэффициента поглощения и без него. Как следует из (22), коэффициент $-\left(1 - \frac{B}{A}\right)$, определяющий угол наклона профиля импульса, при малых $\beta \ll |A - B|/A^2$ положителен в областях, в которых имеется максимум у коэффициента поглощения, и отрицателен в тех областях, в которых его нет. На линии (6) $\Omega\tau = -\mathrm{tg}(\varphi) + 1/\cos(\varphi)$, разделяющей эти области, угол наклона профиля импульса на начальном этапе распространения равен нулю.

Аналитическое описание предвестника Зоммерфельда, даваемое неинтегральным слагаемым в выражении (21а), показывает, что этот предвестник представляет собой экспоненциально затухающий во времени цуг высокочастотных осцилляций, распространяющихся вместе с фронтом импульса. При этом частота осцилляций увеличивается пропорционально корню из пройденного расстояния, а их амплитуда в пространстве меняется по закону $A\beta\exp(-\beta\cos\varphi)$. Отметим, что в частном случае среды Лоренца $\varphi = \pi/2$ это приводит к линейному росту амплитуды предвестника Зоммерфельда с пройденным расстоянием для предельно короткого начального импульса.

Что касается случая $A > 0$ (20а), то нетрудно видеть, что при $\Omega\tau = 0$ имеем из (16) $C = 0$ и интегральное слагаемое обращается в нуль, в то время как оставшиеся слагаемые в точности дают результат, соответствующий распространению импульса по среде с кнезеровской (дебаевской) релаксацией [1–2, 5–6]. Однако при $\Omega\tau \neq 0$ анализ асимптотики неинтегрального слагаемого на больших временах и расстояниях показывает, что он имеет максимум в точке $t^* = \beta A/(1 - B/A)^2$, амплитуда которого меняется по закону

$$\frac{1}{\tau}\frac{(1 - B/A)^{3/2}}{\sqrt{4\pi\beta A}}\exp\left(\frac{\beta(\Omega\tau)^2}{A - B}\right).$$

Таким образом, при условии $A > B$, которое в соответствии с (6) эквивалентно условию отсутствия максимума у коэффициента поглощения, неинтегральное слагаемое экспоненциально нарастает, и единственная возможность получить физически осмысленный результат, соответствующий диссипации энергии импульса при его распространении, заключается в компенсации этого возрастания аналогичным вкладом от интегрального слагаемого при $\Omega\tau \neq 0$. С этой целью два слагаемых в (20а) – интегральное и неинтегральное – могут быть объединены в одно, и с учетом замены $\xi \longrightarrow (1 - \xi)t'$ выражение (20а) при $A > 0$ может быть записано в виде

$$I(x, t) = \frac{\exp\left[-\beta\cos\varphi - \left(1 + \frac{B}{A}\right)t'\right]}{\tau}\left(\delta(t') + \theta(t')\frac{\partial}{\partial t'}\int_0^1 d\xi e^{2\frac{B}{A}t'\xi}\sqrt{\frac{\beta A t'}{\xi}}I_1(2\sqrt{\beta A t'\xi})J_0(2\sqrt{Ct'^2\xi(1-\xi)})\right). \quad (20б)$$

Анализ интеграла в (20б) показывает, что основной вклад вносит окрестность верхнего предела интегрирования. Чтобы получить аналитическую оценку этого интеграла, можно, воспользовав-

шись теоремой о среднем, вынести монотонную функцию $\sqrt{\frac{\beta A t'}{\xi}} I_1(2\sqrt{\beta A t'\xi})$ в некоторой точке ξ_* из окрестности единицы. Производя в оставшемся интеграле замену переменной $\zeta = 1 - 2\xi$, можно преобразовать его к виду

$$\int_0^1 d\xi e^{2\frac{B}{A}t'\xi} J_0(2\sqrt{Ct'^2\xi(1-\xi)}) = \\ = e^{\frac{B}{A}t'}\int_0^1 d\zeta \operatorname{ch}\left(\frac{B}{A}t'\zeta\right) J_0(\sqrt{Ct'(1-\zeta^2)}). \quad (23)$$

Интеграл в (23) вычисляется точно [21]:

$$\int_0^1 dx \operatorname{ch}(\lambda x) J_0(\mu\sqrt{1-x^2}) = \frac{\sin(\sqrt{\lambda^2-\mu^2})}{\sqrt{\lambda^2-\mu^2}}, \quad (24)$$

и тогда, учитывая явный вид коэффициентов A, B и C, можно получить следующую аналитическую оценку выражения (20б):

$$I(x,t) = \frac{\exp(-\beta\cos\varphi)}{\tau}\Big(\delta(t') + \\ + e^{-t'}\theta(t')\left(\frac{B}{A} + \frac{\partial}{\partial t'}\right)\left[\sqrt{\frac{\beta A t'}{\xi_*}} I_1(2\sqrt{\beta A t'\xi_*})\frac{\sin(\Omega\tau t')}{\Omega\tau t'}\right]\Big). \quad (25)$$

На малых расстояниях $\sqrt{\beta|A|t'} \ll 1$, разлагая модифицированную функцию Бесселя по этому параметру, можно получить асимптотическую оценку функции Грина $I(t, x)$

$$I(x,t) \approx \frac{1}{\tau}\exp(-\beta\cos\varphi)\Big[\delta(t') + \\ + 2\beta e^{-t'}\left(\frac{B}{\Omega\tau}\sin(\Omega\tau t') + A\cos(\Omega\tau t')\right)\Big], \quad (26а)$$

которую, используя выражения (10) для величин A и B, также можно записать в виде

$$I(x,t) \approx \frac{1}{\tau}\exp(-\beta\cos\varphi)\{\delta(t') + \\ + \beta e^{-t'}[\cos(\Omega\tau t' - \varphi) + \Omega\tau\sin(\Omega\tau t' - \varphi)]\}. \quad (26б)$$

Таким образом, из выражений (25)–(26) следует, что при $\Omega\tau \neq 0$ профиль тела импульса промодулирован осцилляциями с частотой ω.

Возвращаясь к оценке (25), нетрудно видеть, что на больших временах и расстояниях $\sqrt{\beta|A|t'} \gg 1$ амплитуда тела импульса контролируется экспоненциальным множителем

$$\exp(-\beta\cos\varphi + 2\sqrt{\beta A t'\xi_*} - t'),$$

который в точке $t' = \beta A\xi_*$ имеет максимум, равный $\exp[-\beta(\cos\varphi - A\xi_*)]$.

Показатель экспоненты в этом выражении всегда отрицателен при условии $\xi_* < \cos\varphi/A \equiv \equiv 1/(1 - \Omega\tau\operatorname{tg}\phi)$, которое всегда выполняется в интервале $\xi_* \in [0, 1]$, где, согласно теореме о среднем, находится значение ξ_*. Таким образом, аналитическая оценка (25) соответствует экспоненциальному затуханию амплитуды тела импульса на больших расстояниях.

Представление (21а) для случая $A < 0$ с учетом той же замены $\xi \longrightarrow (1-\xi)t'$ в интегральном слагаемом также можно представить в виде

$$I(x,t) = \frac{\exp\left[-\beta\cos\varphi - t'\left(1 - \frac{B}{|A|}\right)\right]}{\tau}\times \\ \times\left[\delta(t') - \sqrt{\frac{\beta|A|}{t'}}e^{-2\frac{B}{|A|}t'} J_1(2\sqrt{\beta|A|t'})\theta(t') + \theta(t')\int_0^1 d\xi e^{-2\frac{B}{|A|}t'\xi}\sqrt{\frac{\beta|A|Ct'}{1-\xi}} J_1(2\sqrt{\beta|A|t'\xi}) J_1(2\sqrt{Ct'^2\xi(1-\xi)})\right]. \quad (21б)$$

На малых временах или расстояниях, где $\sqrt{\beta|A|t'} \ll 1$, разлагая функции Бесселя с данным аргументом в интегральном и неинтегральном слагаемых по этому параметру, можно в полной аналогии с предыдущим случаем получить те же самые асимптотики (26), но для значений параметров из области $A < 0$ (7).

Более точную асимптотическую оценку интегралов (20б), (21б) на больших временах и расстояниях можно получить методом перевала, но это исследование, выходящее за рамки данной статьи, будет представлено отдельно.

Полученные выражения (20), (21) представляют главный результат настоящей работы. В от-

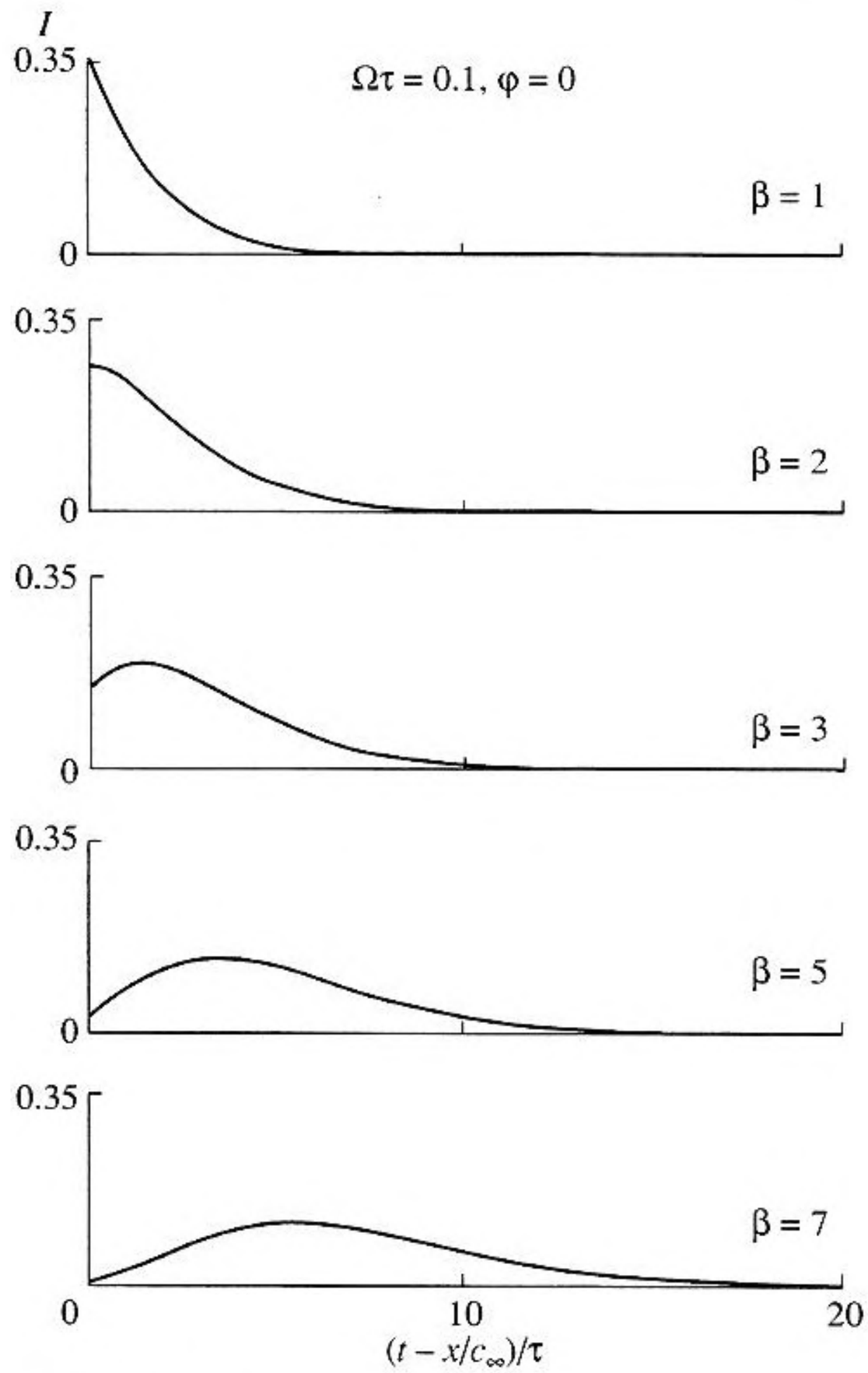

Рис. 4. Динамика тела импульса среде с параметрами из области 1: $\Omega\tau = 0.1$, $\varphi = 0$ для различных безразмерных расстояний из интервала $\beta = 0.5$–10.

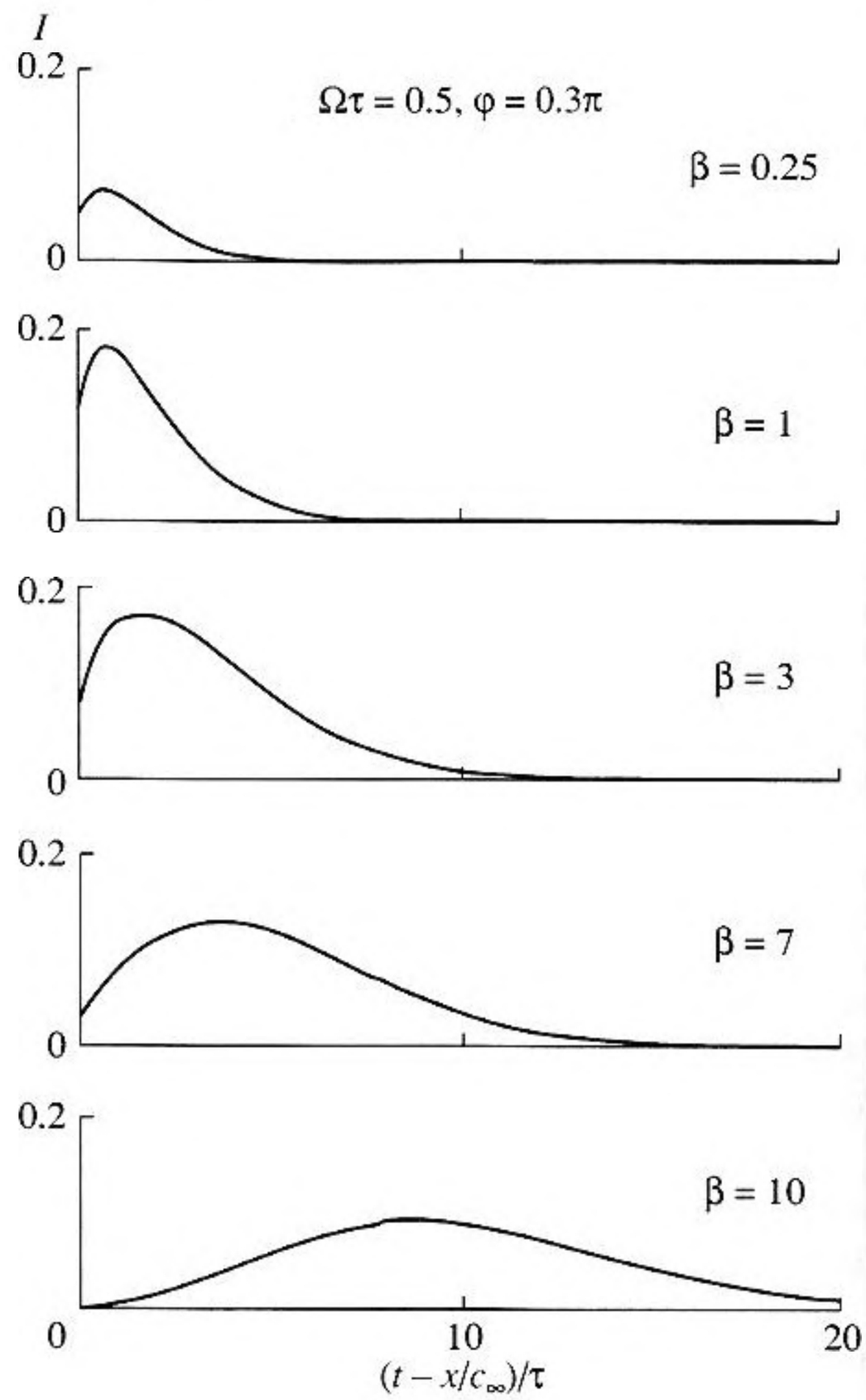

Рис. 5. Динамика тела импульса среде с параметрами из области 3: $\Omega\tau = 0.5$, $\varphi = 0.3\pi$ для различных безразмерных расстояний из интервала $\beta = 0.25$–10.

личие от представления (3) в виде контурного интеграла в плоскости комплексного переменного, представления (20), (21) действительны и позволяют относительно простым интегрированием рассчитывать профили импульсов для произвольных значений параметров. Другой важной особенностью точных представлений (20), (21) является то, что в них как отдельные слагаемые выделены высокочастотные вклады от упругого (дельта-функционального) предвестника и предвестника Зоммерфельда (для $A < 0$).

Таким образом, полученные выражения позволяют проанализировать распространение короткого импульса во всей области распространения по любой среде, дисперсионно-диссипативные свойства которой можно описать одним процессом резонансной релаксации. Характер распространения импульса в этом случае определяется двумя величинами: $\Omega\tau$ и φ.

Асимптотический анализ выражений (20), (21) и прямые численные расчеты по этим формулам позволяют представить полную картину динамики распространения импульса при различных значениях параметров $\Omega\tau$ и φ. При этом особенности динамики формы импульса оказываются согласованными с особенностями поведения фазовой скорости и коэффициента поглощения в областях, показанных на рис. 3.

Рассмотрим вначале среды, для которых параметр A положителен. Будем условно называть такие среды релаксационными, поскольку динамика короткого импульса в таких средах похожа на его динамику в модели Дебая с экспоненциальной релаксацией. Значения параметров $\Omega\tau$ и φ в этом случае находятся в областях 1, 2, 3, 4 (см. рис. 3).

В области 1 и фазовая скорость, и коэффициент поглощения монотонны. Предельным случаем сред такого типа при $\Omega \longrightarrow 0$ являются среды с экспоненциальной релаксацией [14] (в электро-

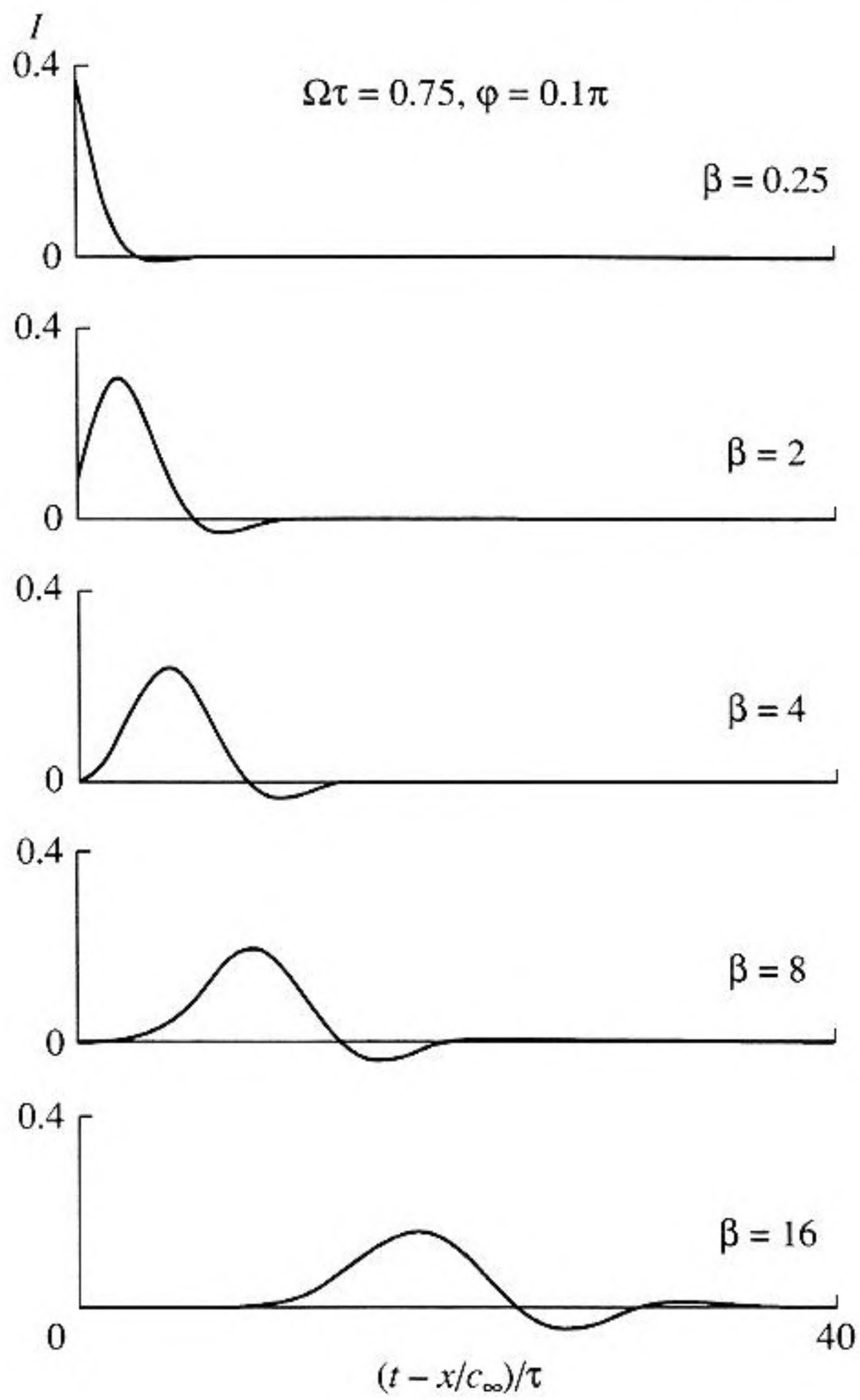

Рис. 6. Динамика тела импульса среде с параметрами из области 2: $\Omega\tau = 0.75$, $\varphi = -0.1\pi$ для различных безразмерных расстояний из интервала $\beta = 0.25$–16.

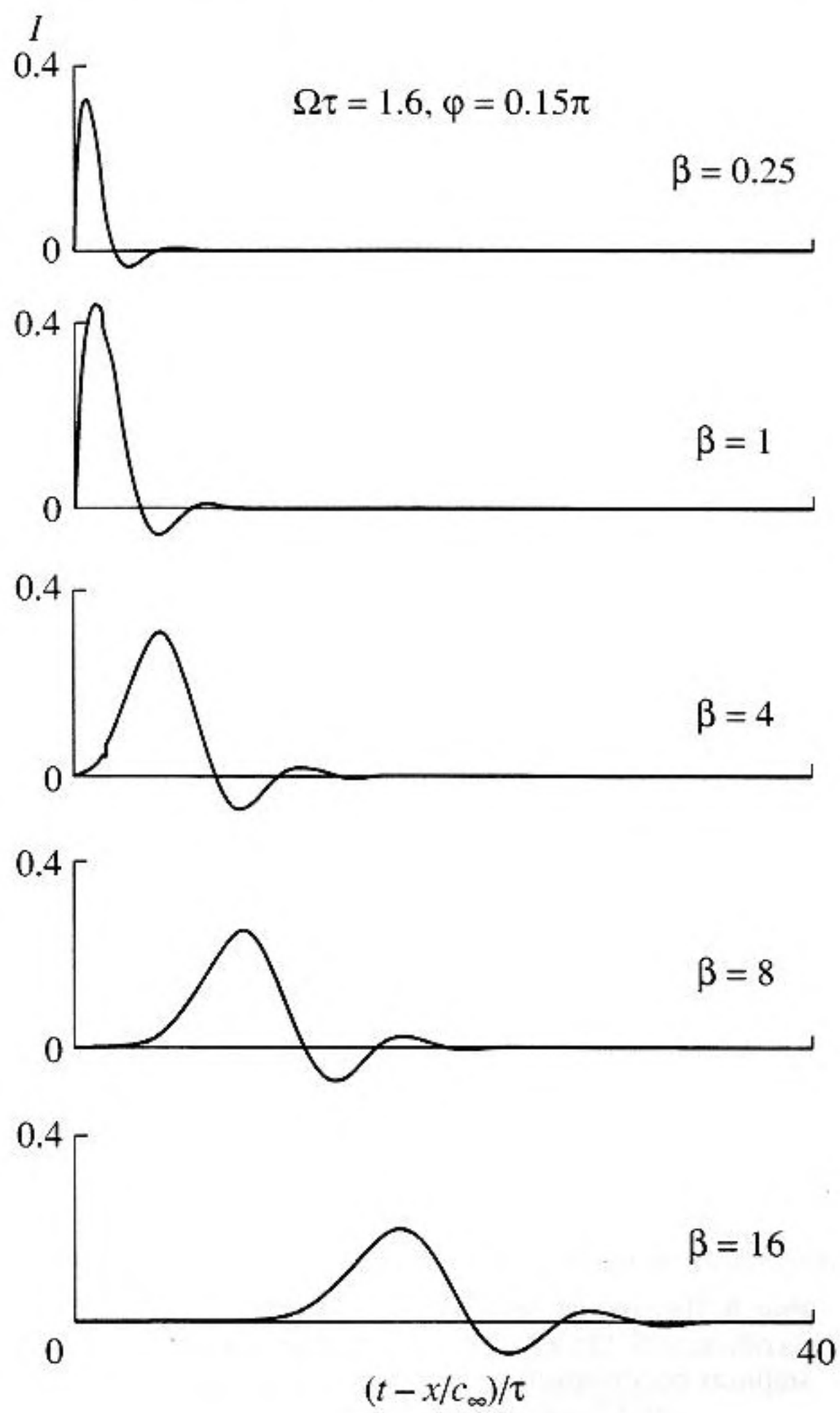

Рис. 7. Динамика тела импульса среде с параметрами из области 4: $\Omega\tau = 1.6$, $\varphi = 0.15\pi$ для различных безразмерных расстояний из интервала $\beta = 0.25$–16.

динамике это модель Дебая). Для $\Omega\tau > 0$ динамика временнóго профиля импульса также незначительно отличается от чисто релаксационной. Как и в средах с экспоненциальной релаксацией, в этом более общем случае тело импульса имеет на малых расстояниях от источника вид экспоненциально спадающего во времени хвоста. На больших расстояниях тело импульса трансформируется в импульс гауссовой формы, который формируется низкими частотами. Однако, в отличие от сред с чисто экспоненциальной релаксацией, в средах с $\Omega\tau > 0$ на хвосте тела импульса имеются малые осцилляции, затухающие с пройденным расстоянием. Описанная динамика тела импульса среде с параметрами из области 1: $\Omega\tau = 0.1$, $\varphi = 0$ показана на рис. 4 для различных безразмерных расстояний из интервала $\beta = 1$–7. Малые осцилляции, возникающие на хвосте импульса, на рисунках визуально неразличимы.

В области 3 фазовая скорость монотонна, а коэффициент поглощения имеет максимум. В целом динамика импульса при его распространении аналогична предыдущему случаю, за исключением того, что тело импульса уже на начальном этапе распространения имеет куполообразный профиль. Это можно показать, анализируя прифронтовую асимптотику $t' \longrightarrow 0$ выражения (22) при $\beta \longrightarrow 0$, поскольку в этом случае линейный по t' коэффициент в этом разложении положителен для $\Omega\tau$ и φ из области 3, и, следовательно, касательная к профилю тела импульса имеет вблизи фронта положительный наклон. Описанная динамика короткого импульса показана на рис. 5 для среды с параметрами из области 3: $\Omega\tau = 0.5$, $\varphi = 0.3\pi$ на различных безразмерных расстояниях из интервала $\beta = 0.25$–25.

В области 2 фазовая скорость имеет минимум, а коэффициент поглощения монотонно возраста-

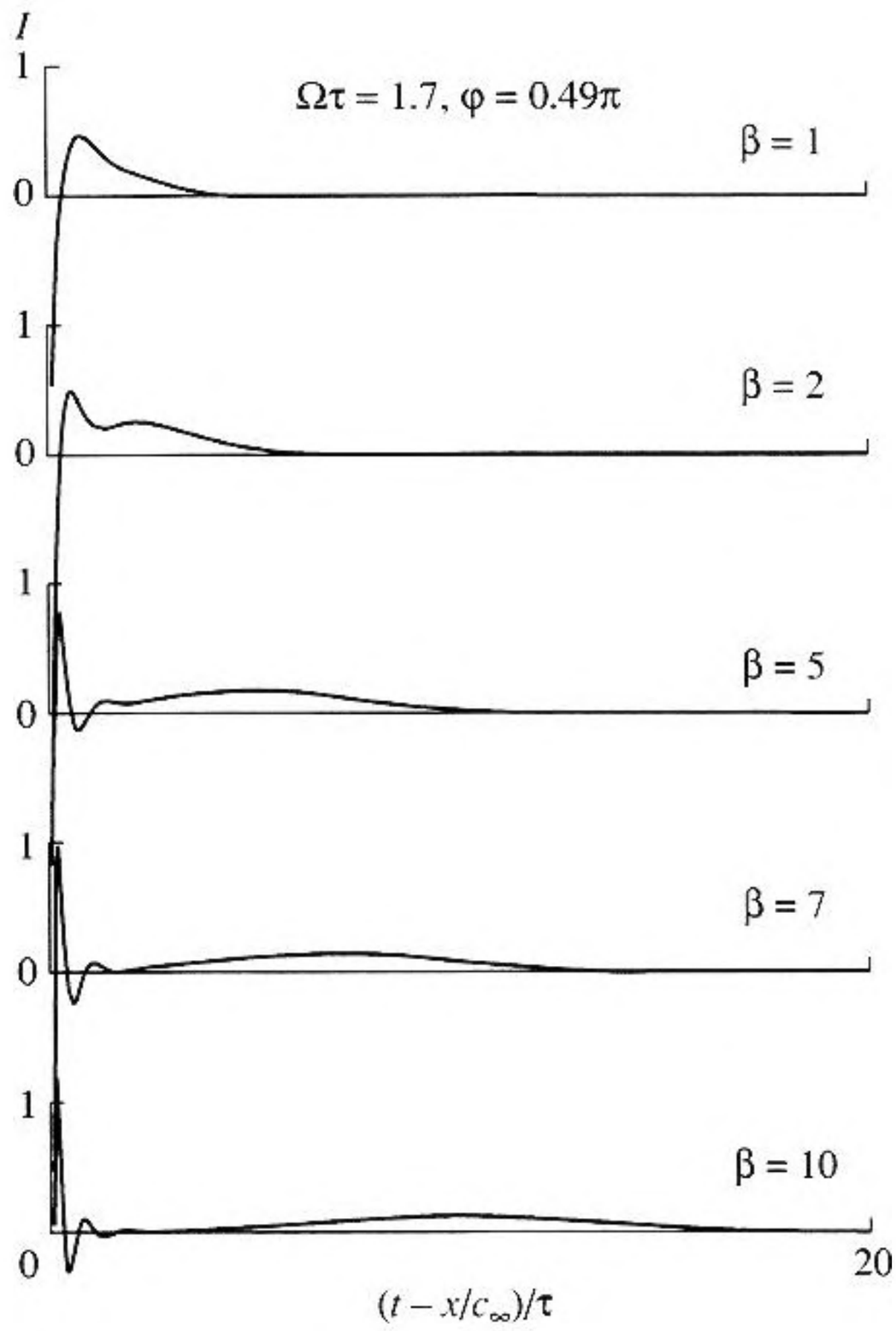

Рис. 8. Динамика тела импульса среде с параметрами из области 5: $\Omega\tau = 1.7$, $\varphi = 0.49\pi$ для различных безразмерных расстояний из интервала $\beta = 1$–16.

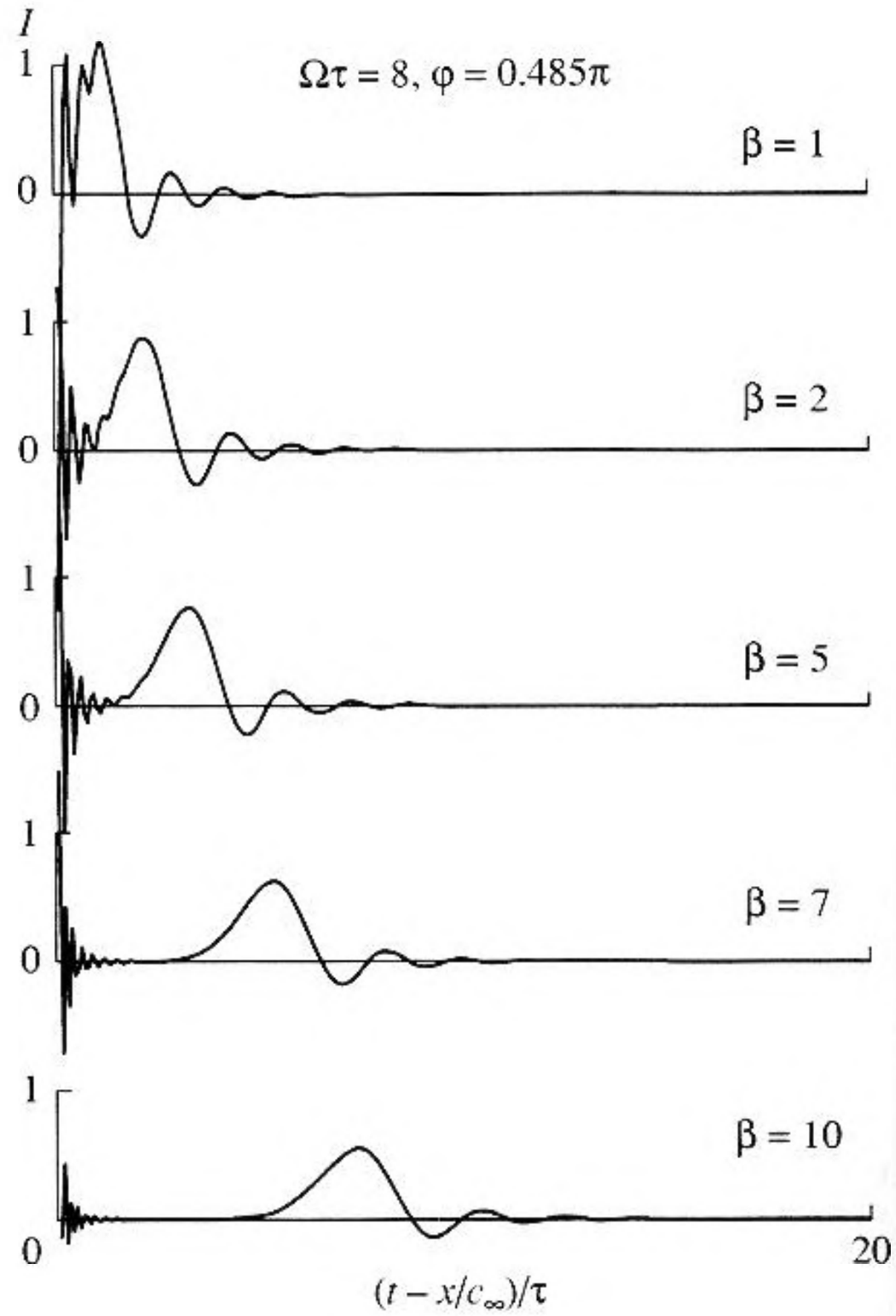

Рис. 9. Динамика тела импульса среде с параметрами из области 6: $\Omega\tau = 8$, $\varphi = 0.49\pi$ для различных безразмерных расстояний из интервала $\beta = 1$–10.

ет. Появление минимума у фазовой скорости приводит к тому, что осцилляции тела импульса по мере распространения усиливаются. Качественно это можно объяснить следующим образом. Окрестность минимума фазовой скорости, согласно методу стационарной фазы, формирует устойчивый волновой пакет в окрестности этой частоты, в то время как наличие монотонного по частоте поглощения сохраняет волны лишь в окрестности нулевой частоты. Таким образом, форму тела импульса на больших расстояниях от источника определяют два конкурирующих процесса: более быстрое затухание высоких частот и, вследствие этого, "выживание" низкочастотной компоненты и формирование устойчивой группы волн с частотами в окрестности минимума фазовой скорости. Асимптотический анализ показывает, что на малых расстояниях от источника профиль тела импульса имеет вид экспоненциально спадающего хвоста, модулируемого косинусом с положительной начальной фазой (меньшей $\pi/2$). Соответствующая динамика короткого импульса для среды из области 2 с параметрами $\Omega\tau = 0.75$, $\varphi = -0.1\pi$ показана на рис. 6а, 6б для безразмерных расстояний из интервала $\beta = 0.25$–105.

В области 4 фазовая скорость имеет минимум, а коэффициент поглощения максимум. Так же, как и для сред из области 2, осцилляции тела импульса по мере распространения усиливаются. Отличие сред с параметрами из области 4 от сред из области 2 аналогично их отличию для областей 1 и 3 – наклон касательной к профилю тела импульса при малых β вблизи фронта положителен. При малых β профиль тела импульса представляет собой затухающую экспоненту, модулированную синусом с положительной начальной фазой, меньшей $\pi/2$. На рис. 7 показана соответствующая динамика импульса в среде с параметрами из области 4: $\Omega\tau = 1.6$, $\varphi = 0.15\pi$ для безразмерных расстояний из интервала $\beta = 0.25$–16.

Рассмотрим теперь среды, для которых параметр A отрицателен. Будем условно называть такие среды резонансными, поскольку динамика короткого импульса в таких средах похожа на его динамику в модели Лоренца. Значения параметров $\Omega\tau$ и φ в этом случае находятся в областях 5 и 6 (см. рис. 3).

В этих областях фазовая скорость имеет максимум, превышающий ее высокочастотный предел c_∞. При этом частоты, имеющие фазовую скорость, большую, чем скорость распространения фронта импульса c_∞, формируют в его окрестности часть тела импульса, называемую в электродинамике предвестником Зоммерфельда [4, 18–20]. Эту часть тела импульса описывает второе слагаемое в представлении (20). Более низкочастотные гармоники, распространяющиеся с фазовыми скоростями, меньшими c_∞, формируют медленно затухающую низкочастотную часть тела импульса, называемую предвестником Бриллюэна [4, 18–20]. Наличие максимума у коэффициента поглощения приводит к усиленному поглощению промежуточных частот и отдельному формированию каждого из указанных предвестников.

В области 5 как коэффициент поглощения, так и фазовая скорость имеют максимум. В области низких частот, которые ответственны за формирования предвестника Бриллюэна, коэффициент затухания и фазовая скорость являются монотонно возрастающими функциями, аналогично их поведению в области 1 и 3, что приводит к асимптотическому формированию предвестника Бриллюэна в форме гауссова импульса. Анализ прифронтовой асимптотики $t' \longrightarrow 0$ тела импульса, формируемой высокими частотами и соответствующей предвестнику Зоммерфельда, показывает, что она начинается с отрицательной фазы. При этом амплитуда предвестника Зоммерфельда, как это следует из выражения (20), убывает на больших расстояниях по экспоненциальному закону $\exp(-\beta\cos\varphi)$, и для сред, близких к модели Лоренца $\varphi \longrightarrow \pi/2$, это затухание может быть малым в соответствии с поведением коэффициента поглощения на высоких частотах. Предвестник Зоммерфельда представляет собой цуг осцилляций с экспоненциальной огибающей. Частота осцилляций, определяемая аргументом функции Бесселя второго слагаемого в выражении (20), растет с пройденным расстоянием, а общая длительность предвестника Зоммерфельда определяется экспоненциальной зависимостью $\exp\{-t'(1 + B/|A|)\}$. Соответствующая динамика импульса в среде с параметрами из области 5: $\Omega\tau = 1.7$, $\varphi = 0.49\pi$ показана на рис. 8 для безразмерных расстояний из интервала $\beta = 1$–10.

В области 6 коэффициент поглощения имеет максимум, а фазовая скорость имеет как максимум, так и низкочастотный минимум. Поведение предвестника Зоммерфельда для этого случая аналогично его поведению в области 5. Поведение же предвестника Бриллюэна, напротив, аналогично его поведению для области 2, где на процесс его формирования влияние оказывают два фактора: прогрессивное поглощение относительно более высокочастотных компонент и формирование устойчивой группы волн в окрестности минимума фазовой скорости. Наличие двух этих факторов приводит к формированию предвестника Бриллюэна в виде цуга низкочастотных осцилляций, затухающих с пройденным расстоянием по степенному закону. Описанная динамика тела импульса в среде с параметрами из области 6: $\Omega\tau = 8$, $\varphi = 0.49\pi$ показана на рис. 9 для безразмерных расстояний из интервала $\beta = 1$–10.

Таким образом, основываясь на обобщенном уравнении состояния произвольных линейных сред с локальным откликом [1], в работе получено новое интегральное представление функции Грина задачи о распространении плоского короткого импульса в среде с единственным релаксационным процессом. При этом динамика импульса, характерная для сред Дебая и Лоренца, является частным случаем полученного решения. На основе полученного представления проанализированы все возможные в линейных диссипативных средах с локальным откликом типы динамики профиля короткого импульса при его распространении. Установлено соответствие между особенностями допустимого для диссипативных сред частотного поведения фазовой скорости и коэффициента поглощения в плоскости параметров $\Omega\tau$, φ и динамикой профиля короткого импульса при его распространении по среде.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 03-02-16934.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ларичев В.А., Максимов Г.А.* О едином описании релаксационных и резонансных свойств сред в рамках термодинамического подхода // Акуст. журн. 1998. Т. 44. № 6. С. 814–822.
2. *Вайнштейн Л.А.* Распространение импульсов // УФН. 1976. Т. 118. № 2. С. 339–367.
3. *Кельберт М.Я., Сазонов И.А.* Распространение импульсов в жидкостях. М.: Наука, 1991. 158 с.
4. *Oughstun K.E., Sherman G.S.* Electromagnetic pulse propagation in casual dielectrics. Berlin: Springer-Verlag, 1994. С.
5. *Максимов Г.А.* О возможностях импульсной акустодиагностики однородных релаксационных сред // Акуст. журн. 1996. Т. 42. № 4. С. 541–550.
6. *Ларичев В.А., Максимов Г.А.* Распространение короткого акустического импульса в среде с двумя релаксационными процессами. Анализ точного решения. // Акуст. журн. 1999. Т. 45. № 6. С. 844–856.
7. *Васильев В.А., Кельберт М.Я., Сазонов И.А., Чабан И.А.* Распространение сверхкоротких световых импульсов в резонансной поглощающей среде // Оптика и спектроскопия. 1988. Т. 64. № 4. С. 862–868.
8. *Oughstun K.E., Balictsis C.M.* Generalized asymptotic description of the propagated field dynamics in Gaussian

pulse propagation in a linear, causally dispersive medium // Phys. Rev. E. 1997. V. 55. № 2. P. 1910–1921.

9. *Oughstun K.E., Sherman G.S.* Uniform description of electromagnetic pulse propagation in linear dispersive medium with absorption (the Lorentz medium) // J. Opt. Soc. Amer. A. September 1989. V. 6. №. 9. P. 1394–1420.
10. *Xiao H., Oughstun K.E.* Hybrid numerical asymptotic code for dispersive-pulse propagation calculations // J. Opt. Soc. Amer. A. May 1998. V. 15. № 5. P. 1256–1267.
11. *Ларичев В.А., Максимов Г.А.* Общие закономерности распространения короткого импульса в среде с резонансной релаксацией / Сб. трудов 10 сессии РАО. М.: ГЕОС, 2000. Т. 1. С. 69–73.
12. *Мандельштам Л.И., Леонтович М.А.* К теории поглощения звука в жидкостях // ЖЭТФ, 1937. Т. 7. № 3. С. 438–444.
13. *Гинзбург В.Л.* Распространение электромагнитных волн в плазме. М.: Наука, 1967. 552 с.
14. *Debye P.* Polar Molecules. Dover, New York, 1929. P.
15. *Новик А., Берри Б.* Релаксационные явления в кристаллах. М.: Атомиздат, 1975. 145 с.
16. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987. 736 с.
17. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 830 с.
18. *Sommerfeld A.* Uber die fortpflanzung des lichtes in disperdierenden medien // Ann. Phys. 1914. V. 44. P. 177–202.
19. *Brillouin L.* Uber die fortpflanzung des licht in disperdierenden medien // Ann. Phys. 1914. V. 44. P. 203–240.
20. *Brillouin L.* Wave Propagation and Group Velocity. New York: Academic Press, 1960.
21. *Прудников А.П., Брычков Ю.А. Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Наука, 1983. 752 с.

Propagation of a Short Pulse in a Medium with a Resonance Relaxation: The Exact Solution

G. A. Maksimov and V. A. Larichev

A new analytical representation is obtained for the fundamental solution (Green's function) to the problem of the propagation of a short pulse in an arbitrary medium with a single resonance relaxation process. The analytical representation is based on the generalized function of the local response of a linear medium [1] and includes the well-known Debye and Lorentz relaxation models as particular cases. The representation is used to determine the complete set of possible types of behavior for a short pulse propagating in the medium.