АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2003, том 49, № 5, с. 667–675

УДК 534.222

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ В СРЕДАХ С ТРЕЩИНАМИ, ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЕННЫМИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ

© 2003 г. В. Е. Назаров, А. В. Радостин

Институт прикладной физики РАН

603600 Нижний Новгород, ул. Ульянова 46

E-mail: nazarov@hydro.appl.sci-nnov.ru

Поступила в редакцию 15.05.2002 г.

Получено нелинейное (в кубичном приближении) релаксационное уравнение состояния для стержня, содержащего трещины, частично заполненные несжимаемой вязкой жидкостью и проведено теоретическое исследование нелинейных эффектов самовоздействия и взаимодействия продольных упругих волн в стержне, содержащем одинаковые и распределенные по радиусам трещины. Определены линейные и нелинейные акустические параметры для процессов самовоздействия и взаимодействия упругих волн в таком стержне.

1. ВВЕДЕНИЕ

Исследования нелинейных акустических эффектов в микронеоднородных средах актуальны как для развития общей теории нелинейных волновых процессов, так и для создания нелинейных методов диагностики подобных сред [1–3]. Для решения таких задач необходимо знание уравнения состояния среды, т.е. обобщенной зависимости "напряжение–деформация". Эту зависимость можно восстановить или реконструировать феноменологически (по крайней мере, в общих ее чертах) на основе подробных экспериментальных исследований различных нелинейных эффектов или получить теоретически из физической модели среды, основанной на знании ее микроструктуры, т.е. тех дефектов структуры, которые в основном и определяют акустическую нелинейность среды. Естественно, знание дефектов микроструктуры среды предполагает и знание уравнения состояния одного ее дефекта, поскольку именно оно определяет уравнение состояния среды, содержащей их большое количество. В работе [4] было получено (в кубичном приближении теории возмущений) уравнение состояния для нелинейного дефекта идеального твердого тела – трещины, частично заполненной несжимаемой ньютоновской жидкостью (рис. 1). Это уравнение имеет вид

$$\sigma(d) = K_0 d + \beta\dot{d} - gd^2 - \gamma d\dot{d} - qd^3 + \delta d^2\dot{d}, \quad (1)$$

где: σ – нормальное напряжение, действующее на поверхность трещины, $K_0 = K + (9\alpha\mu_0 R_0/4H^3)F_1(\theta) > 0$, $K = 3\pi E/8(1-\nu^2)R$, E и ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона твердого тела, R и R_0 – радиус трещины и радиус окружности, ограничивающей жидкость на поверхности трещины, $\mu_0 = (R_0/R)^2$ – равновесная концентрация жидкости в трещине, $\beta = 3\mu_0\eta R_0^2/H^3$, $g = 324\alpha\mu_0 R_0^2 F_2(\theta)/35H^5$, $\gamma = 18\mu_0\eta R_0^2/H^4$, $q = -81\alpha\mu_0 R_0^3 F_3(\theta)/8H^7$, $\delta = 72\mu_0\eta R_0^2/H^5$, H и $2d$ – равновесное (при $\sigma = 0$) расстояние между поверхностями трещины и изменение этого расстояния под действием напряжения $\sigma \neq 0$, $H \gg 2d$, α и η – коэффициент поверхностного натяжения и динамическая вязкость жидкости, θ – равновесный краевой (или контактный) угол, $F_{1,2,3}(\theta)$ – функции контактного угла.

При выводе уравнения (1) полагалось, что поверхности трещин вне жидкости являются сухими и скольжение линии трехфазного контакта (твердое тело – жидкость – газ) вдоль этих поверхностей при относительно небольшой деформации трещины (вследствие адгезии, т.е. прилипания вязкой жидкости к твердому телу) не происходит. Здесь, однако, возможна другая ситуация (и она, по-видимому, вполне реальна), когда поверхности трещины покрыты тонкой пленкой той же жидкости, смачивающей эти поверхности; в этом случае линия трехфазного контакта может по этой пленке скользить. В такой трещине мениск вязкой жидкости будет вести себя подобно мениску для жидкости идеальной (в том смысле, что краевой угол будет неизменным), однако вязкая жидкость будет оказывать сопротивление при динамической деформации трещины. При $R_0 \gg H$ везде, кроме области, близкой к мениску, течение жидкости в трещине будет близко к пуазейлевому, и поэтому такая трещина будет обладать аналогичной диссипативной нелинейностью, что и описанная выше, но ее упругая нелинейность будет соответствовать упругости трещины, частично заполненной идеальной жидкостью. Таким об-

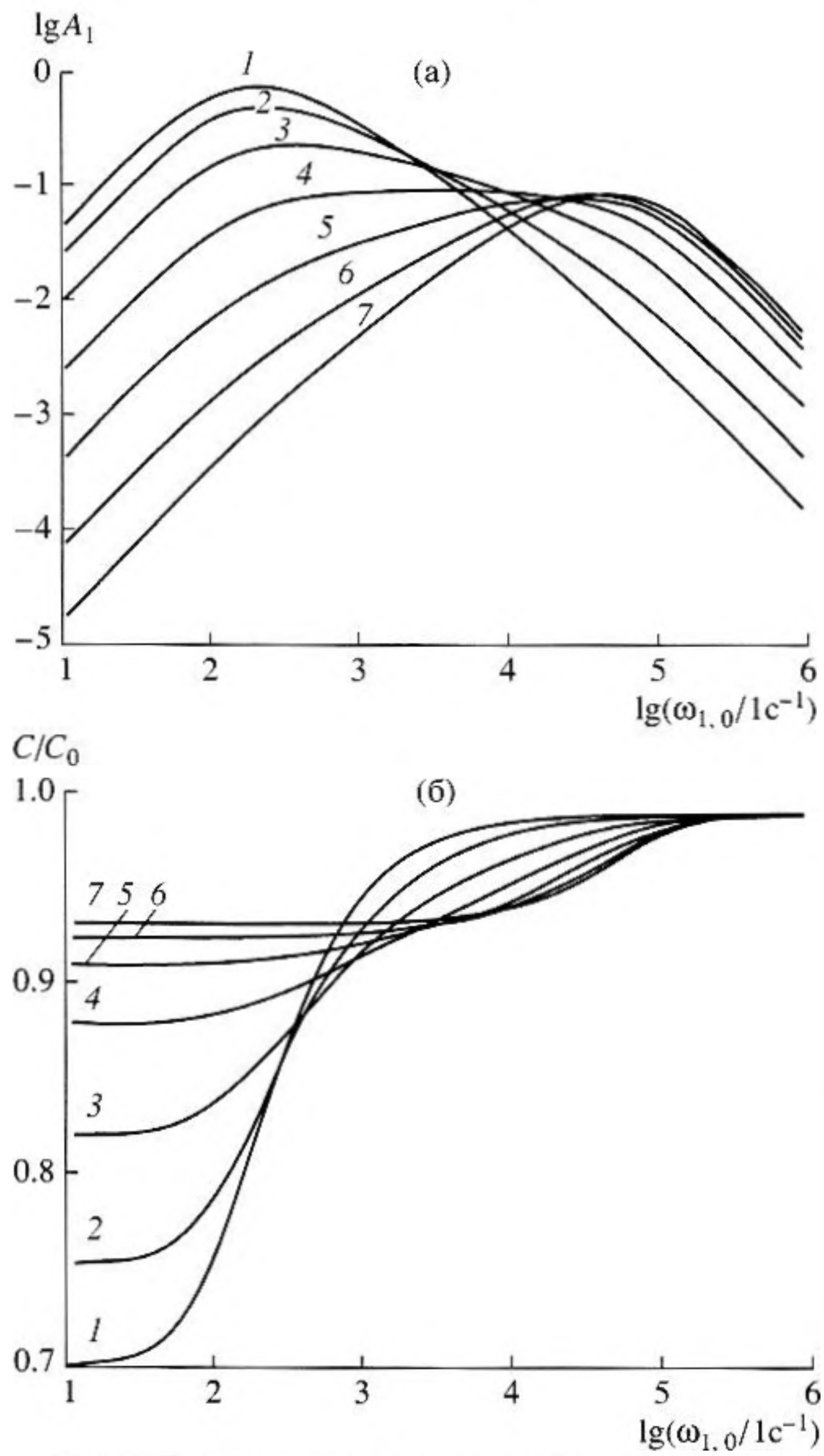

Рис. 1. Частотные зависимости линейного декремента затухания A_1 (а) и относительной скорости $C/C_0 = 1 - B_1$ (б) волны накачки при различных значениях показателя n функции распределения. Номера кривых соответствуют показателю степени n фунции распределения (21).

разом, трещина с пленкой жидкости будет также описываться уравнением состояния (1), в котором упругие коэффициенты K_0, g и q будут определяться как для идеальной жидкости [4], а неупругие β, γ и δ – как для вязкой:

$$K_0 = K - 8\alpha\mu_0\cos\theta/H^2,$$

$$g = -24\alpha\mu_0\cos\theta/H^3, \quad q = 64\alpha\mu_0\cos\theta/H^4,$$

$$\beta = 3\mu_0\eta R_0^2/H^3,$$

$$\gamma = 30\mu_0\eta R_0^2/H^4, \quad \delta = 180\mu_0\eta R_0^2/H^5,$$

где $K_0 > 0$ при $18\alpha\mu_0\cos\theta/KD^2 < 1$, R_0 – радиус окружности, ограничивающей жидкость на поверхности трещины при $\sigma = 0$, D – расстояние между поверхностями трещины без жидкости.

Как следует из уравнения (1), акустическая нелинейность подобных трещин содержит две составляющие: упругую (или реактивную) и неупругую (или диссипативную), причем каждая из этих составляющих содержит квадратичное и кубичное по d слагаемые; упругая нелинейность связана с капиллярным давлением в жидкости, а неупругая – с вязким. Вполне естественно, что и твердое тело с такими трещинами также будет обладать реактивной и диссипативной, квадратичной и кубичной, нелинейностями. При распространении и взаимодействии акустических волн в такой среде будет проявляться большое разнообразие нелинейных эффектов, в частности, за счет квадратичной нелинейности будет наблюдаться генерация волн комбинационных частот (второй гармоники, суммарной и разностной частот) и самодетектирование высокочастотных импульсов, а за счет кубичной – генерация третьей гармоники, самовоздействие, затухание или "усиление" звука на звуке и т.д. Вообще говоря, последние эффекты могут быть обусловлены не только кубичной, но и квадратичной нелинейностью, поскольку процессы третьего порядка на квадратичной нелинейности качественно могут давать такой же результат, что и процессы второго порядка на нелинейности кубичной [5, 6]. В обоих этих процессах амплитудные зависимости нелинейных эффектов являются одинаковыми, однако их зависимости от расстояния x различны. Так, например, амплитуда третьей гармоники, генерируемой в среде за счет кубичной нелинейности, пропорциональна x, а за счет квадратичной (поскольку она возникает через вторую гармонику) – пропорциональна x^2 [5, 6]. Очевидно, что на относительно малых расстояниях третья гармоника будет обусловлена в основном кубичной нелинейностью, а не квадратичной. Аналогичные закономерности будут проявляться и для других нелинейных эффектов. Учет совместного влияния квадратичной и кубичной нелинейностей среды на процессы взаимодействия и самовоздействия акустических волн является не столько сложной, сколько громоздкой и утомительной задачей, поэтому в настоящей работе мы ограничимся изучением процессов, связанных только с кубичной (реактивной и диссипативной) нелинейностью и проявляющихся на относительно малых расстояниях, когда влияние квадратичной нелинейности можно не учитывать. Здесь мы рассмотрим самовоздействие гармонической волны и генерацию ее третьей гармоники, а также влияние сильной низкочастотной волны накачки на распространение слабой высокочастотной волны в среде с трещинами, частично заполненными несжимаемой вязкой жидкостью, но сначала мы по-

лучим уравнение состояния твердого тела, содержащего большое количество таких трещин.

2. УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ СТЕРЖНЯ, СОДЕРЖАЩЕГО БОЛЬШОЕ КОЛИЧЕСТВО ТРЕЩИН

Наиболее просто уравнение состояния можно получить для стержня с трещинами, ориентированными вдоль его оси и однородно распределенными в его объеме. Здесь мы будем полагать концентрацию трещин достаточно малой, т.е расстояние между трещинами существенно больше их радиусов, для того, чтобы взаимодействием трещин можно было пренебречь [7]. (Предполагается также, что радиусы трещин существенно меньше размеров поперечного сечения стержня.) Конечно, для описания трещин в реальных твердых телах необходимо учитывать их ориентацию в пространстве и распределение по различным параметрам (радиусам R и R_0, поверхностной концентрации жидкости μ_0 и т.д.). Однако для упрощения расчетов при получении качественных результатов достаточно рассмотреть простейший случай – стержень с однородно распределенными в объеме и ориентированными вдоль его оси трещинами, с одинаковым объемным заполнением их жидкостью. Продольная деформация ε такого стержня под действием продольного напряжения σ определяется следующими уравнениями:

$$\varepsilon(\sigma) = (1-b)\varepsilon_0 + \int_0^\infty V(\sigma)N(R)dR, \tag{2}$$

$$\sigma(V) = \frac{K_0}{2\pi R^2}V + \frac{\beta}{2\pi R^2}\dot{V} - \frac{q}{(2\pi R^2)^3}V^3 + \frac{\delta}{(2\pi R^2)^3}V^2\dot{V}, \tag{3}$$

где $\varepsilon_0 = \sigma/E$ – деформация стержня без трещин, $N = N(R)$ – функция распределения трещин по радиусам, $b = \int_0^\infty V_0 N(R)dR$ – объемная концентрация трещин, $V_0 = \pi R^2 H$ – равновесный (при $\sigma = 0$) объем трещины, $V(\sigma) = 2\pi R^2 d$ – изменение объема трещины под действием напряжения $\sigma \neq 0$.

Решая уравнение (3) методом возмущений, т.е. полагая, что $V(t) = V_1(t) + V_2(t)$, где $|V_2(t)| \ll |V_1(t)|$, находим

$$V_1(t) = \frac{2\pi R^2}{\beta}\int_{-\infty}^{t}\sigma(t')\exp[-\Omega(t-t')]dt',$$
$$\dot{V}_1(t) = \frac{2\pi R^2}{\beta}\left[\sigma(t) - \Omega\int_{-\infty}^{t}\sigma(t')\exp[-\Omega(t-t')]dt'\right], \tag{4}$$

$$V_2(t) = \frac{1}{\beta(2\pi R^2)^2}\times \int_{-\infty}^{t}[qV_1^3(t') - \delta\dot{V}_1(t')V_1^2(t')]\exp[-\Omega(t-t')]dt', \tag{5}$$

где $\Omega = K_0/\beta$ – релаксационная частота трещины. Подставляя найденные значения $V_1(t)$ и $V_2(t)$ в (2), получим (в линейном приближении по $N(R)$, т.е. при малой концентрации трещин, когда $b \ll 1$, $\int_0^\infty N(R)V(\sigma)dR \ll 1$, $2\pi E\int_0^\infty \frac{R^2N(R)}{\beta}dR \ll 1$) нелинейное уравнение состояния для стержня с трещинами, частично заполненными вязкой жидкостью:

$$\sigma(\varepsilon) = E\left[\varepsilon - 2\pi E\int_0^\infty \frac{R^2N(R)}{\beta}D[\varepsilon(t)]dR\right] - 2\pi E^4\int_0^\infty \frac{R^2N(R)}{\beta^4}\int_{-\infty}^{t}[(q+\delta\Omega)D^3[\varepsilon(t')] - \delta D^2[\varepsilon(t')]\varepsilon(t')]\exp[-\Omega(t-t')]dt'dR, \tag{6}$$

где $D[\varepsilon(t)] = \int_{-\infty}^{t}\varepsilon(t')\exp[-\Omega(t-t')]dt'$.

Это уравнение является релаксационным и содержит одно линейное и два нелинейных (кубичных по амплитуде) релаксационных слагаемых. Линейная и нелинейная релаксация такой трещиноватой среды обусловлены вязкостью жидкости, находящейся в трещинах, причем нелинейная релаксация проявляется дважды: первый раз за счет линейной, поскольку нелинейная поправка (5) определяется линейным откликом (4), и второй раз – релаксацией самой нелинейной поправки (5). Аналогичное нелинейное релаксационное уравнение состояния было получено в работе [8] в рамках одномерной реологической модели микронеоднородной среды, состоящей из цепочки линейных упругих и нелинейных (квадратичных по деформации) вязко-упругих элементов. В низкочастотном приближении, т.е. при $\omega \ll \Omega$, ω – частота акустической волны, уравнение (6) сводится к более простому виду:

$$\sigma(\varepsilon) = E\left(1 - 2\pi E\int_0^\infty \frac{R^2N(R)}{K_0}dR\right)\varepsilon + 2\pi E^2\dot{\varepsilon}\int_0^\infty \frac{R^2N(R)}{K_0\Omega}dR - 2\pi E^4\varepsilon^3\int_0^\infty \frac{qR^2N(R)}{K_0^4}dR + 2\pi E^4\varepsilon^2\dot{\varepsilon}\int_0^\infty\left(\delta + \frac{6q}{\Omega}\right)\frac{R^2N(R)}{K_0^4}dR.$$

Из этого уравнения видно, что микронеоднородная среда, содержащая не только рассмотренные здесь трещины, но и любые другие дефекты, характеризуемые линейным поглощением (или релаксацией) и кубичной (или другой нечетной) реактивной нелинейностью, должна обладать и диссипативной нелинейностью, т.е. нечетная реактивная нелинейность дефектов с релаксацией приводит к диссипативной нелинейности среды. (Это утверждение не распространяется на среды с дефектами, обладающими только четной реактивной нелинейностью.)

Уравнение состояния (6), вместе с уравнением движения $\rho U_{tt} = \sigma_x(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$ (ρ – плотность среды, U – продольное смещение, $\varepsilon = U_x$) и граничными условиями, определяет нелинейные волновые процессы, возникающие при распространении и взаимодействии продольных упругих волн в таком стержне; изучение этих процессов может быть использовано для диагностики среды, т.е. для определения ее параметров (концентрации трещин, их радиусов, объемной концентрации жидкости в трещинах и т.д.). При описании волновых процессов в таком стержне мы будем полагать, что нелинейность уравнения состояния (6) преобладает над геометрической нелинейностью уравнений движения и, кроме того, выполняется приближение микронеоднородной среды [9], т.е. на длине волны находится достаточно много трещин, их раскрытие H много меньше длины волны, а распределение трещин в стержне однородно.

3. НЕЛИНЕЙНОЕ РАСПРОСТРАНЕНИЕ И ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ УПРУГИХ ВОЛН В СТЕРЖНЕ С ТРЕЩИНАМИ

Здесь мы исследуем эффекты самовоздействия и взаимодействия мощной низкочастотной волны накачки с частотой $\omega_{1,0}$ и слабой высокочастотной волны с частотой $\omega_{0,1}$ в стержне, уравнение состояния которого имеет вид (6). Граничное условие зададим в виде:

$$\varepsilon(x = 0, t) = \epsilon_0 \sin\omega_{1,0}t + \varepsilon_0 \sin\omega_{0,1}t, \tag{7}$$

где $\epsilon_0 \gg \varepsilon_0$, $\omega_{1,0}/\omega_{0,1} \neq m/n$, n и m – целые числа. При выполнении этих условий частоты высших гармоник сильной волны не будут совпадать с частотой слабой волны, слабая волна не будет оказывать влияния на сильную, но скорость распространения и затухание слабой волны будут зависеть от амплитуды сильной. Подставляя (6) в уравнения движения, получим нелинейное волновое уравнение для деформации:

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial t^2} - C_0^2\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial x^2} = -2\pi C_0^2 E\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^\infty \frac{R^2N(R)}{\beta}D[\varepsilon(t)]dR - \\ - 2\pi C_0^2E^3\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^\infty\frac{R^2N(R)}{\beta^4}\int_{-\infty}^{t}[(q+\delta\Omega)D^3[\varepsilon(t')] - \\ - \delta D^2[\varepsilon(t')]\varepsilon(t')]\exp[-\Omega(t-t')]dt'dR,\end{gathered} \tag{8}$$

где $C_0^2 = E/\rho$. Решение этого уравнения будем искать методом возмущений, полагая, что

$$\begin{gathered}\varepsilon(x, t) = \sum_{n,m}\hat{\varepsilon}_{n,m}(x, t) = \\ = \sum_n\sum_m \varepsilon_{n,m}(x)\sin[\omega_{n,m}t - k_{n,m}x - \varphi_{n,m}(x)],\end{gathered} \tag{9}$$

где $\omega_{n,m} = |n\Omega \pm m\omega|$, $k_{n,m} = \omega_{n,m}/C_0$, $\left|\sum_{n,m}\hat{\varepsilon}_{n\neq 1, m\neq 0}(x, t)\right| \ll |\hat{\varepsilon}_{1,0}(x, t)|$, а $\varepsilon_{n,m}(x)$ и $\varphi_{n,m}(x)$ – медленно меняющиеся функции координаты x. Подставляя (9) в уравнение (8) и выделяя в его правой части соответствующие гармонические составляющие, получим уравнения, описывающие распространение мощной волны накачки, генерацию ее третьей гармоники и распространение слабой волны в присутствии мощной:

$$\begin{gathered}\frac{d\varepsilon_{1,0}}{dx} = -A_1\varepsilon_{1,0}k_{1,0}\left(1 + \frac{A_{1,0}\varepsilon_{1,0}^2}{4A_1}\right), \\ \frac{d\varphi_{1,0}}{dx} = -B_1k_{1,0}\left(1 + \frac{B_{1,0}\varepsilon_{1,0}^2}{4B_1}\right),\end{gathered} \tag{10}$$

$$\begin{gathered}\frac{d\varepsilon_{3,0}}{dx} = -k_{3,0}\left(A_3\varepsilon_{3,0} - \right. \\ \left. - \frac{\sqrt{A_{3,0}^2 + B_{3,0}^2}}{4}\varepsilon_{1,0}^3\cos\left(3\varphi_{1,0} - \varphi_{3,0} + \operatorname{arctg}\frac{B_{3,0}}{A_{3,0}}\right)\right),\end{gathered} \tag{11}$$

$$\begin{gathered}\varepsilon_{3,0}\frac{d\varphi_{3,0}}{dx} = -k_{3,0}\left(B_3\varepsilon_{3,0} - \right. \\ \left. - \frac{\sqrt{A_{3,0}^2 + B_{3,0}^2}}{4}\varepsilon_{1,0}^3\sin\left(3\varphi_{1,0} - \varphi_{3,0} + \operatorname{arctg}\frac{B_{3,0}}{A_{3,0}}\right)\right),\end{gathered} \tag{12}$$

$$\begin{gathered}\frac{d\varepsilon_{0,1}}{dx} = -C_1\varepsilon_{0,1}k_{0,1}\left(1 + \frac{A_{0,1}\varepsilon_{1,0}^2}{4C_1}\right), \\ \frac{d\varphi_{0,1}}{dx} = -D_1k_{0,1}\left(1 + \frac{B_{0,1}\varepsilon_{1,0}^2}{4D_1}\right),\end{gathered} \tag{13}$$

где линейные и нелинейные коэффициенты A_1, B_1, C_1, D_1, A_3, B_3 и $A_{n,m}$, $B_{n,m}$ определяются выражениями:

$$A_1 = \pi E\int_0^\infty \frac{R^2N(R)}{\beta}\frac{\omega_{1,0}}{\omega_{1,0}^2+\Omega^2}dR, \quad B_1 = \pi E\int_0^\infty \frac{R^2N(R)}{\beta}\frac{\Omega}{\omega_{1,0}^2+\Omega^2}dR,$$

$$C_1 = \pi E\int_0^\infty \frac{R^2N(R)}{\beta}\frac{\omega_{0,1}}{\omega_{0,1}^2+\Omega^2}dR, \quad D_1 = \pi E\int_0^\infty \frac{R^2N(R)}{\beta}\frac{\Omega}{\omega_{0,1}^2+\Omega^2}dR,$$

$$A_3 = \pi E\int_0^\infty \frac{R^2N(R)}{\beta}\frac{\omega_{3,0}}{\omega_{3,0}^2+\Omega^2}dR, \quad B_3 = \pi E\int_0^\infty \frac{R^2N(R)}{\beta}\frac{\Omega}{\omega_{3,0}^2+\Omega^2}dR,$$

$$A_{1,0} = \pi E^3\int_0^\infty \frac{R^2N(R)}{\beta^4}\frac{\omega_{1,0}[6q\Omega+\delta(\Omega^2-\omega_{1,0}^2)]}{(\omega_{1,0}^2+\Omega^2)^3}dR,$$

$$B_{1,0} = \pi E^3\int_0^\infty \frac{R^2N(R)}{\beta^4}\frac{[3q(\Omega^2-\omega_{1,0}^2)-2\delta\omega_{1,0}^2\Omega]}{(\omega_{1,0}^2+\Omega^2)^3}dR, \tag{14}$$

$$A_{3,0} = \pi E^3\int_0^\infty \frac{R^2N(R)}{\beta^4}\frac{\omega_{3,0}\left[2q\Omega(3\Omega^2-5\omega_{1,0}^2)+\delta(\Omega^4+3\omega_{1,0}^4-12\omega_{1,0}^2\Omega^2)\right]}{(9\omega_{1,0}^2+\Omega^2)(\omega_{1,0}^2+\Omega^2)^3}dR,$$

$$B_{3,0} = \pi E^3\int_0^\infty \frac{R^2N(R)}{\beta^4}\frac{\left[q(\Omega^4+3\omega_{1,0}^4-12\omega_{1,0}^2\Omega^2)-2\delta\omega_{1,0}^2\Omega(3\Omega^2-5\omega_{1,0}^2)\right]}{(9\omega_{1,0}^2+\Omega^2)(\omega_{1,0}^2+\Omega^2)^3}dR,$$

$$A_{0,1} = \pi E^3\int_0^\infty \frac{R^2N(R)}{\beta^4}\frac{\omega_{0,1}[6q\Omega+\delta(\Omega^2-\omega_{0,1}^2)]}{(\omega_{1,0}^2+\Omega^2)(\omega_{0,1}^2+\Omega^2)^2}dR,$$

$$B_{0,1} = \pi E^3\int_0^\infty \frac{R^2N(R)}{\beta^4}\frac{[3q(\Omega^2-\omega_{0,1}^2)-2\delta\Omega\omega_{0,1}^2]}{(\omega_{1,0}^2+\Omega^2)(\omega_{0,1}^2+\Omega^2)^2}dR.$$

Решения уравнений (10)–(13) с граничными условиями (7) при $(A_3 - A_1)k_{3,0}x \ll 1$, $B_3k_{3,0}x \ll 1$ имеют вид:

$$\varepsilon_{1,0}(x) = \frac{\epsilon_0\exp(-A_1k_{1,0}x)}{\sqrt{1+\frac{A_{1,0}}{4A_1}\epsilon_0^2[1-\exp(-2A_1k_{1,0}x)]}},$$
$$\varphi_{1,0}(x) = B_1k_{1,0}x + \frac{B_{1,0}}{2A_{1,0}}\ln\left(1+\frac{A_{1,0}}{4A_1}\epsilon_0^2[1-\exp(-2A_1k_{1,0}x)]\right), \tag{15}$$

$$\varepsilon_{3,0}(x) = \sqrt{A_{3,0}^2+B_{3,0}^2}\frac{\epsilon_0^3k_{3,0}x}{4},$$
$$\varphi_{3,0}(x) - 3\varphi_{1,0}(x) = -B_3k_{3,0}x + \operatorname{arctg}\left(\frac{B_{3,0}}{A_{3,0}}\right) \ll \pi, \tag{16}$$

$$\varepsilon_{0,1}(x) = \frac{\varepsilon_0\exp(-C_1k_{0,1}x)}{\left(1+\frac{A_{1,0}}{4A_1}\epsilon_0^2[1-\exp(-2A_1k_{1,0}x)]\right)^{\frac{A_{0,1}\omega_{0,1}}{2A_{1,0}\omega_{1,0}}}},$$
$$\varphi_{0,1}(x) = D_1k_{0,1}x + \frac{2\omega_{0,1}D_1}{\omega_{1,0}A_{1,0}}\ln\left(1+\frac{A_{1,0}}{4A_1}\epsilon_0^2[1-\exp(-2A_1k_{1,0}x)]\right). \tag{17}$$

4. АНАЛИЗ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ В СТЕРЖНЕ С ОДИНАКОВЫМИ ТРЕЩИНАМИ

Проанализируем получившиеся решения и отметим некоторые характерные отличия процессов распространения сильной и слабой волн в стержне с трещинами одинакового радиуса $R = R_m$: $N(R) = N_0\delta(R - R_m)$, $N_0 = b/\pi HR_m^2$. Из выраже-

ний (15) находим линейный δ_{lin} и нелинейный $\delta_{nel}(\varepsilon_{1,0})$ декременты затухания и относительное изменение скорости $\Delta C(\varepsilon_{1,0})/C_0$ для низкочастотной волны, а также отношение $r_{1,0}$ нелинейного декремента затухания к относительному изменению скорости:

$$\delta_{lin} = A_1, \quad \delta_{nel}(\varepsilon_{1,0}) = A_{1,0}\varepsilon_{1,0}^2,$$
$$\frac{\Delta C(\varepsilon_{1,0})}{C_0} = B_{1,0}\varepsilon_{1,0}^2, \quad r_{1,0} = \frac{A_{1,0}}{B_{1,0}}, \tag{18}$$

где $\Delta C(\varepsilon_{1,0}) = C_0 - C_{1,0}(\varepsilon_{1,0})$, $C_{1,0}(\varepsilon_{1,0})$ – скорость распространения волны накачки.

Из этих выражений видно, что с увеличением амплитуды волны накачки параметры $\delta_{nel}(\varepsilon_{1,0})$ и $\Delta C(\varepsilon_{1,0})/C_0$ растут, при этом их отношение $r_{1,0}$ остается постоянным, не зависящим от $\varepsilon_{1,0}$. Интересно проследить за поведением амплитуды $\varepsilon_{1,0}$ (или нелинейного декремента затухания) и скорости распространения мощной волны накачки с увеличением ее начальной амплитуды ϵ_0, при этом влияние упругой и неупругой нелинейностей полезно рассмотреть отдельно друг от друга, так как механизмы этих нелинейностей различны. Из выражений (15) следует, что при $q \neq 0$, $\delta = 0$ знак нелинейного декремента затухания определяется знаком коэффициента $A_{1,0}$, который, в свою очередь, совпадает со знаком параметра q. Таким образом, при $A_{1,0} > 0$ будет иметь место нелинейное ограничение амплитуды волны, а при $A_{1,0} < 0$ будет наблюдаться самопросветление среды. В этом случае будет также наблюдаться изменение скорости распространения волны, причем, как это следует из выражений (14) для $B_{1,0}$, в низкочастотном диапазоне скорость волны будет уменьшаться с ростом ее амплитуды, а в высокочастотном – увеличиваться и в пределе стремится к C_0. В другом предельном случае (при $q = 0$, $\delta > 0$) ограничение амплитуды волны будет иметь место на низких частотах ($\omega_{1,0} < \Omega_m = \Omega(R_m)$), а самопросветление среды – на высоких ($\omega_{1,0} > \Omega_m$).

На малых расстояниях от излучателя третья гармоника синхронна с волной накачки и поэтому генерируется так же, как в кубичной среде без дисперсии: ее амплитуда растет пропорционально ϵ_0^3 и расстоянию x, при этом эффективное значение параметра кубичной нелинейности среды определяется выражением

$$\sqrt{A_{3,0}^2 + B_{3,0}^2} = \frac{E^3 b}{H\beta^4}\left[\frac{q^2 + \delta^2\omega_{1,0}^2}{(\omega_{3,0}^2 + \Omega_m^2)(\omega_{1,0}^2 + \Omega_m^2)^3}\right]^{1/2}. \tag{19}$$

Из него получаем следующие асимптотики в низкочастотном и высокочастотном диапазонах:

$$\sqrt{A_{3,0}^2 + B_{3,0}^2} \cong \frac{qE^3 b}{HK^4} = \text{const} \quad \text{и} \quad \sqrt{A_{3,0}^2 + B_{3,0}^2} \cong \frac{\delta E^3 b}{3H\beta^4\omega_{0,1}^3} \sim \omega_{1,0}^{-3}.$$

Из выражений (17) находим декремент затухания $\delta_{0,1}(\varepsilon_{1,0})$ и относительное изменение скорости $\Delta C(\varepsilon_{1,0})/C_0$ для слабой волны в присутствии мощной волны накачки, а также их отношение $r_{0,1}$:

$$\delta_{0,1}(\varepsilon_{1,0}) = 2A_{0,1}\varepsilon_{1,0}^2,$$
$$\frac{\Delta C(\varepsilon_{0,1})}{C_0} = 2B_{0,1}\varepsilon_{1,0}^2, \quad r_{0,1} = \frac{A_{0,1}}{B_{0,1}}. \tag{20}$$

Здесь, так же как и в (18), при увеличении амплитуды волны накачки параметры $\delta_{0,1}(\varepsilon_{1,0})$ и $\Delta C(\varepsilon_{0,1})/C_0$ изменяются так, что их отношение $r_{0,1}$ остается постоянным, но другим. Из выражений (17) видно, что, в зависимости от знаков коэффициентов $A_{1,0}$ и $A_{0,1}$, в среде может наблюдаться или затухание звука на звуке, или усиление звука звуком. При $A_{1,0} > 0$, $A_{0,1} > 1$ и $A_{1,0} < 0$, $A_{0,1} > 0$ будет иметь место затухание звука на звуке, а при $A_{1,0} < 0$, $A_{0,1} < 0$ и $A_{1,0} > 0$, $A_{0,1} < 0$ – усиление звука звуком.

5. АНАЛИЗ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ В СТЕРЖНЕ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПО РАДИУСАМ ТРЕЩИНАМИ

Проанализируем теперь нелинейные волновые процессы в стержне с распределенными по радиусам трещинами: это распределение будем описывать степенной функцией с различными целочисленными показателями n ($1 \leq n \leq 7$):

$$N(R) = N_0 R^{-n}, \quad R_1 \leq R \leq R_2, \tag{21}$$

где $N_0 = b/\pi H \int_{R_1}^{R_2} R^{2-n}\, dR$.

На рис. 1а, 1б показаны примеры зависимостей линейного декремента затухания A_1 и относительной скорости $C/C_0 = 1 - B_1$ волны накачки от частоты $\omega_{1,0}$, построенные для такой функции распределения при $1 \leq n \leq 7$ и при следующих параметрах трещин: $b = 10^{-4}$, $R_1 = 5.5 \times 10^{-2}$ см, $R_2 = 5.5 \times 10^{-1}$ см, $\Omega_1(R_1) \cong 10^5$ с$^{-1}$, $\Omega_2(R_2) \cong 10^2$ с$^{-1}$, $H = 10^{-4}$ см, $\mu_0 = 1/2$, $E = 10^{11}$ г/см с^2, $\nu = 1/4$. Здесь и далее все расчеты приведены для трещин, частично заполненных водой, в случае, когда поверхности трещин покрыты тонкой пленкой воды. Для таких трещин при $R \ll 3\pi EH^2/64(1-\nu^2)\alpha\mu_0\cos\theta$ их релаксационная частота определяется выражением

$$\Omega(R) \cong \theta[\pi EH^3/8(1-\nu^2)\eta\mu_0^2 R^3] \sim R^{-3}. \tag{22}$$

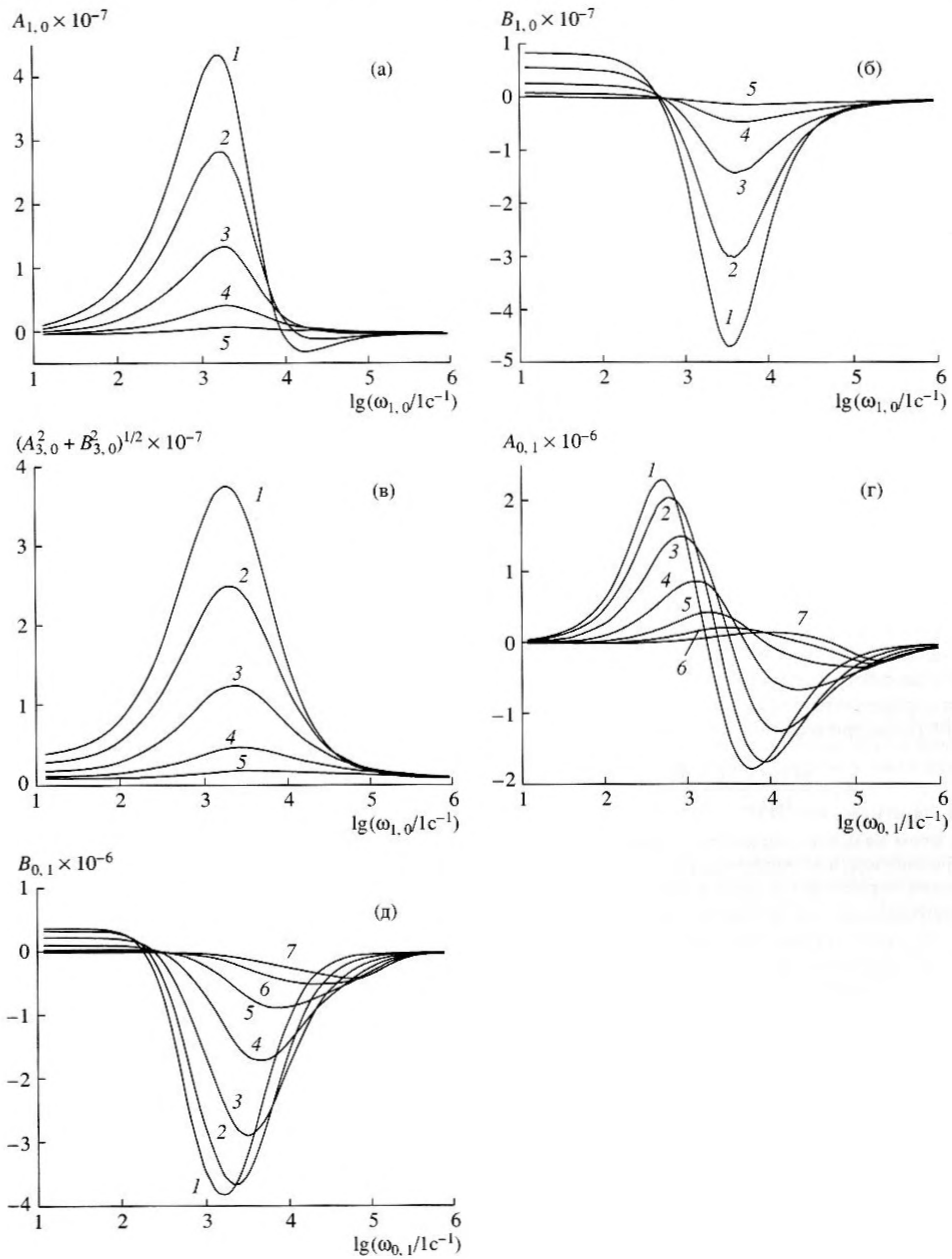

Рис. 2. Частотные зависимости коэффициентов $A_{1,0}$ (а), $B_{1,0}$ (б), $(A_3^2 + B_3^2)^{1/2}$ (в), $A_{0,1}$ (г) и $B_{0,1}$ (д) при различных значениях показателя n функции распределения. Номера кривых соответствуют показателю степени n функции распределения (21).

Из рис. 1а видно, что в классе степенных функций (21) только при $n = 4$ в диапазоне частот $\Omega_2(R_2) \le \omega_{1,0} \le \Omega_1(R_1)$ декремент затухания почти не зависит от частоты; таким свойством обладают многие горные породы и металлы [10, 11]. При других значениях показателя степени n декремент затухания сначала растет с ростом частоты, а затем спадает, так что при $n \ne 4$ не существует диапазона, в котором декремент затухания не зависит от частоты. Из рис. 1б видно, что для степенных функций распределения трещин по радиусам при $1 \le n \le 7$ скорость низкочастотной волны качественно ведет себя одинаково, т.е. с ростом частоты $\omega_{1,0}$ монотонно возрастает и стремится к C_0. Из (14) получаем выражения для коэффициентов A_1 и B_1 при $n = 4$:

$$A_1 = \frac{8(1-\nu^2)bR_1R_2}{9\pi H(R_2-R_1)}\operatorname{arctg}\left(\frac{\omega_{1,0}(\Omega_1-\Omega_2)}{\omega_{1,0}^2+\Omega_1\Omega_2}\right),$$
$$B_1 = \frac{4(1-\nu^2)bR_1R_2}{9\pi H(R_2-R_1)}\ln\left(\frac{\omega_{1,0}^2+\Omega_1^2}{\omega_{1,0}^2+\Omega_2^2}\right). \quad (23)$$

(Аналогичные выражения определяют и коэффициенты C_1, D_1, A_3, B_3.) Заметим, что значение линейного декремента затухания A_1 в частотном диапазоне $\Omega_2 \le \omega_{1,0} \le \Omega_1$ не зависит от частоты $\omega_{1,0}$ и вязкости жидкости, находящейся в трещине, а определяется только концентрацией трещин b и их геометрическими размерами H, R_1 и R_2:

$$A_1 \cong \frac{4(1-\nu^2)bR_1R_2}{9H(R_2-R_1)}, \quad (24)$$

при этом вязкость жидкости определяет частотный диапазон, в котором линейный декремент затухания определяется выражением (24) [12].

Выражения для нелинейных коэффициентов $A_{n,m}$, $B_{n,m}$ имеют существенно более сложный вид, поэтому здесь мы приведем примеры зависимостей этих коэффициентов от частоты $\omega_{1,0}$ или $\omega_{0,1}$ (при $\omega_{1,0} = 10^3$ с$^{-1}$) при различных значениях показателя n (рис. 2) и при тех же параметрах распределения трещин по радиусам, а также их низкочастотные асимптотики ($\omega_{1,0} \ll \Omega_2$, $\omega_{0,1} \ll \Omega_2$, $\omega_{1,0} \ll |q/\delta|$) при $n = 4$:

$$A_{1,0} = \frac{2^{21}(1-\nu^2)^4\alpha b\eta\mu_0^2\cos\theta R_1R_2\omega_{1,0}}{81\pi^4EH^6(R_2-R_1)}\times$$
$$\times\left[\frac{(1-\nu^2)\mu_0(R_2^6-R_1^6)}{\pi EH^2}+\frac{9(R_2^5-R_1^5)}{2^7\alpha\cos\theta}\right],$$

$$B_{1,0} = \frac{2^{18}(1-\nu^2)^4\alpha b\eta\mu_0\cos\theta R_1R_2(R_2^3-R_1^3)}{81\pi^4EH^5(R_2-R_1)} \gg A_{1,0},$$

$$\sqrt{A_{3,0}^2+B_{3,0}^2} = \frac{2^{16}(1-\nu^2)^4\alpha b\eta\mu_0\cos\theta R_1R_2(R_2^3-R_1^3)}{243\pi^4EH^5(R_2-R_1)}, \quad (25)$$

$$A_{0,1} = \frac{2^{22}(1-\nu^2)^4\alpha b\eta\mu_0^2\cos\theta R_1R_2\omega_{1,0}}{81\pi^4EH^6(R_2-R_1)}\times$$
$$\times\left[\frac{(1-\nu^2)\mu_0(R_2^6-R_1^6)}{\pi EH^2}+\frac{9(R_2^6-R_1^6)}{2^7\alpha\cos\theta}\right],$$

$$B_{0,1} = \frac{2^{19}(1-\nu^2)^4\alpha b\eta\mu_0\cos\theta R_1R_2(R_2^3-R_1^3)}{81\pi^4EH^5(R_2-R_1)} \gg A_{0,1}.$$

Из этих выражений следует, что в низкочастотном диапазоне эффекты, связанные с изменением скорости распространения и обусловленные реактивной нелинейностью трещин, проявляются сильнее, чем эффекты, связанные с изменением декремента затухания и обусловленные их диссипативной нелинейностью, что, впрочем, естественно, так как диссипативная нелинейность трещин зависит от $\dot{d}$, а реактивная – нет.

Из рис. 2 видно, что при различных n с ростом частоты коэффициенты $A_{1,0}$, $A_{0,1}$, и $B_{1,0}$, $B_{0,1}$ попарно ведут себя подобным образом. Вначале коэффициенты $A_{1,0}$, $A_{0,1}$ положительны, растут и достигают максимума, а затем уменьшаются, меняют знак, достигают минимума и стремятся к нулю, коэффициенты же $B_{1,0}$, $B_{0,1}$, положительные вначале, уменьшаются, меняют знак, достигают минимума и также стремятся к нулю. Эффективный параметр кубичной нелинейности $(A_{3,0}^2 + B_{3,0}^2)^{1/2}$ с ростом частоты вначале растет, а затем также уменьшается, асимптотически приближаясь к нулю. Уменьшение линейных и нелинейных коэффициентов A_1, B_1, C_1, D_1, A_3, B_3 и $A_{n,m}$, $B_{n,m}$ в высокочастотном диапазоне ($\omega_{n,m} > \Omega_1$) связано с проявлением релаксации трещин, повышающей их жесткость на высоких частотах.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе получено нелинейное (в кубичном приближении) динамическое релаксационное уравнение состояния для стержня, содержащего большое количество трещин, частично заполненных вязкой жидкостью. В рамках этого уравнения методом возмущений проведено теоретическое исследование нелинейных волновых процессов, возникающих при распространении и взаимодействии сильной низкочастотной и слабой высокочастотной продольных акустических волн в таком стержне. Определены линейный де-

кремент затухания и скорость акустической волны, а также параметры нелинейности для эффектов самовоздействия и взаимодействия этих волн и генерации третьей гармоники низкочастотной волны накачки. Показано, что для степенной функции распределения трещин по радиусам (с показателем степени $n = -4$) существует довольно широкий частотный диапазон, в котором линейный декремент затухания практически не зависит от частоты. Показано также, что, в отличие от среды с такой же (реактивной и диссипативной) нелинейностью, но без релаксации, в которой амплитудные и фазовые нелинейные эффекты определяются раздельно диссипативной и реактивной нелинейностью, в нелинейной среде с релаксацией амплитудные и фазовые эффекты определяются совместным влиянием диссипативной и реактивной нелинейностей. Несмотря на то, что в статье рассмотрен простейший пример трещиноватой среды, а именно стержень, содержащий ориентированные вдоль его оси трещины, характер нелинейных волновых процессов в подобных средах является достаточно общим и в основном качественно не изменится и для безграничного твердого тела с трещинами, изотропно ориентированными в пространстве и распределенными по раскрытиям и другим параметрам. В этих случаях уравнения состояния среды также будут обладать релаксацией и содержать реактивную и диссипативную нелинейности. Результаты проведенного исследования позволяют надеяться, что подробное и всестороннее экспериментальное изучение (т.е. установление амплитудно-частотных зависимостей) различных нелинейных эффектов при распространении и взаимодействии упругих волн в такой среде позволит определить ее уравнение состояния, а по нему – параметры трещин, содержащихся в ней. В заключение отметим, что, на наш взгляд, описанные нелинейные эффекты (самопросветление среды или нелинейное ограничение амплитуды волны, затухание звука на звуке или усиление звука звуком, а также изменение скорости распространения сильной и слабой волн) могут наблюдаться в трещиноватых и зернистых горных породах в условиях их естественного залегания, об этом, в частности, свидетельствуют результаты натурного эксперимента по самовоздействию сейсмоакустических волн в водонасыщенном грунте [13].

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 01-05-64417, 02-02-16237, 02-02-08021 ИННО).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Nazarov V.E., Ostrovsky L.A., Soustova I.A., Sutin A.M.* Nonlinear acoustics of microinhomogeneous media // Physics of the Earth and Planetary Interiors. 1988. V. 50. № 1. P. 65–73.
2. *Guyer R.A., Johnson P.A.* Nonlinear mesoscopic elasticity: evidence for a new class materials // Physics Today. 1999. № 4. P. 30–36.
3. *Ostrovsky L.A., Johnson P.A.* Dinamic nonlinear elasticity in geomaterials // La Rivista del Nuovo Cimento. 2001. V. 24. Ser. 4. № 7. P. 1–46.
4. *Nazarov V.E.* Acoustic nonlinearity of cracks partially filled with liquid: cubic approximation // J. Acoust. Soc. Amer. 2001. V. 109. № 6. P. 2642–2648.
5. *Руденко О.В., Солуян С.И.* Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975.
6. *Баллад Е.М., Коршак Б.А., Можаев В.Г., Солодов И.Ю.* Генерация третьей гармоники и акустическая нелинейность высших порядков в твердых телах // Вестник Моск. университета. Сер. 3. Физика. Астрономия. 2001. № 6. С. 44–48.
7. *O'Connel R.J., Budiansky B.* Seismic velocities in dry and saturated cracked solids // JGR. 1974. V. 79. № 35. P. 5412–5426.
8. *Nazarov V.E., Zaitsev V.Yu., Belyaeva I.Y.* Nonlinear transformation of acoustic waves in microinhomogeneous media with relaxation // Acustica – acta acustica. 2002. V. 88. № 1. P. 40–49.
9. *Исакович М.А.* Общая акустика. М.: Наука, 1973. 496 с.
10. *Аки К., Ричардс П.* Количественная сейсмология. Теория и методы. Т. 1. М.: Мир, 1983. 520 с.
11. Физическая акустика / Под ред. У. Мезона. Т. 3. Часть Б, 1968. 392 с.
12. *Зайцев В.Ю., Назаров В.Е.* О линейной частотной зависимости коэффициента поглощения упругих волн в микронеоднородных твердых телах // Акуст. журн. 1999. Т. 45. № 5. С. 622–627.
13. *Зайцев В.Ю., Назаров В.Е., Таланов В.И.* Экспериментальное исследование самовоздействия сейсмоакустических волн // Акуст. журн. 1999. Т. 45. № 6. С. 799–806.

Nonlinear Wave Processes in Media Containing Cracks Partially Filled with a Viscous Liquid

V. E. Nazarov and A. V. Radostin

A nonlinear (in the cubic approximation) relaxation equation of state is derived for a rod containing cracks partially filled with an incompressible viscous liquid. The nonlinear effects of the self-action and interaction of low- and high-frequency longitudinal elastic waves propagating in such a rod are studied for the cases of identical and size-varied cracks. Linear and nonlinear acoustic parameters characterizing the self-action and interaction of elastic waves in a cracked rod are determined.