АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2003, том 49, № 6, с. 843–851

УДК 534.26

ВОЛНОВОДНЫЕ СВОЙСТВА ПЛОСКОЙ КОЛЬЦЕВОЙ ПЛАСТИНЫ I. ИЗГИБНЫЕ ВОЛНЫ

© 2003 г. В. В. Тютекин

Акустический институт им. Н.Н. Андреева РАН
117036 Москва, ул. Шверника 4
E-mail: Tyutekin@akin.ru

Поступила в редакцию 26.02.2003 г.

В статье рассматривается новый вид так называемых "угловых" волн для нормальных волн изгибного типа, распространяющихся по плоской пластине, имеющей форму кольца. Получены дисперсионное уравнение для волновых чисел, уравнение для критических частот и выражения для собственных функций такого волновода. Численными методами получены решения этих уравнений для различных значений параметра d, равного относительной ширине кольца. Проведен анализ полученных решений и описаны основные свойства дисперсионных кривых. На основе расчета и последующего анализа собственных функций проведена идентификация отдельных нормальных волн.

В научной литературе существует множество работ, посвященных распространению упругих волн в стержнях, оболочках, пластинах и пр. Связано это, прежде всего, с необходимостью определения динамических свойств строительных, транспортных (в частности, судовых и самолетных) и другого рода конструкций. Особое место занимают работы, исследующие волноводные свойства пластин или их фрагментов. Из чрезвычайно большого числа публикаций отметим работы [1, 2], в которых рассмотрены свойства пластинчатых полос, совершающих изгибные колебания, а также работы [3, 4], посвященные исследованию свойств "уголковых" пластинчатых конструкций, в которых волноводные свойства обусловлены взаимодействием волн изгибного и продольно-сдвигового типов.

В настоящей работе рассматриваются волноводные свойства плоской пластины, имеющей форму кольца, по которому распространяются "угловые" нормальные волны изгибного типа. Нормальные волны подобного типа рассматривались ранее в ряде работ. Так, в работах [5, 6] исследовались звуковые волны, присущие акустическому волноводу с искривленными стенками. В работах [7–9] – "угловые" волны, распространяющиеся по поверхности упругого цилиндра (в высокочастотном приближении). Подобные волны учитываются, в частности, при решении задач дифракции на цилиндрических препятствиях [10, 11].

Поскольку в настоящей статье предполагается, что полярный угол θ, так же, как и в приведенных работах, изменяется в пределах $-\infty < \theta < \infty$, то с математической точки зрения решение задачи рассматривается на многолистной римановой поверхности. В этом случае рассматриваемый здесь физический объект можно считать спиралью с очень малым шагом (по вертикали), в предположении, что при этом сохраняются волны только изгибного типа, а волны продольно-сдвигового типа не возникают. Если полярный угол θ изменяется в пределах $0 \le \theta \le \pi$, то эту часть кольца можно рассматривать как "вставку" между двумя прямолинейными полосами, совершающими изгибные колебания. С этой точки зрения исследование волноводных свойств кольцеобразной пластины представляет несомненный практический интерес.

Зададим геометрические размеры такой пластины в виде: $r = a$ – внешняя граница, $r = b$ – внутренняя граница, $2L = a - b$ – ширина кольца.

Уравнение изгибных колебаний пластины в цилиндрической системе координат записывается в виде

$$(\Delta^2 - k_0^4)W = 0. \qquad (1)$$

Здесь W – поперечное смещение пластины, k_o – волновое число изгибных волн, $k_o^4 = \dfrac{\varepsilon h \omega^2}{D_m}$, ρ – плотность, h – толщина пластины, $D_m = \dfrac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)}$ – изгибная жесткость, E – модуль Юнга, σ – коэффициент Пуассона. Лапласиан Δ в цилиндрической системе координат имеет вид $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2}{\partial \theta^2}$.

Уравнение (1), как известно, можно разбить на два независимых уравнения

$$\Delta W + k_0^2 W = 0, \tag{2}$$

$$\Delta W - k_0^2 W = 0. \tag{3}$$

В соответствие с изложенным будем искать их решения в виде волн изгибного типа, бегущих в направлении возрастания угла θ: $W = W_0(r)\exp(i\nu\theta)$, где $W_0(r)$ – амплитуда волны, ν – неизвестная константа, играющая роль углового волнового числа. Подставляя это выражение в (2) и (3), получим

$$\frac{d^2W_0}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dW_0}{dr} + \left(k_0^2 - \frac{\nu^2}{r^2}\right)W_0 = 0, \tag{4}$$

$$\frac{d^2W_0}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dW_0}{dr} - \left(k_0^2 + \frac{\nu^2}{r^2}\right)W_0 = 0. \tag{5}$$

Линейно-независимые решения уравнения (4) есть функции Бесселя $J_\nu(k_0r)$ и Неймана $Y_\nu(k_0r)$, а уравнения (5) – модифицированная функция Бесселя $I_\nu(k_0r)$ и функция Макдональда $K_\nu(k_0r)$. Общее решение для $W_0(r)$ имеет вид

$$\begin{gathered} W_0(r) = AJ_\nu(k_0r) + BY_\nu(k_0r) + \\ + CI_\nu(k_0r) + DK_\nu(k_0r), \end{gathered} \tag{6}$$

где A, B, C и D – неизвестные константы.

В качестве граничных условий используем отсутствие напряжений на внутренней $r = a$ и внешней $r = b$ границах кольца. Это можно выразить уравнениями [12]

$$\begin{gathered} M_r = 0 \text{ и } V = Q_r - \frac{1}{r}\frac{\partial M_{r\theta}}{\partial\theta} = 0 \\ \text{при } r = a, b. \end{gathered} \tag{7}$$

Здесь

$$M_r = -D_m\left[\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \sigma\left(\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 W}{\partial\theta^2}\right)\right]$$

– изгибающий момент,

$$Q_r = -D_m\frac{\partial}{\partial r}(\Delta W) \text{ – перерезывающая сила,}$$

$$M_{r\theta} = D_m(1-\sigma)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 W}{\partial r\partial\theta} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial W}{\partial\theta}\right)$$

– крутящий момент.

Для компактного представления выражений, получаемых в результате преобразования приведенных формул, введем в рассмотрение следующие операторы:

$$L_1^\pm(r, \nu) = \frac{(1-\sigma)}{k_0r}\frac{d}{d(k_0r)} + \left[\pm 1 + (1-\sigma)\left(\frac{\nu}{k_0r}\right)^2\right], \tag{8}$$

$$\begin{gathered} L_2^\pm(r, \nu) = \left[\pm 1 + (1-\sigma)\left(\frac{\nu}{k_0r}\right)^2\right]\frac{d}{d(k_0r)} - \\ - \frac{(1-\sigma)}{k_0r}\left(\frac{\nu}{k_0r}\right)^2. \end{gathered} \tag{9}$$

Здесь верхний знак (+) соответствует функциям $J_\nu(k_0r)$ и $Y_\nu(k_0r)$, а нижний (–) – функциям $I_\nu(k_0r)$ и $K_\nu(k_0r)$. В этих обозначениях обобщенные безразмерные напряжения можно представить в виде

$$\begin{gathered} \frac{M_r}{D_mk_0^2} = L_1^+(r, \nu)[AJ_\nu(k_0r) + BY_\nu(k_0r)] + \\ + L_1^-(r, \nu)[CI_\nu(k_0r) + DK_\nu(k_0r)], \end{gathered} \tag{10}$$

$$\begin{gathered} \frac{V}{D_mk_0^3} = L_2^+(r, \nu)[AJ_\nu(k_0r) + BY_\nu(k_0r)] + \\ + L_2^-(r, \nu)[CI_\nu(k_0r) + DK_\nu(k_0r)]. \end{gathered} \tag{11}$$

Подставляя формулы (10) и (11) в граничные условия (7), получим следующую однородную систему уравнений относительно неизвестных коэффициентов A, B, C и D.

$$\begin{gathered} AL_1^+(a, \nu)J_\nu(k_0a) + BL_1^+(a, \nu)Y_\nu(k_0a) + \\ + CL_1^-(a, \nu)I_\nu(k_0a) + DL_1^-(a, \nu)K_\nu(k_0a) = 0, \\ AL_1^+(b, \nu)J_\nu(k_0b) + BL_1^+(b, \nu)Y_\nu(k_0b) + \\ + CL_1^-(b, \nu)I_\nu(k_0b) + DL_1^-(b, \nu)K_\nu(k_0b) = 0, \\ AL_2^+(a, \nu)J_\nu(k_0a) + BL_2^+(a, \nu)Y_\nu(k_0a) + \\ + CL_2^-(a, \nu)I_\nu(k_0a) + DL_2^-(a, \nu)K_\nu(k_0a) = 0, \\ AL_2^+(b, \nu)J_\nu(k_0b) + BL_2^+(b, \nu)Y_\nu(k_0b) + \\ + CL_2^-(b, \nu)I_\nu(k_0b) + DL_2^-(b, \nu)K_\nu(k_0b) = 0. \end{gathered} \tag{12}$$

Условие нетривиальности решения приводит к характеристическому уравнению для определения неизвестной величины "углового" волнового числа ν:

$$\Delta(\nu) = \begin{vmatrix} L_1^+(a,\nu)J_\nu(k_0a) & L_1^+(a,\nu)Y_\nu(k_0a) & L_1^-(a,\nu)I_\nu(k_0a) & L_1^-(a,\nu)K_\nu(k_0a) \\ L_1^+(b,\nu)J_\nu(k_0b) & L_1^+(b,\nu)Y_\nu(k_0b) & L_1^-(b,\nu)I_\nu(k_0b) & L_1^-(b,\nu)K_\nu(k_0b) \\ L_2^+(a,\nu)J_\nu(k_0a) & L_2^+(a,\nu)Y_\nu(k_0a) & L_2^-(a,\nu)I_\nu(k_0a) & L_2^-(a,\nu)K_\nu(k_0a) \\ L_2^+(b,\nu)J_\nu(k_0b) & L_2^+(b,\nu)Y_\nu(k_0b) & L_2^-(b,\nu)I_\nu(k_0b) & L_2^-(b,\nu)K_\nu(k_0b) \end{vmatrix} = 0. \quad (13)$$

Производные от цилиндрических функций, входящие в операторы $L_{1,2}^{\pm}$, в данном случае целесообразно вычислять по формулам

$$\frac{dZ_\nu(x)}{dx} = \pm Z_{\nu+1}(x) + \frac{\nu}{x}Z_\nu(x), \quad (13')$$

где знак (+) соответствует функции $I_\nu(k_0r)$, а знак (–) – функциям $J_\nu(k_0r)$, $Y_\nu(k_0r)$ и $K_\nu(k_0r)$, $x = k_0a, k_0b$. Решение уравнения $\Delta(\nu) = 0$ имеет множество корней $\nu = \nu_n(k_0a, k_0b)$, где индекс n определяет различные ветви решения характеристического уравнения. С целью их идентификации, а также для проверки выполнения граничных условий (7), считая, что корни $\nu_n(k_0a, k_0b)$ вычислены, найдем собственные функции (формы колебаний) рассматриваемого волновода. С этой целью используем первые три уравнения системы (12) (очевидно, что четвертое уравнение является их линейной комбинацией). Положив $A = 1$ (что не нарушает общности решения), получим неоднородную систему уравнений для определения оставшихся коэффициентов, зависящих как от ν_n, так и от n.

$$\begin{gathered} B_nL_1^+(a,\nu_n)Y_{\nu_n}(k_0a) + C_nL_1^-(a,\nu_n)I_{\nu_n}(k_0a) + \\ + D_nL_1^-(a,\nu_n)K_{\nu_n}(k_0a) = -L_1^+(a,\nu_n)J_{\nu_n}(k_0a), \\ B_nL_1^+(b,\nu_n)Y_{\nu_n}(k_0b) + C_nL_1^-(b,\nu_n)I_{\nu_n}(k_0b) + \\ + D_nL_1^-(b,\nu_n)K_{\nu_n}(k_0b) = -L_1^+(b,\nu_n)J_{\nu_n}(k_0b), \\ B_nL_2^+(a,\nu_n)Y_{\nu_n}(k_0a) + C_nL_2^-(a,\nu_n)I_{\nu_n}(k_0a) + \\ + D_nL_2^-(a,\nu_n)K_{\nu_n}(k_0a) = -L_2^+(a,\nu_n)J_{\nu_n}(k_0a). \end{gathered} \quad (14)$$

Решение системы (14) можно представить в виде

$$B_n = \frac{\Delta_B(\nu_n)}{\Delta(\nu_n)}, \quad C_n = \frac{\Delta_C(\nu_n)}{\Delta(\nu_n)}, \quad D_n = \frac{\Delta_D(\nu_n)}{\Delta(\nu_n)}, \quad (15)$$

где

$$\Delta(\nu_n) = \begin{vmatrix} L_1^+(a,\nu_n)Y_{\nu_n}(k_0a) & L_1^-(a,\nu_n)I_{\nu_n}(k_0a) & L_1^-(a,\nu_n)K_{\nu_n}(k_0a) \\ L_1^+(b,\nu_n)Y_{\nu_n}(k_0b) & L_1^-(b,\nu_n)I_{\nu_n}(k_0b) & L_1^-(b,\nu_n)K_{\nu_n}(k_0b) \\ L_2^+(a,\nu_n)Y_{\nu_n}(k_0a) & L_2^-(a,\nu_n)I_{\nu_n}(k_0a) & L_2^-(a,\nu_n)K_{\nu_n}(k_0a) \end{vmatrix}$$

$$\Delta_B(\nu_n) = -\begin{vmatrix} L_1^+(a,\nu_n)J_{\nu_n}(k_0a) & L_1^-(a,\nu_n)I_{\nu_n}(k_0a) & L_1^-(a,\nu_n)K_{\nu_n}(k_0a) \\ L_1^+(b,\nu_n)J_{\nu_n}(k_0b) & L_1^-(b,\nu_n)I_{\nu_n}(k_0b) & L_1^-(b,\nu_n)K_{\nu_n}(k_0b) \\ L_2^+(a,\nu_n)J_{\nu_n}(k_0a) & L_2^-(a,\nu_n)I_{\nu_n}(k_0a) & L_2^-(a,\nu_n)K_{\nu_n}(k_0a) \end{vmatrix}$$

$$\Delta_C(\nu_n) = -\begin{vmatrix} L_1^+(a,\nu_n)Y_{\nu_n}(k_0a) & L_1^+(a,\nu_n)J_{\nu_n}(k_0a) & L_1^-(a,\nu_n)K_{\nu_n}(k_0a) \\ L_1^+(b,\nu_n)Y_{\nu_n}(k_0b) & L_1^+(b,\nu_n)J_{\nu_n}(k_0b) & L_1^-(b,\nu_n)K_{\nu_n}(k_0b) \\ L_2^+(a,\nu_n)Y_{\nu_n}(k_0a) & L_2^+(a,\nu_n)J_{\nu_n}(k_0a) & L_2^-(a,\nu_n)K_{\nu_n}(k_0a) \end{vmatrix}$$

$$\Delta_D(\nu_n) = -\begin{vmatrix} L_1^+(a,\nu_n)Y_{\nu_n}(k_0a) & L_1^-(a,\nu_n)I_{\nu_n}(k_0a) & L_1^+(a,\nu_n)J_{\nu_n}(k_0a) \\ L_1^+(b,\nu_n)Y_{\nu_n}(k_0b) & L_1^-(b,\nu_n)I_{\nu_n}(k_0b) & L_1^+(b,\nu_n)J_{\nu_n}(k_0b) \\ L_2^+(a,\nu_n)Y_{\nu_n}(k_0a) & L_2^-(a,\nu_n)I_{\nu_n}(k_0a) & L_2^+(a,\nu_n)J_{\nu_n}(k_0a) \end{vmatrix}.$$

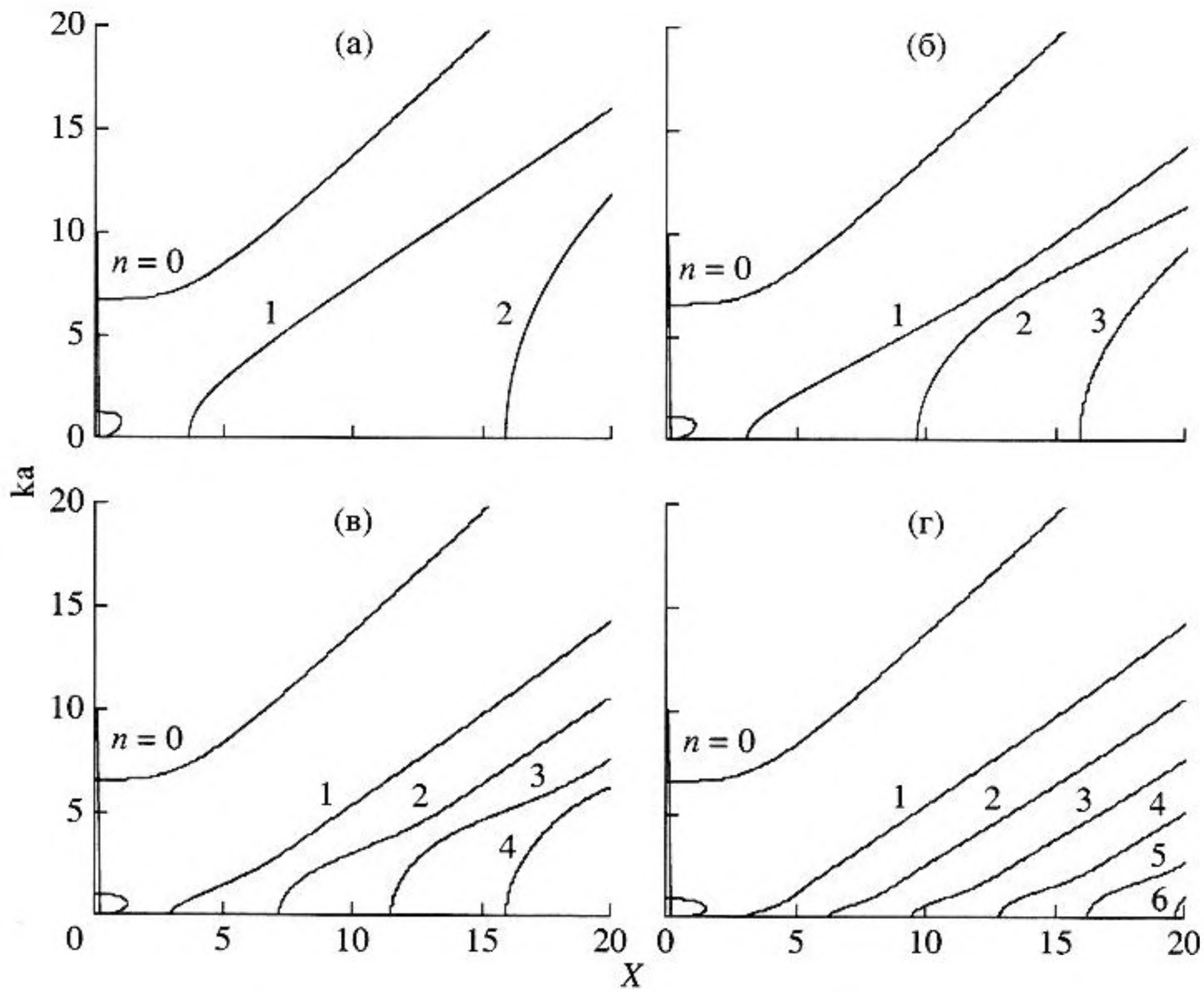

Рис. 1. Дисперсионные зависимости для угловых нормальных волн кольца. Параметр $X = k_0a$. Значения параметра d: а) $d = 0.3$; б) $d = 0.5$; в) $d = 0.7$, г) $d = 0.9$.

Соответствующие полученным значениям коэффициентов собственные функции волновода можно записать в виде

$$W_n = J_{\nu_n}(k_0r) + B_nY_{\nu_n}(k_0r) + \\ + C_nI_{\nu_n}(k_0r) + D_nK_{\nu_n}(k_0r); \tag{16}$$

$$\frac{M_r}{D_mk_0^2} = L_1^+(r, \nu_n)J_{\nu_n}(k_0r) + B_nL_1^+(r, \nu_n)Y_{\nu_n}(k_0r) + \\ + C_nL_1^-(r, \nu_n)I_{\nu_n}(k_0r) + D_nL_1^-(r, \nu_n)K_{\nu_n}(k_0r); \tag{17}$$

$$\frac{V}{D_mk_0^3} = L_2^+(r, \nu_n)J_{\nu_n}(k_0r) + B_nL_2^+(r, \nu_n)Y_{\nu_n}(k_0r) + \\ + C_nL_2^-(r, \nu_n)I_{\nu_n}(k_0r) + D_nL_2^-(r, \nu_n)K_{\nu_n}(k_0r). \tag{18}$$

Прежде чем перейти к изложению результатов расчетов, сделаем несколько замечаний по поводу их представления.

Выше было указано, что искомая величина ν играет роль углового волнового числа, входящего в выражение для фазы нормальной волны $\varphi = \nu\theta$. Следуя работе [6], преобразуем это выражение так: $\varphi = \frac{\nu}{r}r\theta = k_rS$, где $k_r = \frac{\nu}{r}$ – "линейное" волновое число, $S = r\theta$ – длина дуги, "пройденная" волной. Выбирая такую форму представления результатов, зададим для определенности $r = a$, т.е. будем рассматривать волновое число, соответствующее внешней границе кольца. Тогда неизвестную величину ν в приведенных уравнениях можно заменить на $\nu = ka$ (нижний индекс у k будем опускать). Аргументы, входящие в вышеприведенные уравнения, могут быть выбраны в виде k_0a и $k_0b = k_0a(1 - d)$, где $d = 2L/a$ – безразмерная ширина кольца.

"Линейная" скорость c также будет зависеть от радиуса. Выбрав в качестве основного аргумента величину k_0a, безразмерную искомую скорость можно записать в виде $C = \frac{c}{c_0} = \frac{k_0a}{\nu} = \frac{k_0a}{ka}$, где c_0 – скорость изгибных волн в пластине.

Решение уравнения (13) для неизвестной величины $\nu = ka$ в зависимости от безразмерной частоты k_0a для различных значений безразмерной ширины кольца d выполнялось с помощью специальной компьютерной программы. На рис. 1 приведены результаты расчета для различных величин d. По оси абсцисс отложена величина $X = k_0a$, по оси ординат – $\nu = ka$.

Приведенный график является типичным для всех значений параметра $0 < d < 1$. Наблюдаются три группы дисперсионных кривых: 1) одиночные ветви ($n = 0$), начинающиеся при нулевой частоте;

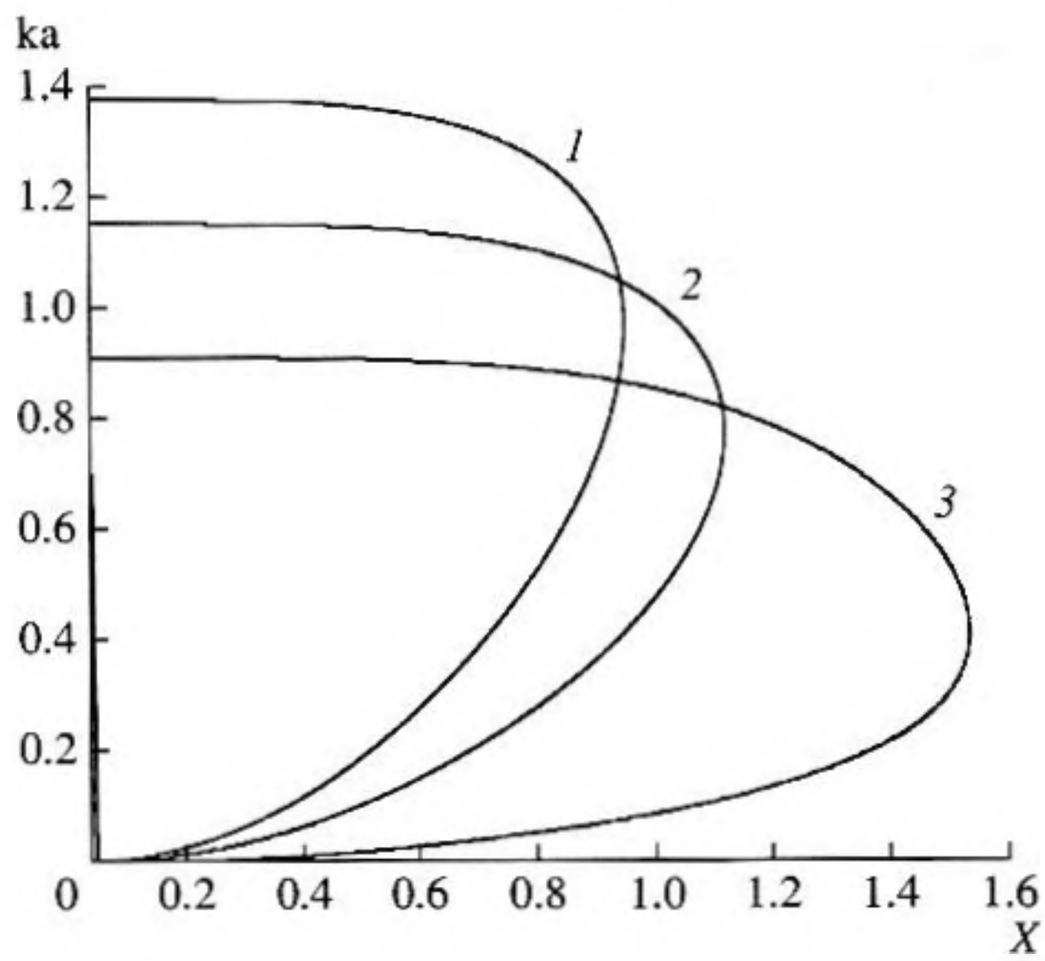

Рис. 2. Низкочастотные "полузамкнутые" ветви. *1* – $d = 0.1$, *2* – $d = 0.5$, *3* – $d = 0.9$.

2) бесконечное число ветвей, соответствующих, как в любом волноводе, нормальным волнам высоких порядков, число которых растет при увеличении d, 3) одиночные ветви в виде "полузамкнутых" петель, расположенные в непосредственной близости от начала координат.

Эти ветви приведены на рис. 2 для некоторых значений параметра d; подобные ветви для нормальных волн ранее, насколько известно автору, в теории упругих волноводов не встречались. Подробно свойства этих волн в рамках настоящей статьи мы рассматривать не будем.

Одиночные ветви ($n = 0$) обладают рядом специфических свойств. Поскольку все их значения v лежат выше прямой $v = X$, то фазовые скорости этого типа волн всегда меньше скорости изгибных волн в свободной пластине. Характерным свойством этих ветвей является их идентичность при изменении параметра d в пределах, по крайней мере, $0.3 < d < 1$. Расхождение ветвей появляется при меньших его значениях, что можно видеть на рис. 3а, где представлены графики для различных значений d. (Это явление будет объяснено ниже.) Другой особенностью ветвей с $n = 0$ является наличие при низких частотах горизонтальных участков, на которых безразмерная скорость C линейно возрастает с частотой и для величин $0.3 < d < 1$ может быть представлена формулой $C \approx 0.15k_0a$, которая для фазовой скорости этой волны переходит в формулу $c = 0.15\omega a$, что дает линейную зависимость от частоты и внешних размеров кольца; эта формула справедлива до значений $k_0a \approx 2$. (рис. 3б). На этом же рисунке представлены данные для других значений d, которые также дают линейную зависимость. При больших частотах (параметр X) значения C для всех d стремятся к асимптотическому значению $C_\infty \approx 0.825$, отмеченному на рис. 3б пунктирной линией. Более подробные расчеты, выполненные

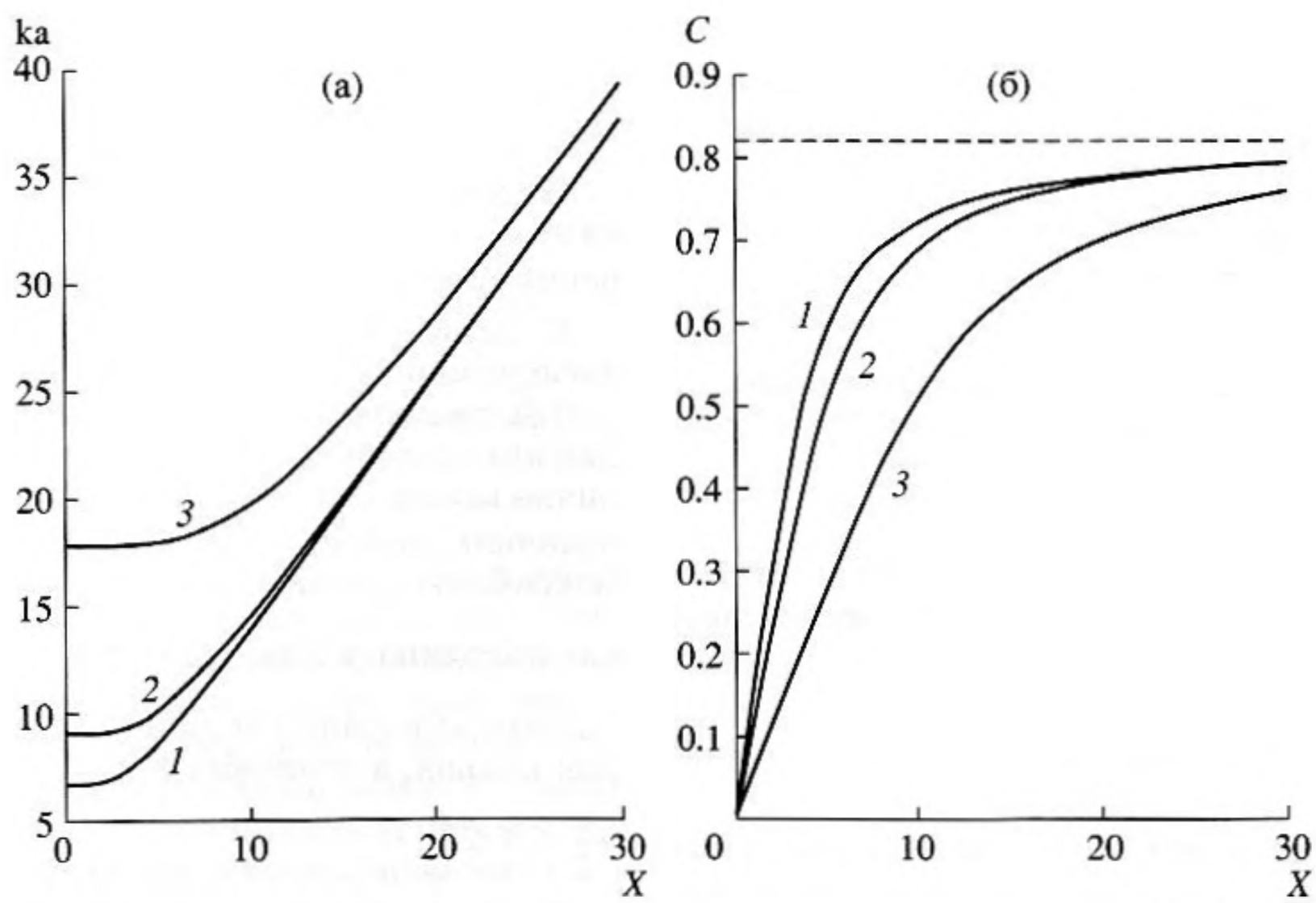

Рис. 3. Характеристики нормальных волн с $n = 0$. а) безразмерные волновые числа; б) скорости. *1* – $d = 0.3$–0.999, *2* – $d = 0.05$, *3* – $d = 0.01$.

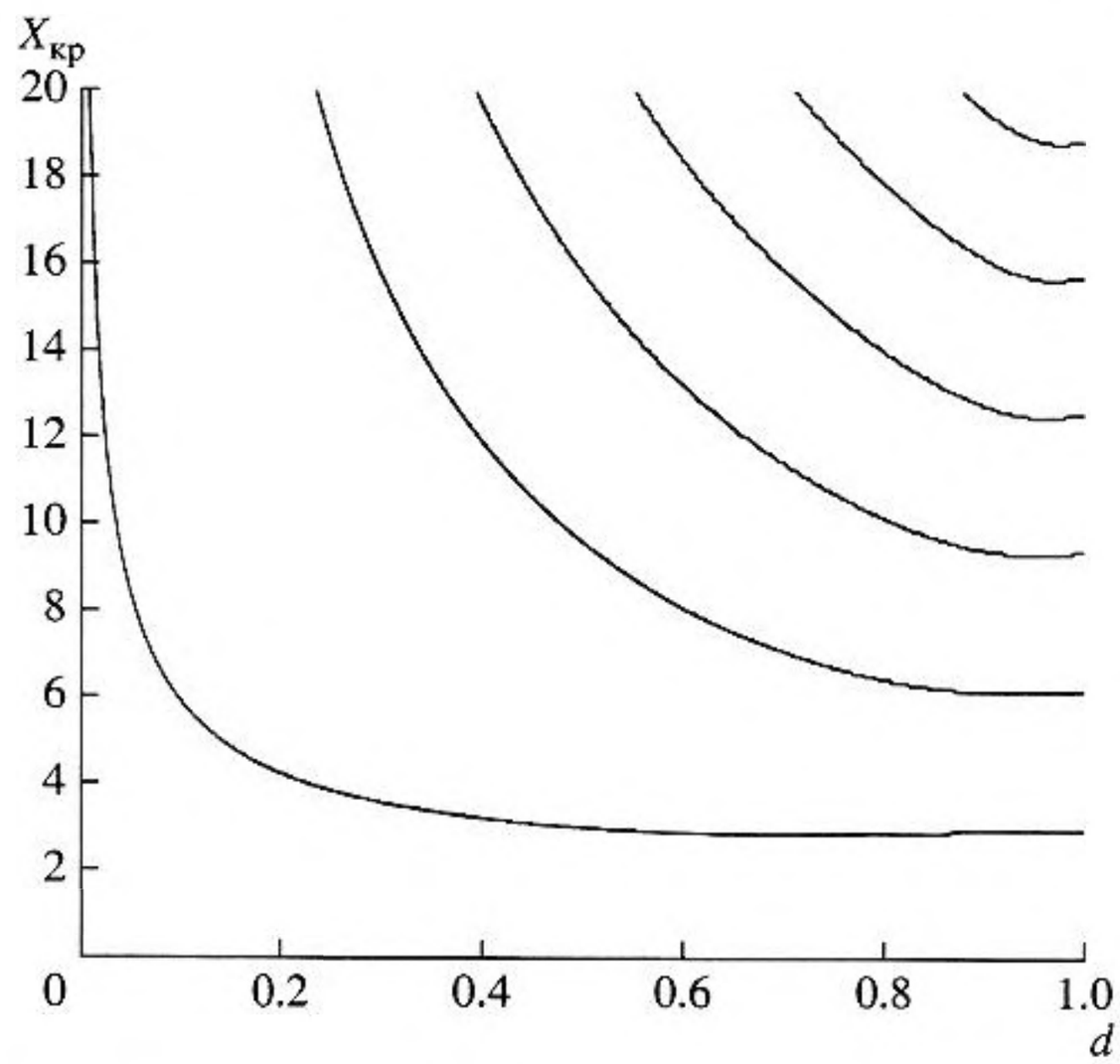

Рис. 4. Критические частоты для нормальных волн с $n \geq 1$ в зависимости от параметра d.

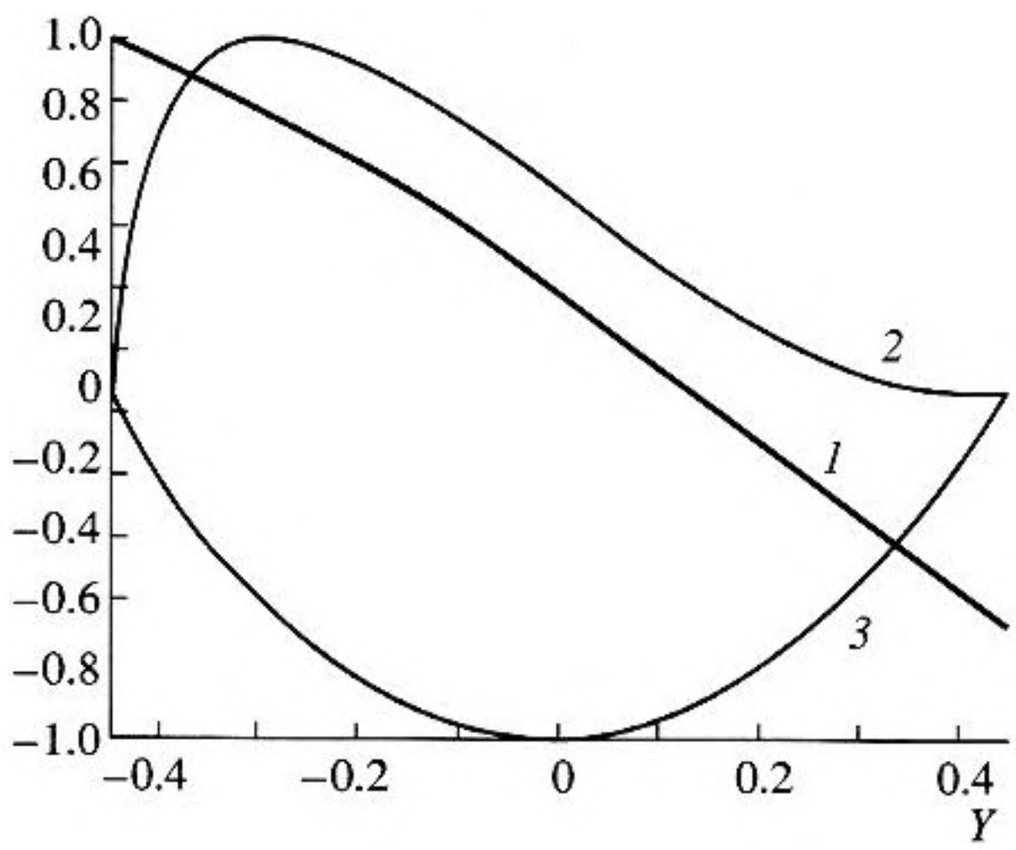

Рис. 5. Собственные функции для нормальной волны с $n = 1$ при $d = 0.9$. *1* – смещение W; *2* – момент M_r; *3* – сила V.

вплоть до величин $v \approx 100$, показывают, что величина C в этом случае может быть представлена в виде

$$C = \frac{c}{c_0} \approx C_\infty - \frac{1}{k_0 a}. \qquad (19)$$

Из рис. 1 видно, что нормальные волны высоких порядков ($n \geq 1$) зарождаются при значениях $v_n = 0$. При этом величины, описывающие поле изгибных волн, не зависят от полярного угла θ. В момент зарождения каждой такой волны ее волновой фронт представляет собой окружность, "соосную" с границами волновода $r = a$ и $r = b$. В этом случае смещение выражается через цилиндрические функции нулевого порядка. В плоских волноводах процесс зарождения нормальных волн аналогичен рассмотренному – волновой фронт параллелен плоской границе волновода.

Так же, как и в плоских волноводах, существуют критические частоты (частоты зарождения волн). Уравнение для критических частот нетрудно получить из уравнения (13), положив в нем $v = v_n = 0$. В этом случае операторы $L^{\pm}_{1,2}$ с учетом (13') имеют вид

$$L^{\pm}_1(r, 0) = \frac{(1-\sigma)}{k_0^2 r}\frac{d}{dr} \pm 1; \quad L^{\pm}_2(r, 0) = \pm\frac{d}{k_0 dr},$$

а уравнение (13) приобретает вид

$$\begin{vmatrix} J(k_0a) & Y(k_0a) & I(k_0a) & K(k_0a) \\ J(k_0b) & Y(k_0b) & I(k_0b) & K(k_0b) \\ J_1(k_0a) & Y_1(k_0a) & I_1(k_0a) & K_1(k_0a) \\ J_1(k_0b) & Y_1(k_0b) & I_1(k_0b) & K_1(k_0b) \end{vmatrix} = 0, \qquad (20)$$

где введены дополнительные обозначения

$$J(x) = -\frac{1-\sigma}{x}J_1(x) + J_0(x);$$

$$Y(x) = -\frac{1-\sigma}{x}Y_1(x) + Y_0(x);$$

$$I(x) = \frac{1-\sigma}{x}I_1(x) + I_0(x);$$

$$K(x) = \frac{1-\sigma}{x}K_1(x) + K_0(x).$$

На рис. 4 приведено решение уравнения (20) в виде зависимости $X_{кр}$ от параметра d, дающее значения безразмерных критических частот.

С целью идентификации различных ветвей дисперсионных кривых с помощью формул (15)–(18) были проведены расчеты собственных функций для величин смещения W и безразмерных величин момента M_r и силы V. При этом указанные величины нормировались на соответствующие их максимальные значения, а безразмерная радиальная координата Y задавалась в виде $Y = \frac{r}{a} - \frac{a+b}{2a}$, так что за начало координат бралась средняя линия кольца, а величина Y изменялась в пределах $-\frac{d}{2} \leq Y \leq \frac{d}{2}$.

Результаты расчетов представлены на нижеследующих рисунках.

Начнем рассмотрение результатов с номеров $n \geq 1$. Наиболее удобно представлять собствен-

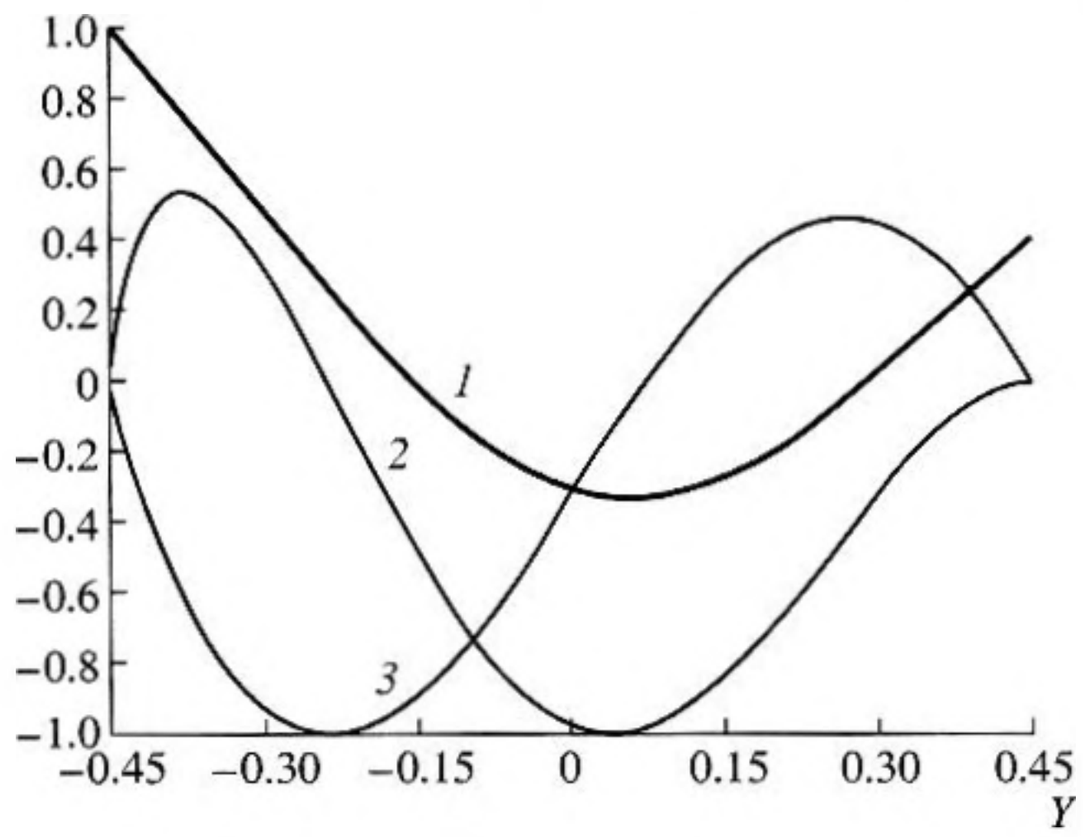

Рис. 6. То же, что на рис. 5, но для $n = 2$.

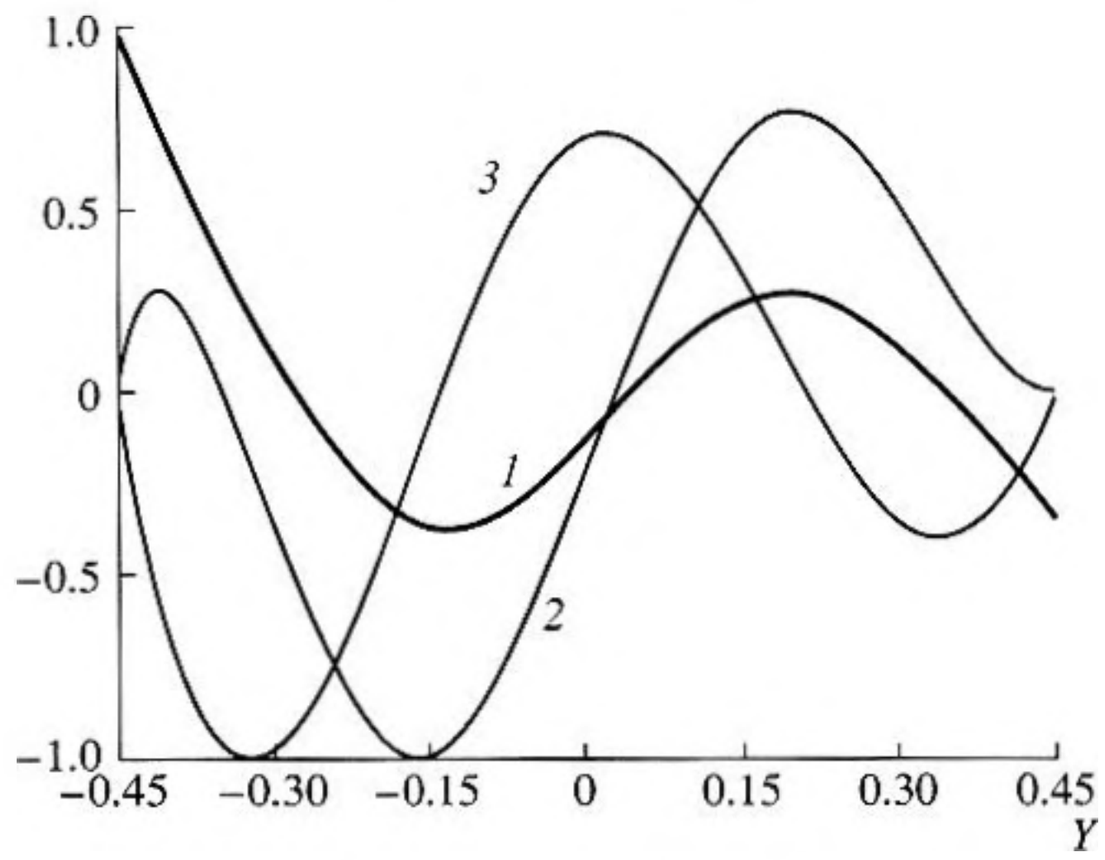

Рис. 7. То же, что на рис. 5, но для $n = 3$.

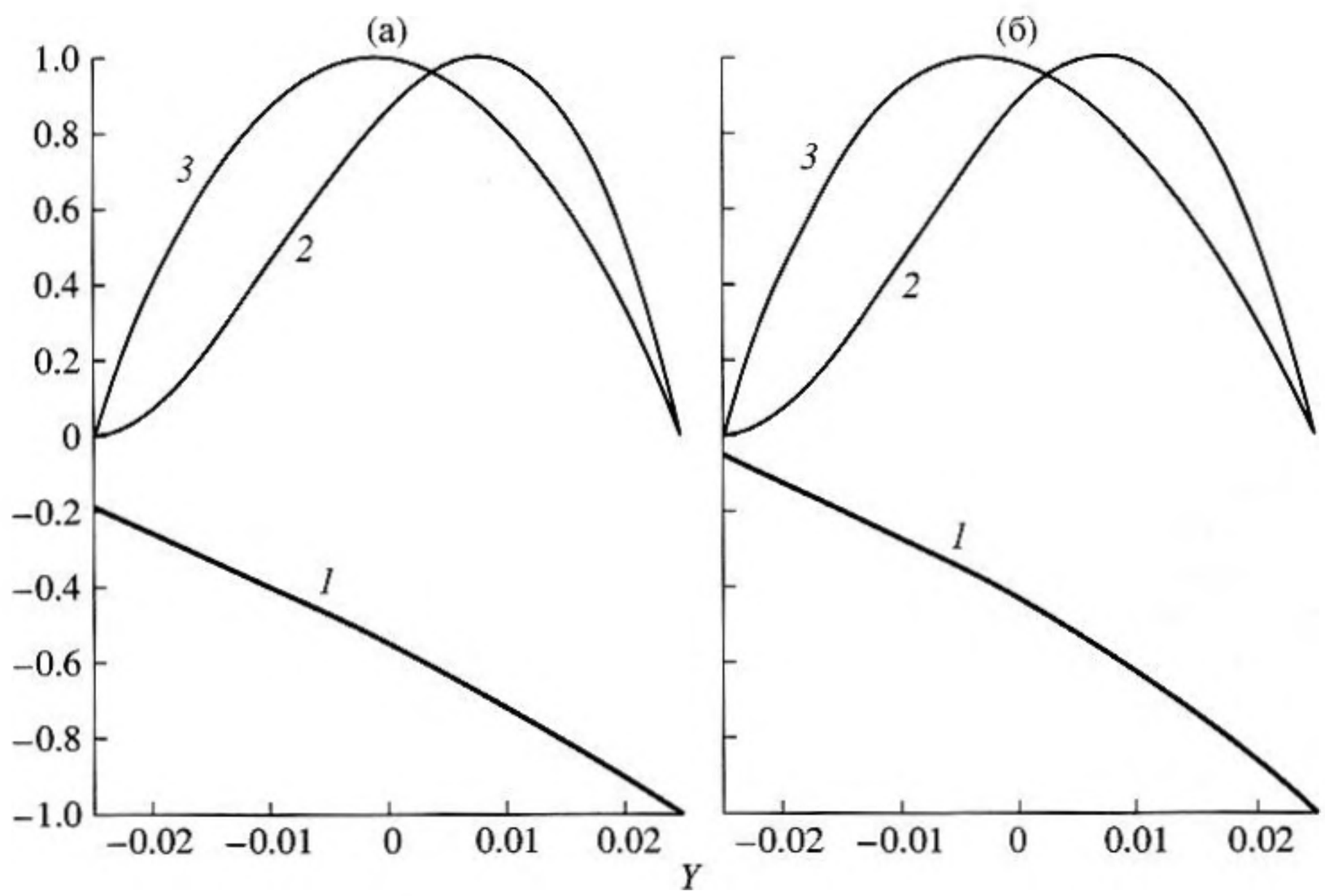

Рис. 8. Собственные функции для нормальной волны с $n = 0$ при $d = 0.05$. а) $X = 2$; б) $X = 15$. Кривые *1*, *2*, *3* – то же, что и на рис. 5.

ные функции на критических частотах при $\nu = 0$ и при d, близком к 1 (использовалась величина $d = 0.9$). На рис. 5 представлены результаты для $n = 1$. Видно, что граничные условия выполняются достаточно точно. Смещение W на границах кольца имеет противоположные знаки, и, значит, эта волна является "квазиасимметричной": цилиндрическое расхождение волны приводит к тому, что на внешней границе смещение меньше, чем на внутренней, и оно обращается в нуль не в середине кольца. При этом силовые функции являются "квазисимметричными". На рис. 6 представлены результаты для $n = 2$. Они имеют аналогичный характер, но волна является "квазисимметричной" – смещение W на границах кольца имеет одинаковые знаки и максимум вблизи средней линии кольца. Рис. 7 показывает, что волна $n = 3$ снова является "квазиасимметричной". Таким образом, волны высоких порядков попеременно являются волнами разной четности. В случае прямолинейных границ (полоса) они могут быть отделены друг от друга уже на стадии получения решения [4].

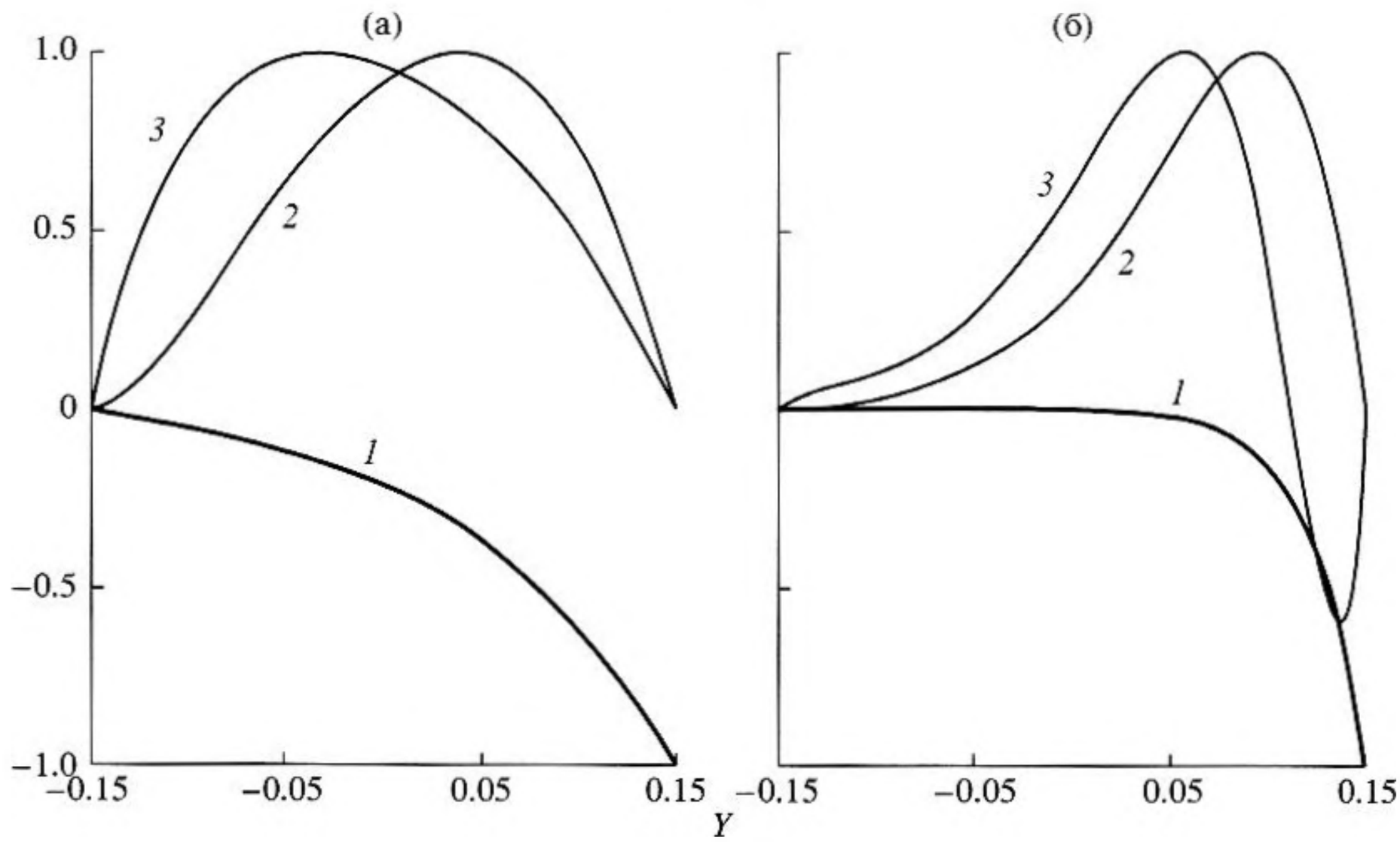

Рис. 9. То же, что на рис. 8, но для $d = 0.3$. а) $X = 2$; б) $X = 21$. Кривые *1*, *2*, *3* – то же, что и на рис. 5.

Аналогичные графики для нормальных волн с $n = 0$ представлены на рис. 8 и 9. Данные приведены для параметра $d = 0.05$ при $k_0a = 2$, $v = 9.08$ (рис. 8а) и $k_0a = 15$, $v = 20.7$ (рис. 8б), а также для $d = 0.3$ при $k_0a = 2$, $v = 6.72$ (рис. 9а) и $k_0a = 21$, $v = 27$ (рис. 9б). Видно, что при малом параметре d и низких частотах силовые функции имеют строго симметричный характер, а смещение возрастает от внутренней границы кольца к внешней с максимумом на ней. При повышении частоты указанная симметрия частично нарушается, а локализация смещения усиливается. При значении $d = 0.3$ и выше эта локализация наблюдается даже при очень низкой частоте; максимальные значения силовых функций также смещены к внешнему краю кольца. При повышении частоты степень локализации полного поля увеличивается. При этом внутренняя граница кольца на характеристики нормальных волн перестает оказывать влияние, что и было видно на рис. 3.

Таким образом, нормальные волны с $n = 0$ на высоких частотах представляют собой краевые (кромочные) волны рэлеевского типа, аналогичные так называемым волнам Коненкова [13].

В заключение отметим, что, хотя в настоящей статье удалось получить и описать основные свойства нового вида угловых нормальных волн, остается ряд вопросов относительно других их свойств, таких, как свойства волн, соответствующих замкнутым ветвям, асимптотические значения волновых чисел для $n \geq 1$ и др. Все это необходимо исследовать в дальнейшем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Коненков Ю.К.* О нормальных волнах при изгибных колебаниях пластины // Акуст. журн. 1960. Т. 6. № 1. С. 57–64.
2. *Коненков Ю.К.* К расчету фазовых скоростей нормальных волн при изгибных колебаниях упругой полосы // Акуст. журн. 1962. Т. 8. № 2. С. 241–242.
3. *Бобровницкий Ю.И.* Нормальные волны в двутавровом стержне // Акуст. журн. 1977. Т. 23. № 2. С. 209–215.
4. *Бобровницкий Ю.И.* Расчет колебаний симметричных тонкостенных структур // Акуст. журн. 1980. Т. 28. № 4. С. 615–616.
5. *Cummings A.* Sound transmission in curved duct bends // J. Sound Vibrat. 1974. V. 35. № 4. P. 451–477.
6. *Rostafinski W.* Analysys of propagation of waves of acoustic frequensis in curved ducts // J. Acoust. Soc. Amer. 1975. V. 56. P. 11–15.
7. *Бреховских Л.М.* О поверхностных волнах в твердом теле, удерживаемых кривизной границы // Акуст. журн. 1960. Т. 13. № 4. С. 541–554.
8. *Викторов И.А.* Звуковые поверхностные волны в твердых телах. М.: Наука, 1981.
9. *Голубева Е.В.* О винтовых поверхностных волнах на упругом цилиндре // Акуст. журн. 1986. Т. 22. № 3. С. 385–386.
10. *Vboulis G., Paipetis S.A., Theocaris P.S.* Curcumferental waves around cylindrical inhomogeneties in plane viscoelastic solid systems // J. Sound Vibrat. 1974. V. 35. № 4. P. 521–533.
11. *Шендеров Е.Л.* Излучение и рассеяние звука. Л.: Судостроение. 1989. 301 с.

12. *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. М.: Наука, 1966. 635 с.

13. *Коненков Ю.К.* Об изгибной волне "рэлеевского" типа // Акуст. журн. 1960. Т. 6. № 1. С. 57–64.

Waveguide Properties of a Plane Ring-Shaped Plate. I. Flexural Waves

V. V. Tyutekin

A new type of the so-called "angular" waves for flexural normal modes propagating in a ring-shaped plate is studied. A dispersion equation for wave numbers, an equation for critical frequencies, and expressions for the eigenfunctions of such a waveguide are derived. Solutions to these equations are obtained by numerical methods for various values of the parameter d, which represents the relative width of the ring. The solutions are analyzed, and the main properties of dispersion curves are described. Individual normal modes are identified on the basis of the calculation and further analysis of eigenfunctions.