

УДК 534.26

## ДИФРАКЦИЯ ЗВУКА ОТ ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА НА УПРУГОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ

© 2004 г. А. А. Клещев

Санкт-Петербургский государственный морской технический университет  
190008 С.-Петербург, ул. Лоцманская 3

E-mail: [gakusei@VG2068.spb.Edu](mailto:gakusei@VG2068.spb.Edu)

Поступила в редакцию 23.10.2002 г.

С помощью потенциалов Дебая дается решение трехмерной задачи рассеяния гармонической звуковой волны упругой цилиндрической оболочкой. Все потенциалы представляются в виде интегралов, зависящих от осевой составляющей волнового вектора.

Пусть на бесконечную упругую цилиндрическую оболочку падает гармоническая волна от точечного источника  $Q$  круговой частоты  $\omega$ , находящегося на расстоянии  $r_0$  от оси оболочки  $Z$ . Оболочка помещена во внешнюю жидкую среду с плотностью  $\rho_0$  и скоростью звука  $c_0$ .

Потенциал  $\Phi_i$  гармонического точечного источника определяется рядом [1–3]:

$$\Phi_i(r, \varphi, z) = \frac{i}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \cos(n\varphi) \varepsilon_n \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i\gamma z) \times \\ \times H_n^{(1)}(k_\gamma r_0) J_n(k_\gamma r) d\gamma, \quad r < r_0, \quad (1)$$

где  $k_\gamma = (k^2 - \gamma^2)^{1/2}$ ;  $k = \omega/c_0$ ;  $\gamma$  и  $k_\gamma$  – соответственно осевая и радиальная составляющие волнового вектора,  $\varphi_0 = 0$ ;  $z_0 = 0$  (см. ниже рис. 1);

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 2, & n \neq 0. \end{cases}$$

Потенциал  $\Phi_s(r, \varphi, z)$  рассеянной оболочкой волны по аналогии с  $\Phi_i(r, \varphi, z)$  можно записать в следующем виде:

$$\Phi_s(r, \varphi, z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\varphi) \times \\ \times \int_{-\infty}^{+\infty} A(\gamma) \exp(i\gamma z) H_n^{(1)}(k_\gamma r) d\gamma, \quad (2)$$

где  $a_n$  и  $A(\gamma)$  – неизвестные коэффициенты и функции  $\gamma$  соответственно, они определяются из граничных условий.

Цилиндрические компоненты вектора смещения  $\mathbf{U}(U_r, U_\varphi, U_z)$  запишем через потенциал  $\Phi$  и ци-

линдрические компоненты функции  $\mathbf{A}(A_r, A_\varphi, A_z)$  [4–6]:

$$\left. \begin{aligned} U_r &= \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}, \\ U_\varphi &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}, \\ U_z &= \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{1}{r} A_\varphi + \frac{\partial A_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Цилиндрические компоненты  $A_r, A_\varphi, A_z$  функции  $\mathbf{A}$  выразим через потенциалы Дебая  $U$  и  $V$  [4–9]:

$$A_r = k_2^2 r U + r \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + z \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial z} + 2 \frac{\partial U}{\partial r} + i \frac{1}{r} k_2 z \frac{\partial V}{\partial \varphi}, \quad (4)$$

$$A_\varphi = -i k_2 \left[ z \frac{\partial V}{\partial r} - r \frac{\partial V}{\partial z} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \varphi} + \frac{1}{r} z \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \varphi}, \quad (5)$$

$$A_z = k_2^2 z U + z \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - i k_2^2 \frac{\partial V}{\partial \varphi} + r \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial z} + 2 \frac{\partial U}{\partial z}, \quad (6)$$

где  $k_2$  – волновое число поперечной волны в материале оболочки.

Векторная функция  $\mathbf{A}$  следующим образом выражается через потенциалы Дебая  $U$  и  $V$  [5, 6]:

$$\mathbf{A} = \text{rot rot}(\mathbf{R}U) + i k_2 \text{rot}(\mathbf{R}V), \quad (7)$$

где  $\mathbf{R}$  – радиус-вектор точки, принадлежащей оболочке.

Эффективность такого представления становится очевидной, если учесть, что функции  $U$  и  $V$  подчиняются скалярному уравнению Гельмгольца, разделяющемуся в круговых цилиндрических координатах:

$$(\Delta + k_2^2)U = 0, \quad (8)$$

$$(\Delta + k_2^2)V = 0. \quad (9)$$

Другие представления для векторной функции  $\mathbf{A}$  в декартовой и круговой цилиндрической системах координат даются в [10–12], а в сферической системе координат – в [9].

Потенциалы  $\Phi$ ,  $U$  и  $V$  также раскладываются в ряды по собственным функциям уравнения Гельмгольца [6, 8, 9]:

$$\Phi(r, \varphi, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \cos(n\varphi) \left[ b_n \int_{-\infty}^{+\infty} B(\gamma) \exp(i\gamma z) J_n(h_\gamma r) d\gamma + b'_n \int_{-\infty}^{+\infty} B'(\gamma) \exp(i\gamma z) N_n(h_\gamma r) d\gamma \right], \quad (10)$$

$$U(r, \varphi, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\varphi) \left[ c_n \int_{-\infty}^{+\infty} C(\gamma) \exp(i\gamma z) J_n(\kappa_\gamma r) d\gamma + c'_n \int_{-\infty}^{+\infty} C'(\gamma) \exp(i\gamma z) N_n(\kappa_\gamma r) d\gamma \right], \quad (11)$$

$$V(r, \varphi, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \cos(n\varphi) \left[ d_n \int_{-\infty}^{+\infty} D(\gamma) \exp(i\gamma z) J_n(\kappa_\gamma r) d\gamma + d'_n \int_{-\infty}^{+\infty} D'(\gamma) \exp(i\gamma z) N_n(\kappa_\gamma r) d\gamma \right], \quad (12)$$

где  $h_\gamma = (k_1^2 - \gamma^2)^{1/2}$ ;  $k_1 = \omega/c_1$  – волновое число продольной волны в материале оболочки;  $c_1$  – скорость продольной волны в материале;  $N_n(\kappa_\gamma r)$  – цилиндрическая функция Неймана;  $\kappa_\gamma = (k_2^2 - \gamma^2)^{1/2}$ ;  $b_n, b'_n, c_n, c'_n, d_n, d'_n$  и  $B(\gamma), B'(\gamma), C(\gamma), C'(\gamma), D(\gamma), D'(\gamma)$  – неизвестные коэффициенты и функции соответственно, они определяются из следующих граничных условий на внешней и внутренней поверхностях упругой оболочки:

1) нормальная компонента вектора смещения  $U_r$  непрерывна на внешней границе оболочки;

2) звуковое давление в жидкости равно нормальному напряжению в оболочке на внешней границе;

3) нормальное напряжение в оболочке на внутренней границе равно нулю;

4) касательные напряжения на границах оболочки равны нулю.

В аналитической форме перечисленные граничные условия принимают следующий вид:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial r} (\Phi_i + \Phi_s) \Big|_{r=a}, \quad (13)$$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial U_r}{\partial r} + \lambda \left( \frac{1}{r} \frac{\partial U_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} U_r + \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) = -\rho_0 \omega^2 (\Phi_i + \Phi_s) \Big|_{r=a}, \quad (14)$$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial U_r}{\partial r} + \lambda \left( \frac{1}{r} \frac{\partial U_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} U_r + \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) = 0 \Big|_{r=b}, \quad (15)$$

$$\frac{\partial U_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} U_\varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial U_r}{\partial \varphi} = 0 \Big|_{r=a}, \quad (16)$$

$$\frac{\partial U_r}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial r} = 0 \Big|_{r=b}. \quad (17)$$

Подстановка рядов (1), (2), (10)–(12) в граничные условия (13)–(17) дает бесконечную систему уравнений для отыскания неизвестных коэффициентов и функций:  $a_n A(\gamma), b_n B(\gamma), b'_n B'(\gamma), c_n C(\gamma), c'_n C'(\gamma), d_n D(\gamma), d'_n D'(\gamma)$ . Из-за ортогональности тригонометрических функций  $\cos(n\varphi)$  и  $\sin(n\varphi)$  бесконечная система распадается на семь уравнений с фиксированным индексом  $n$  для отыскания семи комбинаций неизвестных коэффициентов и функций.

Произведение  $a_n A(\gamma)$  для потенциала  $\Phi_s$  рассеянной волны вычисляется по правилу Крамера из отношения двух определителей седьмого порядка:

$$a_n A(\gamma) = \Delta' / \Delta, \quad (18)$$

где  $\Delta$  – определитель системы, а  $\Delta'$  – минор, равные соответственно

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & a_{27} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & a_{37} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & a_{47} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} & a_{57} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} & a_{67} \\ a_{71} & a_{72} & a_{73} & a_{74} & a_{75} & a_{76} & a_{77} \end{vmatrix},$$

$$\Delta' = \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} \\ b_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & a_{27} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & a_{37} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & a_{47} \\ 0 & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} & a_{57} \\ 0 & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} & a_{67} \\ 0 & a_{72} & a_{73} & a_{74} & a_{75} & a_{76} & a_{77} \end{vmatrix}.$$

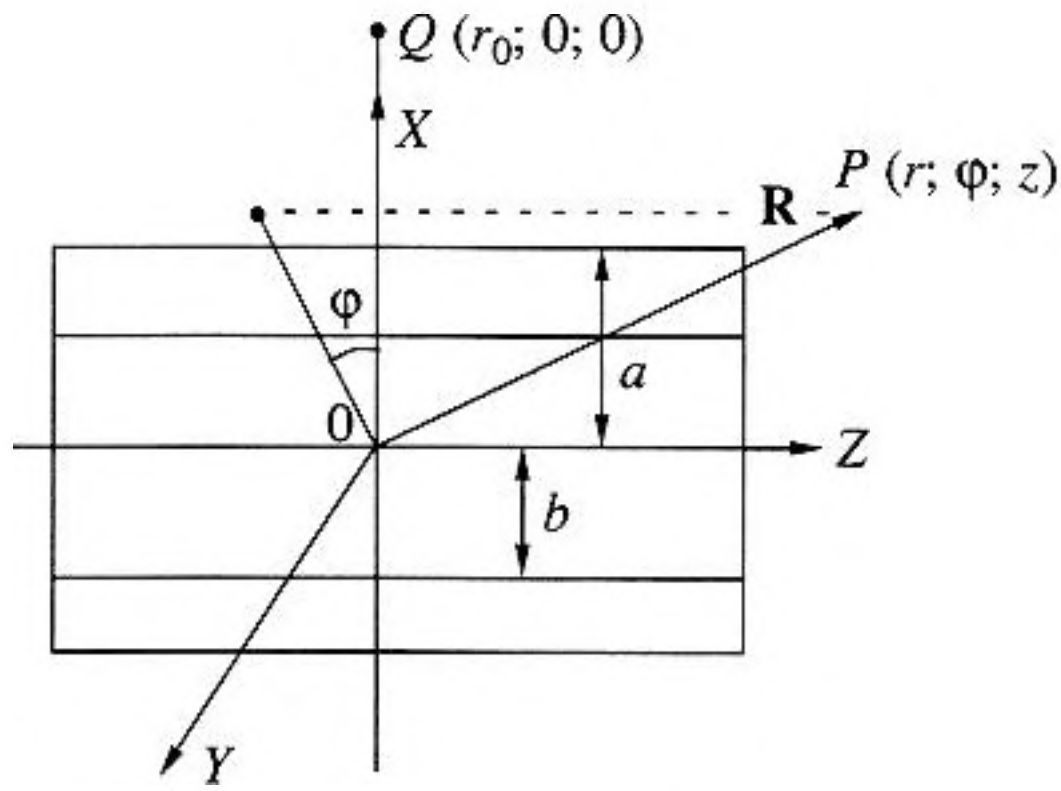


Рис. 1. Цилиндрическая оболочка, облучаемая волной от точечного источника.

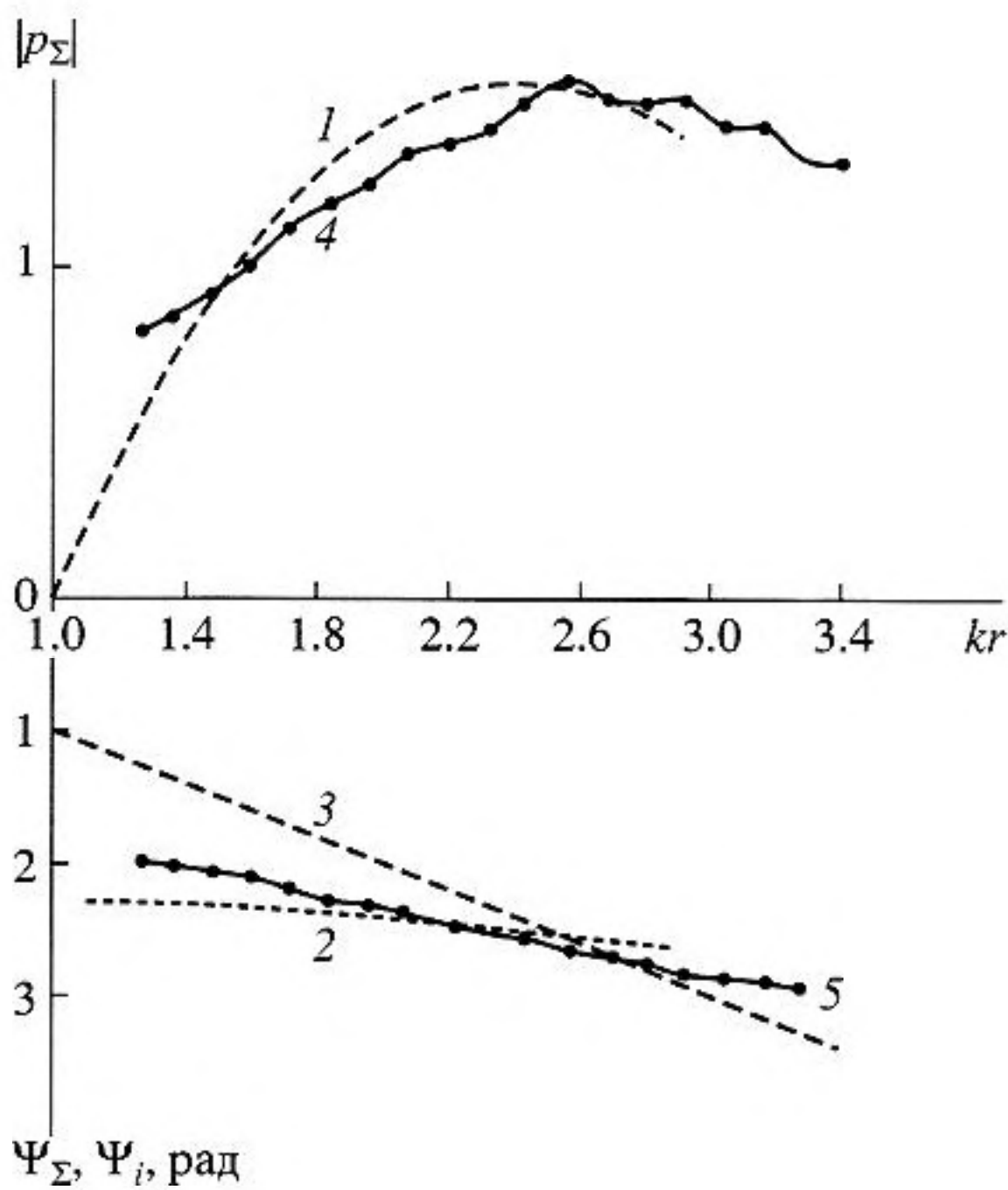


Рис. 2. Расчетные и экспериментальные распределения  $|p_\Sigma|$  и  $\Psi_\Sigma$  по направлению  $OQ$  вблизи пустотелой цилиндрической оболочки.

Значения элементов определителя системы и ее минора содержатся в [9]. При наличии жидкого заполнителя в оболочке ранг определителя системы и минора увеличивается на единицу.

Найдем асимптотику рассеянного упругой оболочкой поля, вычисляемого по формуле (2) с использованием соотношения (18). Если радиальную координату  $r_0$  источника  $Q$  мы устремим к бесконечности и положим амплитуду падающей из этого источника сферической волны равной единице в точке  $O$ , то ближнее рассеянное поле оболочки на расстоянии нескольких радиусов  $a$  от ее поверхности будет совпадать в этих же точках с рассеянным полем для источника в виде плос-

кой гармонической волны единичной амплитуды. Решение этой задачи хорошо изучено [13].

С другой стороны, оценить правильность и точность предлагаемого метода можно путем сравнения результатов расчета с результатами эксперимента на стальной (пустотелой) цилиндрической оболочке, облучаемой источником звука, близким к точечному. Методика проведения эксперимента, позволяющего измерить амплитуды и фазы рассеянного  $p_s$  или дифрагированного  $p_\Sigma$  ( $p_\Sigma = p_i + p_s$ , где  $p_i$  – давление в падающей волне) звуковых полей описана в [14–16]. На рис. 2 представлены результаты эксперимента для цилиндрической (стальной) оболочки диаметром 8.0 см и толщиной 0.4 мм. Источник  $Q$  находился на расстоянии 4.5 м от оси оболочки  $Z$  (рис. 1). Измерялась амплитуда  $|p_\Sigma|$  и фаза  $\Psi_\Sigma$  дифрагированного давления  $p_\Sigma$  вдоль направления  $OQ$  (рис. 1). Расстояние от поверхности оболочки измерялось в единицах  $kr$ , где  $k$  – волновое число в жидкости,  $r$  – расстояние от поверхности оболочки. Волновой размер оболочки  $ka$  был выбран равным 1.0. Экспериментальные значения  $|p_\Sigma|$  и  $\Psi_\Sigma$  сравнивались на рис. 2 с расчетными значениями  $|p_\Sigma|$  и  $\Psi_\Sigma$  для идеального звукомягкого цилиндра (кривая 1 и линия 2 соответственно). Кривая 3 показывает фазу  $\Psi_i$  падающей волны,  $|p_i|$  принимался равным 1. Кривая 4 характеризует  $|p_\Sigma|$ , а линия 5 –  $\Psi_\Sigma$  для оболочки. Эти экспериментальные и численные результаты являются тестом для расчетов по предложенной в статье методике.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шендеров Е.Л. Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. 350 с.
2. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. М.: Изд-во АН СССР, 1957. С. 502.
3. Фелсен Л., Маркувиц У.Н. Излучение и рассеяние волн. Т. 1–2. М.: Мир, 1978.
4. Debye P. Das Verhalten von Lichtwellen in der Nähe eines Brennpunktes oder einer Brennpunktlinie // Ann. Physik. 1909. V. 30. № 4. S. 755–776.
5. Фок В.А. Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн. М.: Советское радио. 517 с.
6. Клещев А.А., Клюкин И.И. Об изгибных волнах в упругом круглом цилиндрическом стержне // Тр. ЛКИ. 1976. Вып. 109. С. 3–5.
7. Kleschev A.A. Against the phase velocities of flexural waves in cylindrical shell // J. Techn. Acoust. 1997. V. 3. № 4. P. 16–19.
8. Kleschev A.A. Diffraction of sound radiated by a point source on an elastic cylindrical shell // J. Techn. Acoust. 1997. V. 3. № 4. P. 20–23.
9. Клещев А.А. Дифракция и распространение волн в упругих средах и телах С.-Пб.: Влас. 2002. 156 с.

10. *Buchwald V.T.* Rayleigh waves in transversely isotropic media // *Quart. J. Mech. and Applied. Meth.* 1961. V. XIV. Pt. 3. P. 293–317.
11. *Ahmad F.* Guided waves in a transversely isotropic cylinder immersed in a fluid // *J. Acoust. Soc. Amer.* 2001. V. 109. № 3. P. 886–890.
12. *Fan Y., Sinclair A.N., Honarvar F.* Scattering of a plane acoustic wave from a transversely isotropic cylinder encased in a solid elastic medium // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1999. V. 106. № 3. Pt. 1. P. 1229–1236.
13. *Юбералл Х.* Акустика оболочек (обзор) // *Акуст. журн.* 2001. Т. 47. № 2. С. 149–177.
14. *Клещев А.А., Клюкин И.И.* Применение дифракционного интеграла Кирхгофа для расчета угловых характеристик рассеяния // *Сб. докладов VII-й Всес. акуст. конф. Л., 1973.* С. 123–125.
15. *Клещев А.А.* Некоторые критерии акустических дифракционных измерений // *Сб. докладов VII-й Всес. акуст. конф. Л., 1973.* С. 143–146.
16. *Клещев А.А.* Гидроакустические рассеиватели. С.-Пб: Судостроение, 1992. 248 с.

## Diffraction of Point-Source-Generated Sound by an Elastic Cylindrical Shell

A. A. Kleshchev

The three-dimensional problem on the scattering of a harmonic sound wave by an elastic cylindrical shell is solved using Debye potentials. All potentials are represented in the form of integrals depending on the axial component of the wave vector.