АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2004, том 50, № 1, с. 90–93

УДК 534.26

РЕЗОНАТОР МОНОПОЛЬНО-ДИПОЛЬНОГО ТИПА ДЛЯ ИЗГИБНЫХ ВОЛН В СТЕРЖНЕ

© 2004 г. А. Д. Лапин
Акустический институт им. Н.Н. Андреева РАН
117036 Москва, ул. Шверника, 4
E-mail: mironov@akin.ru

Поступила в редакцию 17.03.03 г.

Исследован простейший резонатор для изгибных волн в стержне, реагирующий не только на смещение, но и на наклон (производную смещения) оси этого стержня. Он представляет собой конструкцию из двух пружин с грузами, присоединенных общим жестким (неизгибающимся) стерженьком к упругому стержню, по которому бежит изгибная волна. Одна из этих пружин расположена перпендикулярно стержню, другая пружина расположена параллельно стержню. Показано, что при определенном трении этот одиночный резонатор монопольно-дипольного типа полностью поглощает падающую изгибную волну резонансной частоты в упругом стержне.

На практике для создания виброизоляции изгибных волн в стержнях и пластинах применяют резонаторы [1–4]. Простейшим резонатором является пружина с грузом [5–7]. Такой резонатор, расположенный перпендикулярно стержню и присоединенный к нему пружиной, является резонатором монопольного типа, он реагирует на смещение оси стержня. На резонансной частоте падающая изгибная волна полностью отражается от резонатора монопольного типа без трения, бегущая волна за резонатором отсутствует. Трение в резонаторе уменьшает эффективность работы этого резонатора как отражателя волн. Резонатор с трением поглощает изгибные волны. Исследование показывает, что одиночный резонатор монопольного типа с оптимальным трением поглощает не более половины энергии падающей волны. Полностью поглотить изгибную волну резонансной частоты можно при помощи комбинации резонатора без потерь и резонатора с определенными потерями, при этом расстояние между резонаторами должно быть равным нечетному числу четвертей длин волн [8].

Ниже исследован одиночный резонатор монопольно-дипольного типа. Простейшим таким резонатором является конструкция из двух пружин с грузами, присоединенных общим жестким (неизгибающимся) стерженьком к упругому стержню, по которому бежит изгибная волна. Одна из этих пружин с грузом расположена перпендикулярно стержню и является монопольным резонатором, реагирующим на смещение стержня, другая пружина с грузом расположена параллельно стержню и является дипольным резонатором, реагирующим на наклон (производную смещения) оси стержня. На рисунке (*a*) изображен исследуемый резонатор, где *1* – пружина с коэффициентом упругости $\kappa_1(1 - i\varepsilon_1)$, 2 – пружина с коэффициентом упругости $\kappa_2(1 - i\varepsilon_2)$, *3* – жесткий соединительный стерженек длины L, *4* – упругий стержень, по которому бежит изгибная волна. Можно ожидать, что при определенном трении одиночный резонатор монопольно-дипольного типа полностью поглотит изгибную волну резонансной частоты в тонком упругом стержне.

Направим ось x декартовой системы координат вдоль оси невозмущенного стержня и будем считать, что он колеблется в плоскости xy. Присоединим к стержню в точке $x = 0$ резонатор монопольно-дипольного типа. Пусть слева на резонатор падает гармоническая изгибная волна со смещением

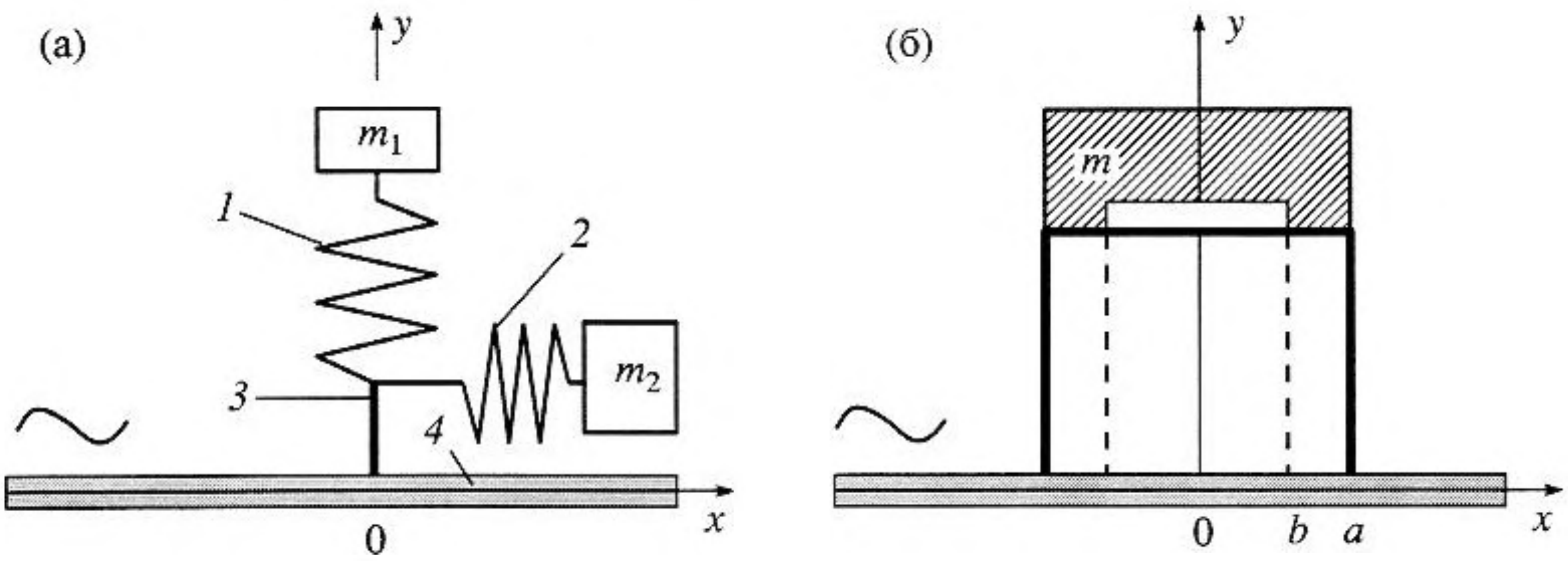
$$w_0(x, t) = \exp[i(kx - \omega t)], \tag{1}$$

где k – волновое число изгибной волны. Под действием этой волны резонатор колеблется и создает на стержне точечную нормальную силу $F(t)$ и точечный изгибающий момент $M(t)$. Уравнение движения стержня, соединенного с резонатором, можно написать в виде

$$\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = F(t)\delta(x) - M(t)\delta'(x), \tag{2}$$

где ρ и D – соответственно линейная плотность и изгибная жесткость стержня, $\delta(x)$ и $\delta'(x)$ – дельта-функция и ее производная.

Обозначим через $\xi_1(t)$ – смещение груза m_1 по оси y от положения равновесия и через $\xi_2(t)$ – сме-



Резонатор монопольно-дипольного типа.

щение груза m_2 по оси x от положения равновесия. Уравнения движения резонатора имеют вид

$$m_1\ddot{\xi}_1(t) = -F(t), \quad m_2\ddot{\xi}_2(t) = -f(t), \tag{3}$$

где силы $F(t)$ и $f(t)$ определяются по формулам

$$F(t) = \kappa_1(1 - i\varepsilon_1)[\xi_1(t) - w(0, t)], \tag{4}$$

$$f(t) = \kappa_2(1 - i\varepsilon_2)\left[\xi_2(t) + L\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{x=0}\right] = -M(t)/L, \tag{5}$$

где $w(x, t)$ – полное поле в стержне, равное сумме падающего и рассеянного полей, ε_1 и ε_2 – коэффициенты диссипации.

При гармонической падающей волне (1) нормальную силу и изгибающий момент можно представить в виде $F(t) = F_0\exp(-i\omega t)$, $M(t) = M_0\exp(-i\omega t)$, где F_0 и M_0 – соответственно комплексные амплитуды силы и момента. Согласно уравнению (2), рассеянное поле в стержне равно сумме монопольного и дипольного полей, определяемых соответственно по формулам

$$w_1(x, t) = \frac{iF_0}{4k^3D}\{\exp(ik|x|) + i\exp(-k|x|)\}\exp(-i\omega t), \tag{6}$$

$$w_2(x, t) = \operatorname{sgn}x\frac{M_0}{4k^2D}\{\exp(ik|x|) - \exp(-k|x|)\}\exp(-i\omega t), \tag{7}$$

где $k^4 = \rho\omega^2/D$, $\operatorname{sgn}x = +1$ при $x > 0$, $\operatorname{sgn}x = -1$ при $x < 0$. При $x = 0$ выполняются соотношения

$$w_1 = \frac{iF_0}{4k^3D}(1+i)\exp(-i\omega t), \quad \frac{\partial w_1}{\partial x} = 0,$$

$$w_2 = 0, \quad \frac{\partial w_2}{dx} = \frac{M_0}{4kD}(1+i)\exp(-i\omega t).$$

Амплитуды F_0 и M_0 подберем таким образом, чтобы удовлетворялись соотношения (4) и (5). Согласно уравнениям (3) смещения грузов будут

$$\xi_1(t) = \frac{F_0}{m_1\omega^2}\exp(-i\omega t),$$
$$\xi_2(t) = -\frac{M_0}{Lm_2\omega^2}\exp(-i\omega t). \tag{8}$$

Подставляя формулы (1), (6), (7) и (8) в соотношения (4) и (5), получим искомые амплитуды силы и момента

$$F_0 = i\omega\left\{\left[\operatorname{Re}Y + \frac{\varepsilon_1\omega}{\kappa_1}\right] + i\left[\frac{1}{m_1\omega} - \frac{\omega}{\kappa_1} + \operatorname{Im}Y\right]\right\}^{-1}, \tag{9}$$

$$M_0 = -k\omega L^2\left\{\left[\frac{\omega L^2}{4kD} + \frac{\varepsilon_2\omega}{\kappa_2}\right] + i\left[\frac{1}{\omega m_2} - \frac{\omega}{\kappa_2} - \frac{\omega L^2}{4kD}\right]\right\}^{-1}, \tag{10}$$

где $Y = \dfrac{-i\omega w_1(0, t)}{F(t)} = \dfrac{\omega(1+i)}{4k^3D}$ – податливость бесконечного стержня по отношению к точечной силе.

Рассеянные поля монопольного и дипольного типов получим соответственно по формулам (6) и (7) при подстановке амплитуд F_0 и M_0 в них. Резонанс монопольного рассеяния происходит при частоте ω_1, являющейся решением уравнения

$$\frac{1}{m_1\omega} - \frac{\omega}{\kappa_1} + \operatorname{Im}Y = 0. \tag{11}$$

Резонанс дипольного рассеяния наступает при частоте ω_2, удовлетворяющей уравнению

$$\frac{1}{\omega m_2} - \frac{\omega}{\kappa_2} - \frac{\omega L^2}{4kD} = 0. \tag{12}$$

Полное поле в стержне равно

$$w(x, t) = \Bigg\{ \exp(ikx) + \\ + \frac{iF_0}{4k^3D}[\exp(ik|x|) + i\exp(-k|x|)] + \\ + \operatorname{sgn} x \frac{M_0}{4k^2D}[\exp(ik|x| - \exp(-k|x|)] \Bigg\} \exp(-i\omega t), \tag{13}$$

где амплитуды силы и момента определяются по формулам (9) и (10).

Исследуем структуру полного поля (13) при некоторых значениях параметров. Пусть $m_2 = 0$, $\varepsilon_1 = 0$. Это означает, что колебательная система является резонатором монопольного типа и трение в ней отсутствует. Тогда при частоте, равной ω_1, падающая волна полностью отражается от резонатора

$$w(x < 0, t) = \{2i\sin(kx) - i\exp(kx)\}\exp(-i\omega t),$$
$$w(x > 0, t) = -i\exp(-kx - i\omega t).$$

Пусть $m_1 = 0$, $\varepsilon_2 = 0$. Это означает, что колебательная система является резонатором дипольного типа и трение в ней отсутствует. Тогда при частоте, равной ω_2, падающая волна также полностью отражается от резонатора

$$w(x < 0, t) = \{2\cos(kx) - \exp(kx)\}\exp(-i\omega t),$$
$$w(x > 0, t) = \exp(-kx - i\omega t).$$

Пусть $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$, $\omega_1 = \omega_2$. Это означает, что трение в колебательной системе отсутствует и собственные частоты ω_1 и ω_2 совпадают. Тогда при $\omega = \omega_1 = \omega_2$ падающая волна не отражается от резонатора, при прохождении она лишь изменяет свою фазу

$$w(x < 0, t) = \{\exp(ikx) - \\ -(1+i)\exp(kx)\}\exp(-i\omega t),$$
$$w(x > 0, t) = \{-\exp(ikx) + \\ + (1-i)\exp(-kx)\}\exp(-i\omega t).$$

Пусть $\varepsilon_1 = \dfrac{\kappa_1}{4k^3D}$, $\varepsilon_2 = \dfrac{\kappa_2 L^2}{4kD}$, $\omega_1 = \omega_2$. Это означает, что в монопольном и дипольном резонаторах диссипативные потери равны потерям вследствие излучения и собственные частоты ω_1 и ω_2 совпадают. Тогда при $\omega = \omega_1 = \omega_2$ имеем поле

$$w(x < 0, t) = \\ = \left\{\exp(ikx) - \frac{1}{2}(1+i)\exp(kx)\right\}\exp(-i\omega t),$$
$$w(x > 0, t) = \frac{1}{2}(1-i)\exp(-kx - i\omega t).$$

Следовательно, при этих значениях параметров одиночный резонатор монопольно-дипольного типа полностью поглощает падающую однородную волну в тонком стержне, за резонатором остается лишь неоднородная (экспоненциально затухающая) волна. Отметим, что при помощи двух одинаковых симметрично расположенных ($y > 0$ и $y < 0$) монопольно-дипольных резонаторов можно поглотить изгибную волну и в достаточно толстом стержне. При падающей волне (1) в стержне с симметричными резонаторами не генерируется рассеянная продольная волна.

Исследуем более сложную модель резонатора (см. рисунок, *б*). Упругий цилиндрический стерженек радиуса a и длины L (например, резиновый столбик) нагружен сверху массой m, распределенной равномерно по кольцу $b < r < a$, по кругу $r < b$ он сверху не нагружен. Линейные размеры стерженька малы по сравнению с длинами продольной и изгибной волн в нем. Обозначим через E_1 и ε – соответственно модуль Юнга и коэффициент диссипации упругого материала. Изгибная жесткость стерженька равна $D_1 = E_1 S r_0^2$, где $r_0 = a/2$ и $S = \pi a^2$ – соответственно радиус инерции и площадь круга радиуса a. В стерженьке по цилиндрической поверхности $r = b$ сделан разрез, так что упругая среда, находящаяся при $r < b$, не влияет на колебания массы m вдоль оси этого стерженька. Пусть резонатор (стерженек с массой) присоединен к упругому стержню в точке $x = 0$ и пусть на него падает изгибная волна (1). Под действием этой волны резонатор колеблется и создает на стержне точечную нормальную силу $F(t) = F_0\exp(-i\omega t)$ и точечный изгибающий момент $M(t) = M_0\exp(-i\omega t)$. Рассеянное поле в стержне равно сумме монопольного и дипольного полей, определяемых соответственно по формулам (6) и (7). Амплитуды F_0 и M_0 получим из соотношений, выражающих равенство смещений и наклонов осей стержня и стерженька в точке их соединения. Обозначая через $u(y, t)$ и $v(y, t)$ – смещения в стерженьке по осям y и $(-x)$, граничные условия запишем в виде

$$w_0(0, t) + w_1(0, t) + w_2(0, t) = u(0, t),$$
$$\left[\frac{\partial}{\partial x}(w_0 + w_1 + w_2)\right]_{x=0} = \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_{y=0}. \tag{14}$$

Смещения u и v в стерженьке создаются соответственно силой $-F(t)$ и изгибающим моментом $-M(t)$ и вычисляются стандартным методом [9]. При длине стерженька, малой по сравнению с длинами продольной и изгибной волн, имеем выражения

$$u(0,t) = \frac{1}{\omega}\left[\frac{1}{m\omega} - (1+i\varepsilon)\frac{\omega}{\kappa_1}\right]F(t),$$
$$\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{1}{\omega L^2}\left[\frac{1}{m\omega} - (1+i\varepsilon)\frac{\omega}{\kappa_2}\right]M(t), \quad (15)$$

где $\kappa_1 = \frac{E_1S_1}{L}$, $\kappa_2 = \frac{3D_1}{L^3}$, $S_1 = \pi(a^2 - b^2)$. Величины κ_1 и κ_2 являются эффективными коэффициентами упругости "перпендикулярной" и "параллельной" пружин. Подставляя формулы (1), (6), (7) и (15) в соотношения (14), получим искомые амплитуды силы и момента. Они определяются по формулам (9) и (10), где $m_1 = m_2 = m$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$. Полное поле в стержне получим по формуле (13) при подстановке амплитуд F_0 и M_0 в нее. Резонансные частоты монопольного и дипольного рассеяния определяются соответственно из дисперсионных уравнений (11) и (12), где $m_1 = m_2 = m$, $\kappa_1 = E_1S_1/L$, $\kappa_2 = 3D_1/L^3$. При выполнении соотношений $\omega = \omega_1 = \omega_2$, $\varepsilon = \frac{\kappa_1}{4k^3D} = \frac{\kappa_2L^2}{4kD}$ резонатор полностью поглощает падающую изгибную волну частоты ω. Второе из этих соотношений, выражающее равенство диссипативных потерь и потерь вследствие излучения, можно преобразовать к виду $(ka)^2 = \frac{4}{3}\frac{S_1}{S}$. Для тонкого (по сравнению с длиной изгибной волны) стерженька оно выполнимо лишь при $S_1 \ll S$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Клюкин И.И.* Об ослаблении волн изгиба в стержнях и пластинах при помощи резонансных колебательных систем // Акуст. журн. 1960. Т. 6. № 2. С. 213–219.
2. *Клюкин И.И., Сергеев Ю.Д.* О рассеянии изгибных волн антивибраторами, установленными на пластине // Акуст. журн. 1964. Т. 10. № 1. С. 60–65.
3. *Тютекин В.В., Шкварников А.П.* Синтез и исследование поглотителей изгибных волн в стержнях и пластинах // Акуст. журн. 1972. Т. 18. № 3. С. 441–447.
4. *Исакович М.А., Кашина В.И., Тютекин В.В.* Экспериментальное исследование виброизоляции изгибных волн, создаваемой импедансными системами // Акуст. журн. 1977. Т. 23. № 3. С. 384–389.
5. *Malcolm J. Crocker.* Editor-in-Chief. Acoustics Handbook. John Wiley & Sons, Inc., New Yorc, 1997.
6. *Gurgoze M., Batan H.* On the Effect of an Attached Spring-Mass System on the Frequency Spectrum of a Cantilevered Beam. J. Sound Vib. 1996. V. 195. № 1. P. 164–168.
7. *Gurgoze M.* Alternative Formulations of the Characteristic Equation of a Bernoulli-Euler Beam to Wich Saveral Viscously Damped Spring-Mass System Are Attached In-Span. J. Sound Vib. 1999. V. 223. № 4. P. 667–677.
8. *Лапин А.Д.* Резонансные поглотители волн в узких трубах и стержнях // Акуст. журн. 2003. Т. 49. № 3. С. 427–428.
9. *Бабаков И.М.* Теория колебаний. М.: Наука, 1965. 559 с.

A Monopole–Dipole Resonator for Flexural Waves in a Rod

A. D. Lapin

For flexural waves in a rod, a simplest resonator responding not only displacements but also to the inclination (the derivative of the displacement) of the rod axis is studied. The resonator consists of two spring–mass systems attached through a rigid (nonbending) bar to the elastic rod in which a flexural wave propagates. One of the springs is oriented perpendicularly to the rod, and the other is parallel to it. It is shown that, at a certain friction, the single monopole–dipole resonator under consideration completely absorbs the incident resonance-frequency flexural wave, which propagates in the elastic rod.