АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2004, том 50, № 2, с. 161–169

УДК 550.834+550.832.4

ВОЗБУЖДЕНИЕ ГИДРОВОЛНЫ ВНЕШНИМ ТОЧЕЧНЫМ СЕЙСМИЧЕСКИМ ИСТОЧНИКОМ В БЕСКОНЕЧНОЙ ФЛЮИДОНАПОЛНЕННОЙ СКВАЖИНЕ, РАСПОЛОЖЕННОЙ В ПОПЕРЕЧНО-ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ

© 2004 г. П. М. Боков, А. М. Ионов

Московский государственный инженерно-физический институт (государственный университет)
115409, Москва, Каширское шоссе 31
E-mail: aionov@hotmail.com

Поступила в редакцию 22.08.2002 г.

Методом интегральных преобразований получено в длинноволновом приближении решение задачи о возбуждении трубных волн внешним изотропным точечным источником в бесконечной флюидонаполненной скважине, расположенной в поперечно-изотропной среде. Внешнее динамическое поле в формации является источником возбуждения волн во флюиде скважины и генерирует как qP- и qSV-волны, так и собственную скважинную моду – гидроволну. Показано, что гидроволна определяется двумя полюсными вкладами в плоскости комплексного лучевого параметра. Полученное асимптотическое выражение предсказывает существование трех различных типов форм гидроволны в зависимости от соотношения упругих параметров анизотропной среды и флюида. Анализ результатов расчетов показывает, что форма и полярность гидроволны существенно зависят от знака параметра неэллиптичности упругой среды, что дает потенциальную возможность по наблюдениям формы гидроволны в скважине судить о характере анизотропии околоскважинного пространства.

ВВЕДЕНИЕ

Вопросам возбуждения и распространения трубных волн во флюдонаполненных скважинах как внешними, так и внутренними сейсмическими источниками посвящена обширная литература, поскольку характеристики волнового поля в скважине несут важную информацию о свойствах околоскважинного пространства [1–4]. Созданы достаточно эффективные алгоритмы, позволяющие проводить численное моделирование трубных волн в скважине, как в изотропных, так и в анизотропных слоистых средах [3, 4]. Для скважин, расположенных в упругих изотропных средах, разработана достаточно полная теория распространения трубных волн. При этом, если импульсный источник расположен внутри флюидонаполненной скважины, зачастую можно получить решение задачи распространения трубных волн при произвольном соотношении между длиной волны и радиусом скважины. Для сейсмического диапазона частот характерна ситуация, когда длина волны много больше радиуса скважины. Поэтому в этом случае целесообразно исследовать проблему в длинноволновом приближении, что значительно упрощает ее постановку, решение и анализ возникающего волнового поля. Если же возбуждение трубных волн происходит внешним импульсным источником, анализ возникающего динамического поля в скважине значительно усложняется даже в длинноволновом приближении. Хорошо известно [1], что плоские упругие P- или SV-волны, набегающие на флюидонаполненную скважину, генерируют в ней только P- или SV-волны, возбуждения же собственной скважинной моды (гидроволны) не происходит. В случае, когда фронт набегающей упругой волны имеет кривизну, отличную от нуля, внешнее динамическое воздействие приводит к генерации гидроволны в скважине. Выражение для гидроволны, возбуждаемой внешним точечным изотропным источником в бесконечной прямолинейной скважине, расположенной в изотропной упругой среде, было получено сравнительно недавно [5].

Реальные геологические формации зачастую обладают ярко выраженной анизотропией. Поэтому в последние годы внимание исследователей было обращено к изучению динамических характеристик трубных волн в анизотропных средах и, в частности, в средах с вертикальной осью симметрии, так называемых поперечно-изотропных (трансверсально-изотропных) средах (например, работы [6, 7]). В таких средах точечный изотропный источник возбуждает как квазипродольные qP-, так и квазипоперечные qSV-волны [1], что значительно усложняет асимптотический анализ возникающего поля трубных волн даже в длинноволновом приближении. При этом волновые фронты набегающих по формации квазипродольных и квазипоперечных волн в зависимости от па-

Рис. 1. Геометрия рассматриваемой задачи.

раметров анизотропии могут иметь весьма сложную геометрию, что делает полное исследование еще более громоздким [8].

В данной работе методом интегральных преобразований получено точное решение задачи о возбуждении трубных волн во флюиде скважины, расположенной в поперечно-изотропной упругой среде, внешним точечным источником. Асимптотически волновое поле возбуждаемых в скважинном флюиде волн может быть разделено на квазипродольные qP и квазипоперечные qSV, формы которых совпадают с формами набегающих по формации упругих волн, и гидроволну. В данной работе основное внимание уделено исследованию динамических характеристик гидроволны и их зависимости от величины анизотропии среды.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ТРУБНОЙ ВОЛНЫ В СКВАЖИНЕ, РАСПОЛОЖЕННОЙ В ПОПЕРЕЧНО-ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ

Постановка рассматриваемой в работе задачи выглядит следующим образом. На горизонтальном удалении r от флюидонаполненной скважины, расположенной в поперечно-изотропной упругой среде с осью симметрии, совпадающей с осью скважины, находится точечный изотропный импульсный источник. Геометрия задачи представлена на рис. 1. Необходимо найти динамическое поле давлений в скважинном флюиде под воздействием излучаемых источником сейсмических волн. Задача решается в длинноволновом приближении, когда характерная длина волны источника много больше радиуса скважины. На бесконечно удаленных участках скважины $z \longrightarrow \pm\infty$ поле в скважине должно удовлетворять условию излучения Зоммерфельда [9].

Поперечно-изотропная среда обладает выделенной осью симметрии, и в плоскости, перпендикулярной к данной оси, упругие свойства не зависят от направления. Поскольку ось симметрии совпадает с осью скважины, то закон Гука для такой среды имеет в цилиндрической системе координат следующий вид [1, 10]:

$$\begin{gathered}\sigma_{rr} = (\lambda_\parallel + 2\mu_\parallel)\varepsilon_{rr} + \lambda_\parallel\varepsilon_{\theta\theta} + \lambda_\perp\varepsilon_{zz};\\ \sigma_{\theta\theta} = \lambda_\parallel\varepsilon_{rr} + (\lambda_\parallel + 2\mu_\parallel)\varepsilon_{\theta\theta} + \lambda_\perp\varepsilon_{zz};\\ \sigma_{zz} = \lambda_\perp\varepsilon_{rr} + \lambda_\perp\varepsilon_{\theta\theta} + (\lambda_\perp + 2\mu_\perp)\varepsilon_{zz};\\ \sigma_{r\theta} = 2\mu_\parallel\varepsilon_{r\theta};\quad \sigma_{\theta z} = 2\mu_*\varepsilon_{\theta z};\quad \sigma_{zr} = 2\mu_*\varepsilon_{zr},\end{gathered} \tag{1}$$

где σ_{ik} – тензор напряжения; ε_{ik} – тензор деформаций; $\lambda_\perp$, $\mu_\perp$ – коэффициенты Ламе вдоль оси симметрии (ось z); $\lambda_\parallel$, $\mu_\parallel$ – коэффициенты Ламе в плоскости, перпендикулярной оси симметрии; μ_* – модуль сдвига, независимый от остальных упругих констант. При этом компоненты тензора деформации выражаются следующим образом через компоненты смещения:

$$\begin{gathered}\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r};\quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r};\quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z};\quad \varepsilon_{z\theta} = 0;\\ \varepsilon_{r\theta} = 0;\quad \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right).\end{gathered} \tag{2}$$

В дальнейшем вместо коэффициентов Ламе удобно использовать скорости распространения упругих волн. Обозначая плотность упругой среды ρ_s, введем скорости соответствующих продольных и поперечных волн в соответствии с [10]:

$$\begin{gathered}\alpha_\parallel = \sqrt{\frac{\lambda_\parallel + 2\mu_\parallel}{\rho_s}};\quad \alpha_\perp = \sqrt{\frac{\lambda_\perp + 2\mu_\perp}{\rho_s}};\\ \alpha_* = \sqrt{\frac{\lambda_\perp + 2\mu_*}{\rho_s}};\quad \beta_\parallel = \sqrt{\frac{\mu_\parallel}{\rho_s}};\quad \beta_* = \sqrt{\frac{\mu_*}{\rho_s}}.\end{gathered} \tag{3}$$

В (3) $\alpha_\perp$ представляет собой скорость продольной волны в направлении оси симметрии; $\alpha_\parallel$ – скорость продольной волны в плоскости, перпендикулярной оси симметрии; β_* – скорость поперечной волны в любом из этих двух взаимно ортогональных направлений; $\beta_\parallel$ – скорость поперечных SH-волн в плоскости, перпендикулярной оси симметрии.

В теории возбуждения и распространения трубных волн показано, что давление в каждой точке жидкости внутри скважины является результатом суммарного вклада вторичных источников, расположенных вдоль ее поверхности. Физически данные источники образованы сжимающим воздействием сейсмических волн, распространяющихся во внешней среде. Волновое уравнение, описывающее в длинноволновом

приближении распространение волн во флюиде вертикальной прямолинейной скважины в поперечно-изотропной среде с вертикальной осью симметрии, имеет вид [2]:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial z^2} - \frac{1}{c_{tw}^2}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = -2\rho_f \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{(\sigma_{rr}^{ext} + \sigma_{\theta\theta}^{ext})}{E_h} - \frac{\nu_z \sigma_{zz}^{ext}}{E_z}\right], \quad (4)$$

где $P(z, t)$ – динамическое давление в скважине; c_{tw} – скорость трубной волны; ρ_f – плотность флюида; t – время; $\sigma_{rr}^{ext}(r, z, t)$, $\sigma_{\theta\theta}^{ext}(r, z, t)$, $\sigma_{zz}^{ext}(r, z, t)$ – динамические напряжения в формации на оси скважины; E_z и E_h – эффективные модули Юнга в вертикальном и горизонтальном направлениях; ν_z – эффективный коэффициент Пуассона для вертикально приложенного напряжения. Можно показать, что эффективные упругие константы в (4) выражаются через параметры (3) следующим образом:

$$\frac{\nu_z}{E_z} = \frac{(\alpha_*^2 - 2\beta_*^2)^2}{2\rho_s[(\alpha_\parallel^2 - \beta_\parallel^2)\alpha_\perp^2 - (\alpha_*^2 - 2\beta_*^2)^2]};$$

$$E_h^{-1} = \frac{[\alpha_\parallel^2\alpha_\perp^2 - (\alpha_*^2 - 2\beta_*^2)^2]}{4\rho_s\beta_\parallel^2[(\alpha_\parallel^2 - \beta_\parallel^2)\alpha_\perp^2 - (\alpha_*^2 - 2\beta_*^2)^2]}, \quad (5)$$

$$c_{tw} = c_f\sqrt{\mu_\parallel/(\mu_\parallel + \rho_f c_f^2)}.$$

Как хорошо известно, фундаментальными решениями волнового уравнения в трансверсально-изотропной среде являются квазипродольные qP- и квазипоперечные qSV-волны [1]. Используя цилиндрическую систему координат (r, θ, z), введем потенциалы упругих смещений в qP- и qSV-волнах, распространяющихся по формации, $\phi(r, z, t)$ и $\psi(r, z, t)$ соответственно, связанные с компонентами смещения соотношениями:

$$u_r = \frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial z}; \quad u_z = \frac{\partial\phi}{\partial z} - \Delta_r\psi, \quad (6)$$

здесь $\Delta_r = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)$ – радиальная часть оператора Лапласа $\Delta = \Delta_r + \partial^2/\partial z^2$ в цилиндрической системе координат. Выражая компоненты тензора деформации среды (2) через потенциалы упругих смещений (6):

$$\varepsilon_{rr}^{ext} + \varepsilon_{\theta\theta}^{ext} = \Delta_r\left(\phi + \frac{\partial\psi}{\partial z}\right); \quad \varepsilon_{zz}^{ext} = \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} - \Delta_r\frac{\partial\psi}{\partial z}, \quad (7)$$

и используя закон Гука (1), представим уравнение (4) в виде

$$\frac{\partial^2 P}{\partial z^2} - \frac{1}{c_{tw}^2}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = -\frac{\rho_f}{\beta_\parallel^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left\{\left[\alpha_\parallel^2\Delta_r\phi + (\alpha_*^2 - 2\beta_*^2)\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right] + \right.$$
$$\left. + [\alpha_\parallel^2 - \alpha_*^2 + 2\beta_*^2]\Delta_r\frac{\partial\psi}{\partial z}\right\}. \quad (8)$$

Заметим, что в (8) радиальная координата r является фиксированным параметром.

Выполняя двойное преобразование Фурье по времени t и вертикальной координате z в уравнении (8), получим формальное решение уравнения (8) в виде разложения в интеграл Фурье:

$$\bar{P}(r, z, \omega) = -\frac{\rho_f\omega^2}{\beta_\parallel^2}\int_{-\infty}^{+\infty} dk \exp(-ikz) \times$$
$$\times \frac{(\mathbf{L}_1\bar{\phi}(r, k, \omega) + \mathbf{L}_2\bar{\psi}(r, k, \omega))}{k^2 - \omega^2/c_{tw}^2}, \quad (9)$$

где ω – угловая частота; k – волновое число. В (8) введены дифференциальные операторы: $\mathbf{L}_1 \equiv \alpha_\parallel^2\Delta_r - (\alpha_*^2 - 2\beta_*^2)k^2$ и $\mathbf{L}_2 \equiv -ik[\alpha_\parallel^2 - \alpha_*^2 + 2\beta_*^2]\Delta_r$; черта над величинами означает Фурье-трансформанту по времени.

Для дальнейшего расчета необходимо знать явный вид зависимости от координат и времени (или частоты) потенциалов упругих смещений поля в формации на оси скважины. В данном исследовании источником сейсмических волн выступает точечный изотропный источник. Решение для потенциалов ϕ и ψ сейсмических волн, излучаемых рассматриваемым источником, в виде интеграла по лучевому параметру (горизонтальной медленности) p приведено в Приложении.

Поскольку в (9) входят Фурье-образы потенциалов $\bar{\phi}(r, k, \omega)$ и $\bar{\psi}(r, k, \omega)$, то, выполняя для потенциалов (П1) преобразование Фурье по z и меняя порядок интегрирования, придем к необходимости нахождения преобразования Фурье для следующих функций ($j = 1, 2$): $\exp(-i\omega\xi_j(p)|z|)$ и $\exp(-\omega p|z|)$ для потенциала $\bar{\phi}(r, k, \omega)$; $\mathrm{sgn}(z)\exp(-i\omega\xi_j(p)|z|)$ и $\mathrm{sgn}(z)\exp(-i\omega p|z|)$ для $\bar{\psi}(r, k, \omega)$.

При выполнении преобразования Фурье по z для потенциалов применим теорему вычетов. Контурное интегрирование производится так же как в работе [11] при получении решений для потенциалов поля $\bar{\phi}$ и $\bar{\psi}$ в формации. Для правильного отбора полюсов воспользуемся принципом предельного поглощения и условием на бесконечности (существование только убегающих

волн на бесконечности) [9]. Вычисление интегралов в соответствии с принципом предельного поглощения приводит к следующему результату для Фурье-трансформант потенциалов:

$$\begin{pmatrix}\bar{\phi}(r,q,\omega)\\ \bar{\psi}(r,q,\omega)\end{pmatrix} = \frac{i\bar{A}(\omega)}{\pi}\begin{pmatrix}-1\\ q\omega^{-1}\end{pmatrix}\int_0^{+\infty} dp\frac{pJ_0(\omega pr)}{\Phi(p)}\times$$
$$\times\left[\frac{1}{q^2+p^2}\begin{pmatrix}pa_0(p)\\ b_0(p)\end{pmatrix}+\sum_{j=1}^{2}\frac{1}{(q^2-\xi_j^2(p))}\begin{pmatrix}i\xi_j(p)a_j(p)\\ b_j(p)\end{pmatrix}\right], \quad (10)$$

где введена замена $k = \omega q$ переменной интегрирования k. Полученные Фурье-образы потенциалов $\bar{\phi}(r, q, \omega)$ и $\bar{\psi}(r, q, \omega)$ подставляются далее в формулу (9), что приводит к искомому представлению решения в виде двукратного интеграла по p и q. Кратность полученного интеграла можно понизить, меняя порядок интегрирования и производя интегрирование по переменной q.

Вклад первых слагаемых в потенциалах (10) (с полюсными особенностями $q = \pm ip$) в поле давлений в скважине (9) вычисляется при помощи теоремы вычетов:

$$\bar{P}^{tw}_{inh}(z,\omega) = -\alpha_{\parallel}^2\sigma_1 c_{tw}\frac{\rho_f}{\beta_{\parallel}^2}i\omega^3\bar{A}(\omega)\times$$
$$\times\exp\left(-i\frac{\omega}{c_{tw}}|z|\right)\int_0^{\infty} dp\frac{p^5J_0(\omega pr)}{\Phi(p)}, \quad (11)$$

где постоянная σ_1 определена в Приложении.

Подставляя оставшиеся слагаемые в потенциалах (10) (с полюсными особенностями $q = \pm\xi_j(p)$) в (9) и проводя интегрирование по переменной q, получим, что поле динамических давлений во флюиде скважины является суммой двух составляющих: $\bar{P}(z, \omega) = \bar{P}^{tw}(z, \omega) + \bar{P}^{ext}(z, \omega)$. Первое слагаемое $\bar{P}^{tw}(z, \omega)$ описывает гидроволну, распространяющуюся вдоль скважины со скоростью c_{tw}; второе слагаемое $\bar{P}^{ext}(z, \omega)$ представляет собой вклад квазипродольных qP- и квазипоперечных qSV-волн. $\bar{P}^{tw}(z, \omega)$ и $\bar{P}^{ext}(z, \omega)$ равны соответственно:

$$\bar{P}^{tw}(z,\omega) = i\omega^3\bar{A}(\omega)c_{tw}\frac{\rho_f}{\beta_{\parallel}^2}\exp\left(-i\frac{\omega}{c_{tw}}|z|\right)\times$$
$$\times\int_0^{+\infty} dp\frac{pJ_0(\omega pr)}{\Phi(p)}\sum_{j=1}^{2}(\xi_j^2(p)-c_{tw}^{-2})^{-1}[\xi_j(p)\times \quad (12а)$$
$$\times a_j(p)(\alpha_{\parallel}^2p^2+\sigma_3c_{tw}^{-2})+\sigma_4c_{tw}^{-2}p^2b_j(p),$$

$$\bar{P}^{ext}(z,\omega) = -i\omega^3\bar{A}(\omega)c_{tw}\frac{\rho_f}{\beta_{\parallel}^2}\int_0^{+\infty} dp\frac{pJ_0(\omega pr)}{\Phi(p)}\times$$
$$\times\sum_{j=1}^{2}\exp(-i\omega\xi_j(p)|z|)\xi_j^{-1}(p)(\xi_j^2(p)-c_{tw}^{-2})^{-1}\times \quad (12б)$$
$$\times[\xi_j(p)a_j(p)(\alpha_{\parallel}^2p^2+\sigma_3\xi_j^2(p))+\sigma_4p^4b_j(p)\xi_j^2(p)],$$

где введены обозначения $\sigma_3 = \alpha_*^2 - 2\beta_*^2$, $\sigma_4 = \alpha_{\parallel}^2 - \sigma_3$.

Проведем преобразования выражения (12а) для гидроволны. Как следует из (12а), подынтегральное выражение содержит сингулярности (как будет показано чуть ниже – степенные), определяемые неявными уравнениями $p^2 + c_{tw}^{-2} - c_{1,2}^{-2}(p) = 0$. Приводя сумму в (12а) к общему знаменателю, после достаточно громоздких алгебраических преобразований получим, что $\bar{P}^{tw}(z, \omega)$ можно представить в виде суммы двух слагаемых: $\bar{P}_1^{tw}(z, \omega)$, которое по-прежнему содержит указанные выше сингулярности, и $\bar{P}_2^{tw}(z, \omega)$, в котором эти особенности отсутствуют. $\bar{P}_2^{tw}(z, \omega)$ с точностью до обратного знака совпадает с ранее рассмотренным слагаемым $\bar{P}^{tw}_{inh}(z, \omega)$ (11), так что их суммарный вклад в поле гидроволны равен нулю. Таким образом, полное поле гидроволны определяется только слагаемым $\bar{P}_1^{tw}(z, \omega)$ и равно:

$$\bar{P}^{tw}(z,\omega) = \bar{P}_1^{tw}(z,\omega) = -i\omega^3\bar{A}(\omega)c_{tw}\frac{\rho_f}{\beta_{\parallel}^2}\times$$
$$\times\exp\left(-i\frac{\omega}{c_{tw}}|z|\right)\int_0^{+\infty} dp\frac{pJ_0(\omega pr)}{\Phi(p)}\times \quad (13)$$
$$\times\left\{\frac{[1-\beta_*^2(p^2+c_{tw}^{-2})][\alpha_{\parallel}^2p^2+\sigma_3c_{tw}^{-2}]+c_{tw}^{-2}\Delta_\alpha p^2}{c_1^2(p)c_2^2(p)(p^2+c_{tw}^{-2}-c_1^{-2}(p))(p^2+c_{tw}^{-2}-c_2^{-2}(p))}\right\},$$

где введено обозначение $\Delta_\alpha = [\alpha_{\parallel}^2(\alpha_{\perp}^2 - \alpha_*^2) + (\alpha_*^2 - \alpha_{\parallel}^2)(\alpha_*^2 - \beta_*^2)]$.

Покажем, что полюсной вклад от нулей полинома четвертой степени $\Phi(p)$ в поле гидроволны (13) отсутствует. Используя уравнение (П2) для зависимости скоростей qP- и qS-волн от p, преобразуем знаменатель выражения (13) к виду:

$$c_1^2c_2^2(p^2+c_{tw}^{-2}-c_1^{-2})(p^2+c_{tw}^{-2}-c_2^{-2}) =$$
$$= \alpha_{\parallel}^2\beta_*^2(p^2-p_1^2)(p^2-p_2^2)/\Phi(p). \quad (14)$$

В (14) p_1 и p_2 являются решениями биквадратного уравнения с действительными коэффициентами относительно p:

$$\Phi(p) - B(p)(p^2 + c_{tw}^{-2}) + \alpha_\perp^2\beta_*^2(p^2 + c_{tw}^{-2})^2 = 0 \quad (15)$$

и равны соответственно

$$p_{1,2}^2 = -\frac{1}{c_{tw}^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha_\parallel^2} + \frac{1}{\beta_*^2}\right) - \frac{1}{c_{tw}^2}\left(\frac{\alpha_*^2}{\alpha_\parallel^2} - 1\right) +$$

$$+ \frac{1}{2c_{tw}^2}\left(\frac{\alpha_\perp^2}{\beta_*^2} - \frac{\alpha_*^4}{\alpha_\parallel^2\beta_*^2}\right) \mp \frac{1}{2}\left\{\left[\frac{1}{\alpha_\parallel^2} - \frac{1}{\beta_*^2}\right]^2 - \frac{2}{c_{tw}^2}\left[\left(\frac{1}{\alpha_\parallel^2} + \right.\right.\right. \quad (16)$$

$$\left. + \frac{1}{\beta_*^2}\right)\left(2\left(\frac{\alpha_*^2}{\alpha_\parallel^2} - 1\right) + \left(\frac{\alpha_\perp^2}{\beta_*^2} - \frac{\alpha_*^4}{\alpha_\parallel^2\beta_*^2}\right)\right) - \frac{2}{\beta_*^2}\left(\frac{\alpha_\perp^2}{\alpha_\parallel^2} - 1\right)\Bigg] +$$

$$\left. + \frac{1}{c_{tw}^4}\left[\left(\frac{\alpha_\perp^2}{\beta_*^2} - \frac{\alpha_*^4}{\alpha_\parallel^2\beta_*^2}\right)^2 + 4\left(\frac{\alpha_*^4}{\alpha_\parallel^4} - \frac{\alpha_\perp^2}{\alpha_\parallel^2}\right)\left(1 - \frac{\alpha_*^2}{\beta_*^2}\right)\right]\right\}^{1/2}.$$

Знак "–" в (16) соответствует qP-волне (p_1^2), знак "+" – qSV-волне (p_2^2).

Подставляя выражение для знаменателя (14) в (13), получим решение для гидроволны в следующем виде:

$$\overline{P}^{tw}(z, \omega) = -i\omega^3\overline{A}(\omega)\frac{\rho_f c_{tw}}{\alpha_\parallel^2\beta_\parallel^2\beta_*^2}\exp\left(-i\frac{\omega}{c_{tw}}|z|\right)\times$$

$$\times\int_0^{+\infty} dp\, p J_0(\omega p r)\times \quad (17)$$

$$\times\left\{\frac{[1 - \beta_*^2(p^2 + c_{tw}^{-2})][\alpha_\parallel^2 p^2 + \sigma_3 c_{tw}^{-2}] + c_{tw}^{-2}\Delta_\alpha p^2}{(p^2 - p_1^2)(p^2 - p_2^2)}\right\}.$$

Записанный в таком виде интеграл легко вычисляется с использованием теоремы вычетов. Прежде чем представить окончательный результат для поля давления в скважине, проанализируем возможные значения корней p_1^2 и p_2^2, поскольку, как будет показано ниже, это приводит к различной форме и амплитуде гидроволны. Коэффициенты в квадратном уравнении (15) действительны, так что в самом общем случае оно может иметь либо два действительных корня (как положительные, так и отрицательные), либо один кратный действительный или два комплексно-сопряженных.

Два действительных корня. Квадратное уравнение с действительными коэффициентами может иметь либо два положительных корня, либо два отрицательных, либо один положительный и один отрицательный. В изотропной среде $p_1^2 \longrightarrow \alpha^{-2} - c_{tw}^{-2}$, $p_2^2 \longrightarrow \beta^{-2} - c_{tw}^{-2}$ (α – скорость продольных, β – скорость поперечных волн в изотропной среде). Известно, что в изотропной среде разность $\alpha^{-2} - c_{tw}^{-2}$ является почти всегда отрицательной величиной (обратный случай хотя и встречается, но крайне редко [12]). Величина же $\beta^{-2} - c_{tw}^{-2}$ может иметь как положительный (в низкоскоростных средах, в которых выполняется неравенство $\beta < c_f\sqrt{1 - \rho_f/\rho_s}$), так и отрицательный знак (в высокоскоростных средах, в которых выполняется обратное неравенство).

При получении окончательного результата будем предполагать, что в поперечно-изотропной среде существует либо пара отрицательных корней p_1^2, p_2^2, либо один корень положительный, а другой – отрицательный. Справедливость данного утверждения подтверждается многочисленными расчетами, проведенными авторами для реальных сред, упругие параметры которых представлены в литературе.

Рассмотрим вначале случай отрицательных корней и найдем выражение для гидроволны. Для этого в (17) вычислим интеграл по горизонтальной медленности. Используя соотношение для функции Бесселя $J_0(\omega pr) = [H_0^{(2)}(\omega pr) - H_0^{(2)}(-\omega pr)]/2$, можно представить (17) в виде $\int_0^{+\infty} p\,dp J_0(\omega pr)F(p^2) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} p\,dp\, H_0^{(2)}(\omega pr)F(p^2)$. Здесь $H_0^{(2)}(\omega pr)$ – функция Ханкеля второго рода нулевого порядка, а через $F(p^2)$ обозначено выражение, стоящее в фигурных скобках. Рассмотрим этот интеграл в комплексной плоскости p. Для вычисления интеграла выберем замкнутый контур, представленный на рис. 2, и воспользуемся теоремой о вычетах. Поскольку, как предполагается, p_1^2, p_2^2 являются отрицательными, то $p_{1,2} = \pm\sqrt{p_{1,2}^2}$ в этом случае являются чисто мнимыми. Из рис. 2 видно, что в данном случае необходимо учесть вычеты в полюсах, лежащих в нижней полуплоскости, т.е. $-i\sqrt{-p_1^2}$ и $-i\sqrt{-p_2^2}$.

Воспользовавшись определением функции Макдональда нулевого индекса действительного аргумента $K_0(x) = -i\pi H_0^{(2)}(-ix)/2$, можно оконча-

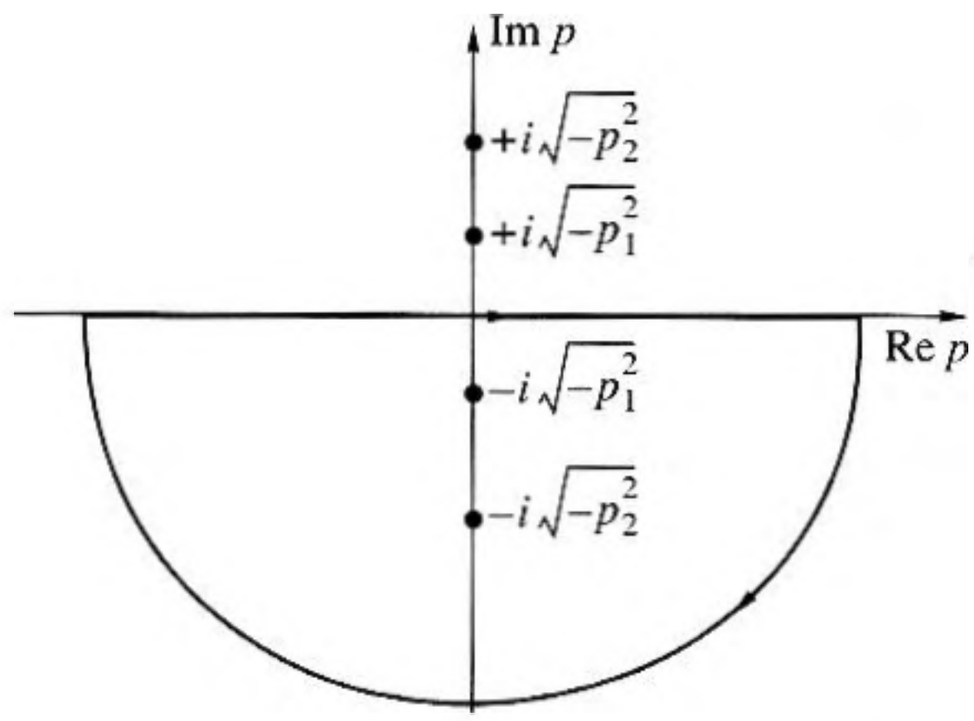

Рис. 2. Контур интегрирования и обход полюсов в случае p_1^2, $p_2^2 < 0$.

тельно представить выражение для гидроволны в следующем виде:

$$\overline{P}^{tw}(z,\omega) = \frac{\rho_f c_{tw}}{\alpha_\parallel^2 \beta_\parallel^2 \beta_*^2} \frac{i\omega^3 \overline{A}(\omega)}{(p_2^2 - p_1^2)} \exp\left(-\frac{i\omega|z|}{c_{tw}}\right) \times$$

$$\times \sum_{j=1}^{2} (-1)^{j+1} K_0(\omega\sqrt{-p_j^2} r)\{[1 - \beta_*^2(p_j^2 + c_{tw}^{-2})] \times \quad (18)$$

$$\times [\alpha_\parallel^2 p_j^2 + \sigma_3 c_{tw}^{-2}] + c_{tw}^{-2} p_j^2 \Delta_\alpha\}.$$

Как следует из (18), в этом случае гидроволна состоит из двух слагаемых, первое из которых может быть интерпретировано, как гидроволна, возбужденная qP-волной, второе – qSV-волной в формации. Для изотропной среды $\alpha_\perp = \alpha_\parallel = \alpha_* = \alpha$, $\beta_\parallel = \beta_* = \beta$, $\Delta_\alpha \longrightarrow 0$, так что в (18) остается только первое слагаемое, совпадающее с выражением для гидроволны в изотропной среде, полученным в работе [5].

Рассмотрим теперь случай, когда один из корней (а именно p_2^2) является положительным. Он реализуется в средах, в которых скорость поперечных волн $\beta_\parallel$ меньше скорости трубных волн, что справедливо, если выполняется соотношение: $\beta_\parallel < c_f\sqrt{1 - \rho_f/\rho_s}$. В этом случае аргумент у функции Макдональда во втором слагаемом чисто мнимый, поэтому вместо нее возникает функция Ханкеля второго рода. При вычислении интеграла возникает вопрос с правилом обхода полюсов на действительной оси, которое определяется асимптотическим поведением решения при $r \longrightarrow \infty$, где существует одна убегающая волна. Для этого необходимо захватить только полюс, лежащий на положительной полуоси. Первое слагаемое, связанное с возбуждением гидроволны qP-волной, останется неизменным. Что касается второго слагаемого в (18), этот случай отвечает качественно иному решению, поскольку оно теперь содержит функцию Ханкеля, а не функцию Макдональда. Это существенно меняет как форму волны, так и характер затухания амплитуды гидроволны с расстоянием. Поскольку асимптотическое поведение функций Макдональда и Ханкеля при больших значениях аргумента существенно различно, амплитуда решения, описываемого функцией $K_0(x)$, затухает с увеличением расстояния от источника до скважины существенно быстрее, чем амплитуда решения, описываемого функцией $H_0^{(2)}(x)$. Поэтому следует ожидать, что в последнем случае волна будет иметь бóльшую амплитуду. Кроме того, ширины волновых пакетов, описываемых первым и вторым слагаемыми, также могут значительно различаться, поскольку характерная ширина волны, описываемой функцией Макдональда, определяется ее аргументом, что приводит к "уширению" волны с удалением источника от оси скважины r. Характерная же ширина волны, описываемой функцией Ханкеля, порядка характерной длины волны, излучаемой источником.

Физическая причина существенного отличия поведения гидроволны, возбуждаемой qSV-волной в этих двух случаях, заключается в соотношении между скоростью распространения внешнего возмущения вдоль скважины и скоростью гидроволны [12]. В первом случае скорость распространения внешней qSV-волны вдоль скважины всегда больше скорости гидроволны. Во втором случае скорость гидроволны становится больше кажущейся скорости распространения внешней qSV-волны, начиная с некоторого удаления от источника, и внешнее воздействие отстает от гидроволны, возбуждаемой им. В этом случае гидроволна является конической волной (волной Маха) [12].

Комплексно-сопряженные корни. Можно показать, что существуют породы, упругие параметры которых таковы, что приводят к комплексно-сопряженным корням квадратного уравнения. Здесь применимы рассуждения, приводимые при выводе выражения для поля гидроволны в случае двух отрицательных корней. Выражение для P_1^{tw} в случае комплексно-сопряженных корней совпадает с выражением, где знак радикала $p_{1,2} = \pm\sqrt{p_{1,2}^2}$, в соответствии с правилом обхода контура, выбирается таким образом, чтобы его мнимая часть была отрицательной.

АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ АНИЗОТРОПНЫХ ПАРАМЕТРОВ ФОРМАЦИИ НА АМПЛИТУДУ И ФОРМУ ГИДРОВОЛНЫ

Проведем анализ влияния упругих параметров анизотропной формации, окружающей скважину, на амплитуду и форму возбуждаемой гидроволны. Полный анализ и интерпретация в общем случае (т.е. в многомерном пространстве параметров, описывающих упругие свойства околоскважинной среды и флюида) представляются весьма затруднительным. Кроме того, такое моделирование необходимо проводить с учетом всевозможных ограничений на параметры упругой среды, накладываемых, в частности, термодинамическими условиями [8, 13]. Поэтому в данной работе расчеты проводились для реальных поперечно-изотропных сред, параметры которых приведены в литературе [14, 15]. Во всех расчетах предполагалось, что в качестве внутрискважинного флюида используется вода (плотность $\rho_f = 1.0$ г/см^3, скорость звука $c_f = 1500$ м/с).

Поперечно-изотропная среда описывается в общем случае пятью независимыми константами. В настоящее время наиболее употребительными являются обозначения Томсена, который предложил использовать скорости продольных и поперечных волн вдоль оси симметрии V_{P0} и V_{S0} и ε, δ, γ – безразмерные параметры, описывающие отклонение среды от изотропной [15]. Их связь с использованными в настоящей работе обозначениями выражается следующими соотношениями:

$$V_{P0} = \alpha_\perp, \quad V_{S0} = \beta_*, \quad \varepsilon = \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_\parallel^2}{\alpha_\perp^2} - 1\right),$$

$$\delta = \frac{(\alpha_*^2 - \beta_*^2) - (\alpha_\perp^2 - \beta_*^2)^2}{2\alpha_\perp^2(\alpha_\perp^2 - \beta_*^2)}, \quad \gamma = \frac{\beta_\parallel^2 - \beta_*^2}{2\beta_*^2}.$$

Зачастую вместо скорости поперечных волн в вертикальном направлении V_{S0} вводится параметр f, равный $f = 1 - V_{S0}^2/V_{P0}^2 = 1 - \beta_*^2/\alpha_\perp^2$. Параметр γ определяет анизотропию поперечных скоростей в поперечно-изотропной среде. Для волн qP и qSV, поляризованных в вертикальной плоскости, проходящей через ось симметрии среды, этот параметр не входит в определяющие уравнения [11]. Тем не менее, поскольку эффективные модули Юнга и коэффициент Пуассона z (5) анизотропной среды зависят от $\beta_\square$, параметры гидроволны зависят от всех трех параметров анизотропии ε, δ и γ.

Проведем исследование формы гидроволны для реальных поперечно-изотропных сред из работы [14]. Как показано ранее, амплитуда и форма гидроволны зависят от величин $p_{1,2}^2$ в (18). Среди высокоскоростных сред можно выделить группу сред, для которых корни $p_{1,2}^2$ отрицательны и, следовательно, поле гидроволны описывается суммой двух слагаемых с функциями Макдональда действительного аргумента (18). Данную группу составляют среды с $(\varepsilon - \delta) > 0$. Другие высокоскоростные среды с $(\varepsilon - \delta) < 0$ соответствуют случаю комплексно-сопряженных $p_{1,2}^2$. Как известно [13], случай $\varepsilon = \delta$ соответствует поперечно-изотропным средам с эллиптической анизотропией, когда волновой фронт квазипродольной qP-волны представляет собой эллипсоид вращения. Таким образом, поскольку параметр неэллиптичности $(\varepsilon - \delta)$ описывает отклонение анизотропных свойств упругой среды от эллиптической анизотропии, то можно предполагать, что в высокоскоростных средах тип решения (а, следовательно, и форма гидроволны) зависят от его знака.

Рассмотренные низкоскоростные среды характеризуются тем, что для них $p_{1,2}^2$ имеют разные знаки. Как будет следовать из дальнейшего анализа, значение $(\varepsilon - \delta)$ упругой среды также сильно влияет на форму, амплитуду и полярность гидроволны.

Для подтверждения сделанных утверждений проводились дополнительные расчеты для 44 поперечно-изотропных упругих сред, параметры которых представлены в работе [15]. Проведенные расчеты показали, что для всех анизотропных сред из [15] тип решения, определяемый величинами $p_{1,2}^2$, сводится к вышеупомянутым случаям.

В данной работе проводились расчеты профилей гидроволны для упругих сред с поперечной изотропией из [14]. При расчетах соответствующих волновых форм функция сейсмического источника $\Psi_S(t)$ выбиралась в виде потенциала Берлаге:

$$\dot{\Psi}_S(t) = [(1 + B_0^2)/B_0]2\pi^2 f_0^2 \Psi_\infty t \exp(-\Omega t) \times \times \sin(2\pi f_0 t)\Theta(t),$$

где Ψ_∞ – статическая величина вытесненного объема при взрыве, f_0 – характерная частота источника, $B_0 = \Omega/(2\pi f_0)$, $\Theta(t)$ – ступенчатая функция (функция Хэвисайда). При расчетах использовались следующие параметры сейсмического источника: $\Psi_\infty = 3 \times 10^{-4}$ м^3, $f_0 = 50$ Гц, $B_0 = 0.5$.

При расчетах полагалось, что источник помещен в начало цилиндрической системы координат (r, z, φ). На горизонтальном удалении $r = 80$–120 м от источника находится вертикальная скважина с приемником, расположенным в точке $z = 250$ м.

Результаты расчетов профилей гидроволны для низкоскоростных и высокоскоростных формаций являются типичными для рассмотренных сред, в том числе и для сред из работы [15]. На основе проведенного исследования можно прийти к следующим заключениям.

Во-первых, для всех рассмотренных высокоскоростных сред с положительным параметром неэллиптичности $(\varepsilon - \delta) > 0$ возникает "одногорбый" профиль гидроволны. Во-вторых, в высокоскоростных средах с $(\varepsilon - \delta) < 0$ гидроволна также является "одногорбой" при малой величине параметра неэллиптичности. При увеличении абсолютного значения параметра неэллиптичности гидроволна плавно трансформируется, приобретая "двугорбую" форму.

В-третьих, полярность первого вступления гидроволны для низкоскоростных формаций при достаточно большой неэллиптичности $(\varepsilon - \delta)$ совпадает с ее знаком.

Утверждение о зависимости формы гидроволны от значения параметра неэллиптичности, полученное для реальных формаций, проверялось при помощи численного моделирования. При этом вывод о том, что параметр неэллиптичности характеризует форму гидроволны ("одногорбая" или "двугорбая"), остается в силе. Отметим, что при изменении величины и знака параметра неэллиптичности прослеживается плавная трансформация формы гидроволны из одного типа в другой.

Анализ результатов расчетов показывает, что, несмотря на то, что при уменьшении горизонтального расстояния парциальные вклады в гидроволну, обусловленную *qP*- и *qSV*-волнами, казалось бы, все сильнее интерферируют, их длительность уменьшается, что сохраняет форму гидроволны в рассмотренном диапазоне параметров.

ВЫВОДЫ

1. В данной работе методом интегральных преобразований получено в длинноволновом приближении решение задачи о возбуждении трубных волн внешним изотропным точечным источником в бесконечной флюидонаполненной скважине, расположенной в поперечно-изотропной среде. Асимптотически волновое поле во флюиде скважины разделяется на *qP*- и *qSV*-волны, которые являются локальным откликом скважинного флюида на квазипродольную и квазипоперечную волны в формации, а также собственную скважинную моду – гидроволну.

2. Показано, что гидроволна определяется двумя полюсными вкладами в плоскости комплексного лучевого параметра. В зависимости от параметров анизотропии среды эти полюса могут либо лежать на действительной оси, либо являются комплексно-сопряженными. Полученное выражение для гидроволны позволяет провести асимптотический анализ характеристик гидроволны для высокоскоростной среды, когда кажущаяся скорость внешней квазипоперечной *qSV*-волны вдоль скважины больше скорости гидроволны, а также в случае низкоскоростной среды. Показано, что в этих случаях решения для гидроволны существенно различаются.

3. Проведенные исследования показывают, что как в высокоскоростных, так и в низкоскоростных формациях существует корреляция между формой и амплитудой гидроволны и параметром неэллиптичности $(\varepsilon - \delta)$ окружающей скважину формации. В высокоскоростных формациях гидроволна представляет собой однополярный импульс с одним максимумом при $(\varepsilon - \delta) > 0$, тогда как при $(\varepsilon - \delta) < 0$ она имеет два максимума при достаточно большой неэллиптичности. В низкоскоростных средах полярность первого вступления гидроволны совпадает со знаком параметра неэллиптичности, когда он достаточно велик. Кроме того, амплитуда гидроволны существенно зависит от параметров ε и δ.

Результаты данного исследования предоставляют возможность судить о характере анизотропии околоскважинной среды по амплитуде и форме возбуждаемой гидроволны.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Решение задачи об излучении изотропного точечного источника в трансверсально изотропной среде рассматривается во многих работах. Решение для упругих потенциалов в форме, удобной для дальнейшего анализа динамического поля давления во флюиде скважины, представлено, например, в работе [11]. В компактных обозначениях оно выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix}\bar{\Phi}(r,z,\omega)\\ \bar{\Psi}(r,z,\omega)\end{pmatrix} = \bar{A}(\omega)\begin{pmatrix}-i\omega\\ \mathrm{sgn}(z)\end{pmatrix}\int\limits_0^{+\infty} dp\frac{pJ_0(\omega pr)}{\Phi(p)}\times$$

$$\times\left[\begin{pmatrix}a_0(p)\\ b_0(p)\end{pmatrix}\exp(-\omega p|z|)+\right. \qquad (\Pi 1)$$

$$\left.+\sum_{j=1}^{2}\begin{pmatrix}a_j(p)\\ b_j(p)\end{pmatrix}\exp(-i\omega\xi_j(p)|z|)\right],$$

где $(j = 1, 2)$:

$$a_j(p) = \frac{1-\beta_*^2/c_j^2(p)-\sigma_1 p^2(1-p^2c_j^2(p))}{\xi_j(p)(c_2^2(p)-c_1^2(p))},$$

$$b_j(p) = (-1)^{j+1}\frac{\sigma_1 c_j^2(p)p^2+\sigma_2}{c_2^2(p)-c_1^2(p)},$$

$$a_0(p) = ip^3\sigma_1, \quad b_0(p) = p^2\sigma_1,$$

$$\sigma_1 = \alpha_\perp^2 + \alpha_\parallel^2 - 2\alpha_*^2, \quad \sigma_2 = \alpha_*^2 - \alpha_\perp^2.$$

Здесь $\bar{A}(\omega) = \bar{\Psi}_S(\omega)\alpha_0^2$, где $\bar{\Psi}_S(\omega)$ – спектр функции сейсмического источника (потенциала упругих смещений источника) $\Psi_S(t)$; α_0 – нормирующая константа с размерностью скорости; $J_0(x)$ – функция Бесселя нулевого индекса. Скорости квазипродольной (qP) и квазипоперечной (qSV) волн $c_1(p)$ и $c_2(p)$ являются корнями биквадратного дисперсионного уравнения [11]:

$$\Phi(p)c^4(p) - 2\alpha_\perp\beta_* B(p)c^2(p) + \alpha_\perp^2\beta_*^2 = 0 \quad (\text{П}2)$$

с коэффициентами

$$\Phi(p) = 1 + (\alpha_\perp^2 - \alpha_\parallel^2)p^2 + [(\alpha_*^2 - \alpha_\parallel^2)(\alpha_\perp^2 - \beta_*^2) + (\alpha_*^2 - \alpha_\perp^2)(\alpha_*^2 - \beta_*^2)]p^4,$$

$$B(p) = (\alpha_\perp^2 + \beta_*^2 - [(\alpha_\perp^2 - \alpha_*^2)(\alpha_*^2 - 2\beta_*^2) + (\alpha_\parallel^2 - \alpha_*^2)\alpha_\perp^2]p^2)/(2\alpha_\perp\beta_*).$$

Через $\xi_{1,2}(p) = \sqrt{c_{1,2}^{-2}(p) - p^2}$ обозначены вертикальные медленности qP- и qSV-волн.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Уайт Дж.* Возбуждение и распространение сейсмических волн. М.: Недра, 1986.
2. *Dong W., Toksöz M.N.* Borehole seismic-source radiation pattern in transversely isotropic media// Geophysics. 1995. V. 60. № 1. P. 29–42.
3. *Dong W., Toksöz M.N.* Borehole seismic-source radiation in layered isotropic and anisotropic media: Real data analysis // Geophysics. 1995. V. 60. № 3. P. 748–757.
4. *Ionov A.M., Maximov G.A.* Propagation of tube waves generated by an external source in layered permeable rocks // Geophys. J. Int. 1996. V. 124. № 3. P. 888–906.
5. *Ионов А.М., Максимов Г.А.* О возбуждении гидроволны в скважине внешним сейсмическим источником // Акуст. журн. 1999. Т. 45. № 3. С. 354–362.
6. *Alkhalifah T.* The offset-midpoint traveltime pyramid in transversely isotropic media // Geophysics. 2000. V. 65. № 4. P. 1316–1325.
7. *Jacobsen M., Johansen T.A.* Anisotropic approximations for mudrocks: A seismic laboratory study media // Geophysics. 2000. V. 65. № 6. P. 1711–1725.
8. *Петрашень Г.И.* Распространение волн в анизотропных упругих средах. Л.: Наука, 1984. 280 с.
9. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981. 512 с.
10. *Шерифф Р., Гелдарт Л.* Сейсморазведка: История, теория и получение данных. М.: Мир, 1987.
11. *Боков П.М., Ионов А.М.* Точное и асимптотическое решения для поля точечного источника в трансверсально-изотропной среде // Акуст. журн. 2001. Т. 47. № 3. С. 314–312.
12. *Meredith J.A., Toksöz M.N.* and Cheng C.H. Secondary shear waves from source boreholes // Geophysical Prospecting. 1993. V. 41. № 3. P. 287–312.
13. *Tsvankin I. D.* P-wave signatures and notation for transversely isotropic media: An overview // Geophysics, 1996. V. 61. № 2. P. 467–483.
14. *Seriff A.J., Siriam K.P.* P-SV reflection moveouts for transversely isotropic media with a vertical symmetry axis // Geophysics. 1991. V. 56. P. 1271–1274.
15. *Ryan-Grigor S.* Empirical relationships between transverse isotropy parameters and V_p/V_s: Implications for AVO // Geophysics. 1997. V. 62. P. 1359–1364.

Stoneley Wave Generation by an External Seismic Point Source in an Infinite Fluid-filled Borehole Embedded in a Transversely Isotropic Formation: Basic Relationships

P. M. Bokov and A. M. Ionov

The method of integral transformations is used to obtain a long-wave solution to the problem of tube wave excitation by an external point source in an infinite fluid-filled borehole embedded in a transversely isotropic formation. External field that occurs in the formation gives rise to waves in the borehole fluid.The waves generated in the borehole include the lowest mode of the Stoneley wave (the borehole eigenmode) and the qP- and qSV-waves. It is shown that the Stoneley wave is determined by the contributions of two poles in the complex plane of horizontal slowness. According to the asymptotic solution, the Stoneley wave can be described by one of three different waveforms depending on the relationship between the elastic parameters of the surrounding anisotropic formation and the borehole fluid. An analysis of the results of calculations shows that the shape and polarity of the Stoneley wave strongly depend on the sign of the nonellipticity parameter of the elastic medium, which offers a possibility of estimating the anisotropy of the borehole environment from observations of the waveform of the Stoneley wave.