АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2004, том 50, № 2, с. 238–241

УДК 534.26

ПОГЛОЩЕНИЕ ИЗГИБНЫХ ВОЛН ОТ ИСТОЧНИКА НОРМАЛЬНОЙ СИЛЫ В ПЛАСТИНЕ, ОКРУЖЕННОГО МОНОПОЛЬНО-ДИПОЛЬНЫМИ РЕЗОНАТОРАМИ

© 2004 г. А. Д. Лапин

Акустический институт им. Н.Н. Андреева РАН
117036 Москва, ул. Шверника 4
E-mail: mironov@akin.ru

Поступила в редакцию 17.06.2003 г.

Исследовано поле точечного гармонического источника нормальной силы в пластине с резонаторами. Точка приложения силы окружена кольцом одинаковых близко расположенных друг от друга монопольно-дипольных резонаторов, реагирующих не только на смещение, но и на наклон пластины. Определены параметры резонаторов, обеспечивающих вне кольца полное поглощение расходящейся изгибной цилиндрической волны от точечного источника нормальной силы в пластине.

В работе [1] был исследован простейший резонатор для изгибных волн в стержне, реагирующий не только на смещение, но и на наклон (производную смещения) оси этого стержня. Он представляет собой конструкцию из двух пружин с грузами, присоединенных общим жестким (неизгибающимся) стерженьком к стержню, по которому бежит изгибная волна. Одна из этих пружин с грузом расположена перпендикулярно стержню и является монопольным резонатором, реагирующим на смещение стержня, другая пружина с грузом расположена параллельно стержню и является дипольным резонатором, реагирующим на наклон стержня. Под действием падающей изгибной волны монопольный и дипольный резонаторы колеблются и через жесткий соединительный стерженек создают на стержне точечную нормальную силу и точечный изгибающий момент. Рассеянное поле в стержне равно сумме монопольного и дипольного полей, порождаемых этими точечными источниками. Показано, что при равенстве диссипативных потерь и потерь вследствие излучения одиночный резонатор монопольно-дипольного типа полностью поглощает падающую изгибную волну резонансной частоты в упругом стержне. Отметим, что одиночный монопольный резонатор с оптимальным трением поглощает не более половины энергии падающей изгибной волны. Теоретическое и экспериментальное исследование виброизоляции изгибных волн, создаваемой монопольными резонансными системами, выполнено в работах [2–8].

На практике актуальна проблема поглощения изгибных волн от точечного источника нормальной силы в пластине. Ее можно решить при помощи системы монопольно-дипольных резонаторов, присоединенных к пластине. Окружим точку приложения силы на пластине кольцом одинаковых близко расположенных друг от друга монопольно-дипольных резонаторов, горизонтальные пружины этих резонаторов расположим по радиусу кольца. Можно ожидать, что при определенном трении монопольно-дипольные резонаторы полностью поглотят расходящуюся цилиндрическую изгибную волну резонансной частоты от точечного источника нормальной силы в пластине.

Пусть безграничная тонкая пластина лежит в плоскости xy и к ней в точке (0, 0) приложена гармоническая нормальная сила $f(t) = f_0\exp(-i\omega t)$. В пластине без резонаторов этот точечный источник создает изгибные волны со смещением

$$w_0(r,t) = \frac{if_0}{8k^2D}\{H_0^{(1)}(kr) - H_0^{(1)}(ikr)\}\exp(-i\omega t), \quad (1)$$

$k = \sqrt[4]{\dfrac{\rho\omega^2}{D}}$ – волновое число изгибной волны, $H_0^{(1)}(kr)$ – функция Ханкеля первого рода, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, ρ и D – соответственно поверхностная плотность и изгибная жесткость пластины. В формуле (1) первое и второе слагаемые являются соответственно распространяющейся и нераспространяющейся (затухающей) цилиндрическими волнами. К пластине на окружности $r = r_0$ присоединим одинаковые близко расположенные друг от друга монопольно-дипольные резонаторы. "Размажем" эти резонаторы по окружности и будем характеризовать кольцевую резонансную систему параметрами, отнесенными к единице длины этой окружности. На рисунке дано сечение

пластины с резонаторами плоскостью, проходящей через вертикальную ось z, на нем изображено: *1* – вертикальная пружина с погонным коэффициентом упругости $\kappa_1(1 - i\varepsilon_1)$, *2* – горизонтальная пружина с погонным коэффициентом упругости $\kappa_2(1 - i\varepsilon_2)$, ε_1 и ε_2 – погонные коэффициенты диссипации, m_1 и m_2 – погонные массы монопольного и дипольного резонаторов, *3* – жесткий соединительный стерженек длины H, *4* – пластина. Под действием гармонических цилиндрических волн (1) резонаторы колеблются и создают на пластине погонную нормальную силу $F(t)$ и погонный изгибающий момент $M(t)$. Уравнение движения пластины, соединенной с резонаторами, можно написать в виде

$$\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D\Delta^2 w = F(t)\delta(r - r_0) - M(t)\delta'(r - r_0), \quad (2)$$

где Δ – оператор Лапласа, $\delta(r - r_0)$ и $\delta'(r - r_0)$ – дельта-функция и ее производная.

Обозначим через $\xi_1(t)$ смещение груза m_1 по оси z от положения равновесия и через $\xi_2(t)$ смещение груза m_2 по радиусу от положения равновесия. Уравнения движения резонаторов имеют вид

$$m_1\ddot{\xi}_1(t) = -F(t), \quad m_2\ddot{\xi}_2(t) = -g(t), \quad (3)$$

где силы $F(t)$ и $g(t)$ определяются по формулам

$$F(t) = \kappa_1(-i\varepsilon_1)[\xi_1(t) - w(r_0, t)], \quad (4)$$

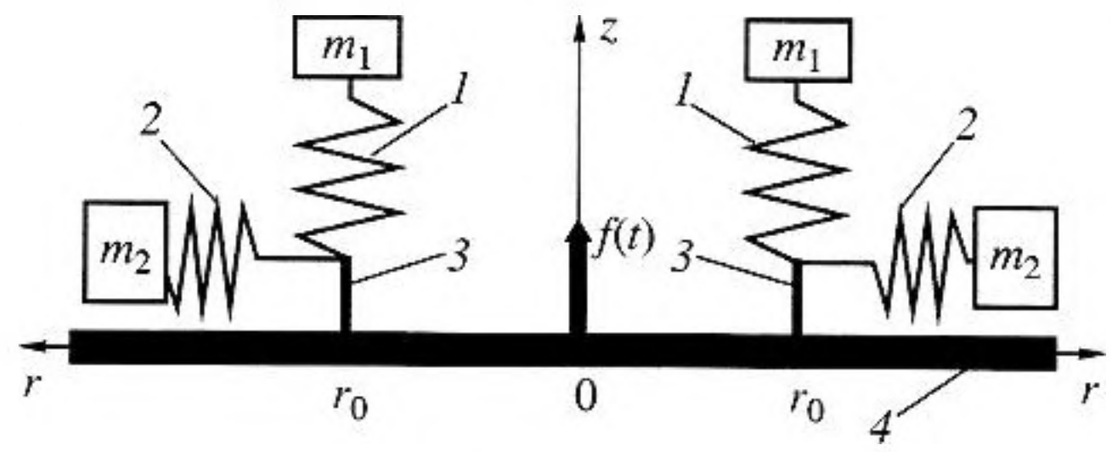
$$g(t) = \kappa_2(1 - i\varepsilon_2)\left[\xi_2(t) + H\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)_{r = r_0}\right] = -M(t)/H, \quad (5)$$

$w(r, t)$ – полное поле в пластине, равное сумме падающего и рассеянного полей.

При гармоническом падающем поле (1) нормальную силу и изгибающий момент можно представить в виде $F(t) = F_0\exp(-i\omega t)$, $M(t) = M_0\exp(-i\omega t)$, где F_0 и M_0 – соответственно комплексные амплитуды силы и момента. Согласно уравнению (2) рассеянное поле в пластине равно сумме монопольного (w_1) и дипольного (w_2) полей, определяемых по формулам

$$w_1(r, t) = \frac{i\pi r_0 F_0}{4k^2 D}\{H_0^{(1)}(kr_0)J_0(kr) - H_0^{(1)}(ikr_0)J_0(ikr)\}\exp(-i\omega t), \quad r < r_0, \quad (6)$$

$$w_1(r, t) = \frac{i\pi r_0 F_0}{4k^2 D}\{J_0(kr_0)H_0^{(1)}(kr) - J_0(ikr_0)H_0^{(1)}(ikr)\}\exp(-i\omega t), \quad r > r_0, \quad (7)$$



Монопольно-дипольный поглотитель изгибных волн от точечного источника нормальной силы в пластине.

$$w_2(r, t) = -\frac{i\pi r_0 M_0}{4kD}\{H_1^{(1)}(kr_0)J_0(kr) - iH_1^{(1)}(ikr_0)J_0(ikr)\}\exp(-i\omega t), \quad r < r_0, \quad (8)$$

$$w_2(r, t) = -\frac{i\pi r_0 M_0}{4kD}\{J_1(kr_0)H_0^{(1)}(kr) - iJ_1(ikr_0)H_0^{(1)}(ikr)\}\exp(-i\omega t), \quad r > r_0, \quad (9)$$

где $J_0(kr)$ и $J_1(kr)$ – функции Бесселя. Полное поле в пластине равно $w = w_0 + w_1 + w_2$.

Амплитуды F_0 и M_0 подберем таким образом, чтобы удовлетворялись соотношения (4) и (5). Согласно уравнениям (3) смещения грузов будут

$$\xi_1(t) = \frac{F_0}{m_1\omega^2}\exp(-i\omega t), \quad \xi_2(t) = -\frac{M_0}{Hm_2\omega^2}\exp(-i\omega t). \quad (10)$$

Подставляя формулы (1), (7), (9) и (10) в соотношения (4) и (5), получим уравнения для амплитуд силы и момента

$$(Y_{10} + Y_{11})F_0 + GM_0 = i\omega w(r_0), \quad H^2 GF_0 + (Y_{20} + Y_{22})M_0 = i\omega H^2\left(\frac{\partial w_0}{\partial r}\right)\Big|_{r = r_0}, \quad (11)$$

где обозначено

$$Y_{10} = i\left[\frac{1}{\omega m_1} - \frac{\omega}{\kappa_1(1 - i\varepsilon_1)}\right], \quad Y_{20} = i\left[\frac{1}{\omega m_2} - \frac{\omega}{\kappa_2(1 - i\varepsilon_2)}\right], \quad (12)$$

$$Y_{11} = -i\omega\frac{w_1(r_0, t)}{F(t)} = \frac{\pi\omega r_0}{4k^2 D}[J_0(kr_0)H_0^{(1)}(kr_0) - J_0(ikr_0)H_0^{(1)}(ikr_0)], \quad (13)$$

$$Y_{22} = -i\omega H^2 \frac{1}{F(t)}\left(\frac{\partial w_2}{\partial r}\right)_{r=r_0} = \tag{14}$$
$$= \frac{\pi\omega r_0 H^2}{4D}[J_1(kr_0)H_1^{(1)}(kr_0) + J_1(ikr_0)H_1^{(1)}(ikr_0)],$$

$$G = -i\omega\frac{w_2(r_0 t)}{M(t)} = \tag{15}$$
$$= -\frac{\pi\omega r_0}{4kD}[J_1(kr_0)H_0^{(1)}(kr_0) - iJ_1(ikr_0)H_0^{(1)}(ikr_0)],$$

Y_{10} и Y_{20} – проводимости монопольного и дипольного резонаторов, $w_0(r) \equiv w_0(r, t)\exp(+i\omega t)$ – комплексная амплитуда смещения в падающей волне.

Решения уравнений (11) имеют вид

$$F_0 = i\omega\frac{\left[(Y_{20}+Y_{22})w_0(r_0) - GH^2\left(\frac{\partial w_0}{\partial r}\right)_{r=r_0}\right]}{[(Y_{10}+Y_{11})(Y_{20}+Y_{22}) - H^2G^2]},$$

$$M_0 = i\omega H^2\frac{\left[(Y_{10}+Y_{11})\left(\frac{\partial w_0}{\partial r}\right)_{r=r_0} - Gw(r_0)\right]}{[(Y_{10}+Y_{11})(Y_{20}+Y_{22}) - H^2G^2]}.$$

Рассеянные поля монопольного и дипольного типов получим по формулам (6), (7), (8) и (9) при подстановке в них F_0 и M_0.

Определим параметры резонаторов, обеспечивающих вне кольца полное поглощение расходящейся цилиндрической волны от точечного источника $f(t) = f_0\exp(-i\omega t)$. С этой целью найдем амплитуды силы и момента, обеспечивающих выполнение требований:

– вне кольца ($r > r_0$) в полном поле $w = w_0 + w_1 + w_2$ отсутствует расходящаяся однородная цилиндрическая волна,

– внутри кольца ($r < r_0$) в рассеянном поле $w_1 + w_2$ отсутствуют однородные (незатухающие) цилиндрические волны.

Из соотношений, выражающих эти требования, при учете формул (1), (6), (7), (8) и (9) получим выражения

$$F_0 = -\frac{i}{4}kf_0H_1^{(1)}(kr_0), \quad M_0 = -\frac{i}{4}f_0H_0^{(1)}(kr_0). \tag{16}$$

Подберем проводимости Y_{10} и Y_{20} резонаторов таким образом, чтобы выражения (16) удовлетворяли уравнениям (11). Искомые проводимости равны

$$Y_{10} = -\frac{i\omega}{2k^3DH_1^{(1)}(kr_0)}\times \tag{17}$$
$$\times\left\{\left[1 - i\frac{2}{\omega}k^2DG\right]H_0^{(1)}(kr_0) - H_0^{(1)}(ikr_0)\right\} - Y_{11},$$

$$Y_{20} = \frac{i\omega H^2}{2kDH_0^{(1)}(kr_0)}\times \tag{18}$$
$$\times\left\{\left[1 + i\frac{2}{\omega}k^2DG\right]H_1^{(1)}(kr_0) - iH_1^{(1)}(ikr_0)\right\} - Y_{22},$$

где величины Y_{11}, Y_{22} и G определяются соответственно по формулам (13), (14) и (15). Резонаторы с проводимостями (17) и (18) полностью поглощают расходящуюся цилиндрическую волну частоты ω.

Пусть радиус кольца велик по сравнению с длиной изгибной волны ($kr_0 \gg 1$). Тогда формулы (17) и (18) упрощаются и принимают вид

$$Y_{10} = \frac{\omega}{4k^3D}(1-i), \quad Y_{20} = \frac{\omega H^2}{4kD}(1+i).$$

Разделяя вещественную и мнимую части в этих приближенных формулах, получим выражения

$$\varepsilon_1 = \frac{\kappa_1}{4k^3D}, \quad \frac{1}{\omega m_1} - \frac{\omega}{\kappa_1} + \frac{\omega}{4k^3D} = 0,$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\kappa_2 H^2}{4kD}, \quad \frac{1}{\omega m_2} - \frac{\omega}{\kappa_2} - \frac{\omega H^2}{4kD}.$$

Они означают, что в монопольном и дипольном резонаторах диссипативные потери равны потерям вследствие излучения и собственные частоты этих резонаторов совпадают. Кольцо таких монопольно-дипольных резонаторов полностью поглощает расходящуюся гармоническую цилиндрическую волну в тонкой пластине. Два кольца резонаторов, симметрично присоединенных к пластине сверху и снизу, полностью поглощают расходящуюся изгибную волну от точечного источника нормальной силы и в достаточно толстой пластине, так как из-за симметрии в ней не возбуждаются рассеянные продольные волны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лапин А.Д.* Резонатор монопольно-дипольного типа для изгибных волн в стержне // Акуст. журн. 2004. Т. 50. № 1. С. 90–94.
2. *Клюкин И.И.* Об ослаблении волн изгиба в стержнях и пластинах при помощи резонансных колеба-

тельных систем // Акуст. журн. 1960. Т. 6. № 2. С. 213–219.

3. *Клюкин И.И., Сергеев Ю.Д.* О рассеянии изгибных волн антивибраторами, установленными на пластине // Акуст. журн. 1964. Т. 10. № 1. С. 60–65.
4. *Тютекин В.В., Шкварников А.П.* Синтез и исследование поглотителей изгибных волн в стержнях и пластинах // Акуст. журн. 1972. Т. 18. № 3. С. 441–447.
5. *Исакович М.А., Кашина В.И., Тютекин В.В.* Экспериментальное исследование виброизоляции изгибных волн, создаваемой импедансными системами // Акуст. журн. 1977. Т. 23. № 3. С. 384–389.
6. *Malcolm J. Crocker.* Editor-in-Chief. Acoustics Handbook. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1997.
7. *Gurgoze M., Batan H.* On the effect of an attached spring-mass system on the frequency spectrum of a cantilevered beam // J. Sound Vibrat. 1996. V. 195. № 1. P. 164–168.
8. *Gurgoze M.* Alternative formulations of the characteristic equation of a bernoulli-euler beam to wich saveral viscously damped spring-mass system are attached inspan // J. Sound Vibrat. 1999. V. 223. № 4. P. 667–677.

Absorption of Bending Waves in a Plate Driven by a Normal Force Source Encircled with Monopole–Dipole Resonators

A. D. Lapin

The field produced by a harmonic point source of normal force in a plate with resonators is studied. The origin of the force is encircled with a ring of closely spaced identical monopole–dipole resonators responsive to both displacement and tilt of the plate. For these resonators, the parameters are determined that ensure complete absorption of the divergent cylindrical bending wave generated in the plate by the point source of normal force.