

УДК 534.535

СТРУКТУРА АКУСТИЧЕСКИХ ДОМЕНОВ В ХОЛЕСТЕРИЧЕСКОМ ЖИДКОМ КРИСТАЛЛЕ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ УЛЬТРАЗВУКА

© 2004 г. Е. Н. Кожевников

Самарский государственный университет
443011, Самара, ул. Ак. Павлова 1

E-mail: kozhev@ssu.samara.ru

Поступила в редакцию 22.07.2003 г.

На основе неравновесной гидродинамики холестерического жидкого кристалла (ХЖК) рассмотрены свойства акустических “доменов” в ХЖК-слое, возникающих при нормальном падении на него ультразвуковой волны. Методом возмущений анализируется геометрия, размер доменов и степень деформации ХЖК-структуры при интенсивностях ультразвука, превышающих пороговую. Построена скэйлинговая зависимость размера доменов и амплитуды деформации от интенсивности воздействия и предварительного растяжения слоя; показано, что с продвижением за порог эффекта размеры доменов уменьшаются.

Нематические и холестерические жидкие кристаллы демонстрируют разнообразие пространственно-модулированных диссипативных структур (доменов), которые могут возникать в них при периодической деформации кристалла в осциллирующих потоках, вязких волнах, звуковом поле [1–4]. Вид доменов в них зависит от исходной ориентации кристалла, геометрии жидкокристаллической ячейки, типа и частоты воздействия. Теоретическое описание диссипативных структур при низкочастотном воздействии (см. например [5–9]) основано на уравнениях гидродинамики Лесли–Эриксона [10–11]. Для описания доменов на высоких частотах приходится привлекать процессы структурной релаксации, а также нелинейные релаксационные явления, которые приводят к появлению стационарных напряжений и моментов, квадратичных по сжатию звуковом поле. Такой подход позволил описать появление доменных структур в слое холестерического жидкого кристалла при нормальном падении на него ультразвуковой волны в широком, более четырех порядков, диапазоне частот [12–13].

Теоретический анализ доменов, возникающих при периодической деформации нематического и холестерического кристаллов, во всех ранее опубликованных работах сводится к определению порога эффекта, при котором моменты, вызванные внешним воздействием и дестабилизирующие исходную структуру кристалла, сравниваются с упругими моментами, возникающими в деформированной структуре и стабилизирующими ее. При этом не анализируется геометрия доменов за порогом эффекта, когда интенсивность внешнего воздействия превышает пороговое значение, и не определяется степень деформации

кристалла. В то же время экспериментальные исследования последних лет показали, что размер доменов с продвижением за порог может значительно меняться (см. например [14]). Экспериментальное и теоретическое исследование этих изменений важно для понимания природы диссипативных структур, возникающих в анизотропных жидкостях при динамическом воздействии.

В настоящей работе теоретически описана доменная структура, возникающая в слое холестерического жидкого кристалла (ХЖК) при нормальном падении на него ультразвуковой волны с интенсивностью, превышающей пороговую. Определяется степень деформации холестерической структуры и размер доменов в зависимости от интенсивности ультразвука.

Рассмотрим воздействие ультразвука частоты ω с амплитудой сжатия ε на планарно ориентированный ХЖК толщины h . В невозмущенном состоянии кристалла ось холестерической спирали направлена по нормали к слою (ось z), а холестерические слои параллельны границам слоя ($z = 0, h$). Считая первую на пути звуковой волны границу ХЖК-слоя ($z = 0$) акустически прозрачной, а вторую ($z = h$) – жесткой, представим сжатие кристалла в звуковом поле стоячей волной

$$\varepsilon(t, z) \approx 2\varepsilon \cos[k_s(h - z)] \sin \omega t,$$

где $k_s = \omega/c$ – волновое число звука в слое, c – скорость звука.

Степень воздействия звука на кристалл определяется усредненным по периоду (черта сверху) квадратом сжатия жидкости в звуковом поле $\overline{\varepsilon^2(t, z)}$. В анализе эффекта ограничимся частотами, на которых длина звуковой волны в холесте-

рическом кристалле больше шага спирали, и в уравнениях для возмущений холестерической структуры заменим $\overline{\varepsilon^2(t, z)}$ на его усредненное по толщине слоя значение $\overline{\varepsilon^2(t, z)} = \varepsilon^2[1 + \sin(2k_s h)/(2k_s h)]$.

Дополнительно ограничим частоту неравенством $\omega > \omega_0 = 2.25\tau^{-1}h/P_0$, где P_0 – шаг холестерической спирали, τ – время релаксации ориентационной упорядоченности кристалла. В этом случае дестабилизация исходной структуры кристалла обусловлена действием нелинейных релаксационных напряжений $\sigma_{ij}^{(2)}$ и моментов $\Gamma_i^{(2)}$ вида

$$\sigma_{ij}^{(2)} \sim \overline{\left\{ \text{Re} \left[\frac{\delta\alpha}{\delta\varepsilon_{pq}} \varepsilon_{pq} \right] v_{ij} \right\}},$$

$$\Gamma_i^{(2)} \sim \overline{\left\{ \text{Re} \left[\frac{\delta(\gamma_2/\gamma_1)}{\delta\varepsilon_{pq}} \delta\varepsilon_{pq} \right] v_{ik} \right\}} n_k,$$

ε_{pq} – компоненты тензора деформации, $v_{pq} = \dot{\varepsilon}_{pq}$, $\alpha, \gamma_1 = \alpha_3 - \alpha_2, \gamma_2 = \alpha_3 + \alpha_2$ – коэффициенты вязкости Лесли [47]. В настоящем расчете ограничимся рассмотрением лишь этих дестабилизирующих факторов, игнорируя роль вихревых осциллирующих потоков.

При описании доменов направим ось z по нормали к слою, оси x, y считаем лежащими в плоскости нижней границы $z = 0$, невозмущенные холестерические слои параллельны плоскости x, y . Рассмотрим кристалл с малым шагом холестерической спирали, считая выполняющимся неравенство $P_0 \ll h$.

Уравнения движения холестерической жидкости и вращения директора при воздействии ультразвука сформулированы в работе [13], выделим из них уравнения для стационарных потоков и условие равновесия директора в потоках

$$\nabla \times [\nabla \cdot \hat{\sigma} + \nabla \cdot \hat{\sigma}^{(2)} + \mathbf{F}] = 0,$$

$$\frac{1}{2}(\text{rot} \mathbf{v} \times \mathbf{n}) + \frac{\gamma_2}{\gamma_1} [\hat{v} \cdot \mathbf{n} + (\mathbf{n} \cdot \hat{v} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}] + \frac{1}{\gamma_1} \mathbf{\Gamma} + \mathbf{\Gamma}^{(2)} = 0. \quad (1)$$

Здесь n – директор $\hat{\sigma}$ – тензор вязких напряжений Лесли

$$\sigma_{ij} = \alpha_1 v_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta n_i n_j + \alpha_2 N_i n_j + \alpha_3 N_j n_i + \alpha_4 v_{ij} + \alpha_5 v_{ik} n_k n_j + \alpha_6 v_{jk} n_k n_i,$$

$\mathbf{N} = \dot{\mathbf{n}} - 1/2 \text{rot} \mathbf{v} \times \mathbf{n}$, $\mathbf{\Gamma}$ и \mathbf{F} – упругие моменты Франка и сила, возникающие в деформированной холестерической структуре и определяемые через упругую энергию Франка; $\mathbf{\Gamma}^{(2)}$ и $\hat{\sigma}^{(2)}$ – нелинейные моменты и напряжения, обусловленные релаксацией жидкокристаллической структуры в

звуковом поле. По аналогии с нематическими кристаллами коэффициенты вязкости α_1 и α_3 считаем малыми и полагаем далее равными нулю, коэффициенты вращательной вязкости при этом равны $\gamma_1 = -\gamma_2 = \gamma$.

Нелинейные моменты и напряжения определяются интенсивностью воздействия и направлением колебаний m в звуковой волне. В выбранной геометрии $\mathbf{m} = (0, 0, 1)$, директор \mathbf{n} имеет вид $\mathbf{n} = (n_x, n_y, \sin\theta)$, где θ угол между директором и плоскостью x, y . Вектор $\mathbf{\Gamma}^{(2)}$ и компоненты тензора напряжений $\hat{\sigma}^{(2)}$, необходимые для формулирования уравнения движения, определены в работе [15]

$$\mathbf{\Gamma}^{(2)} = \frac{1}{2} \omega_2 F \varepsilon^2 m_1 (\mathbf{m} - m_1 \mathbf{n}),$$

$$\sigma_{z\alpha}^{(2)} = -2\gamma \omega_1^+ F \varepsilon^2 \sin\theta \cos\theta n_\alpha^0, \quad (2)$$

$$\sigma_{\alpha z}^{(2)} = 2\gamma \omega_1^- F \varepsilon^2 \sin\theta \cos\theta n_\alpha^0, \quad \alpha = x, y.$$

Здесь $m_1 = \mathbf{m} \mathbf{n} = \sin\theta$ – проекция \mathbf{m} на директор, ω_2, ω_1^\pm – параметры, имеющие размерность частоты

$$\omega_1 = \frac{1}{\tau \langle P_2 \rangle} \left[1 + \frac{\sin(2k_s h)}{2k_s h} \right] (K \beta_s^{-1} - R) \times$$

$$\times \left\{ \frac{1}{7} \left(R_{22} + \frac{16}{5} R_{24} \right) - \frac{1}{6} (\langle P_2 \rangle + 2 - 10T/d) \right\}, \quad (3)$$

$$\omega_1^\pm = \frac{nT}{2\gamma} \beta_s^{-1} \left[1 + \frac{\sin(2k_s h)}{2k_s h} \right] (K \beta_s^{-1} - R) \times$$

$$\times \left\{ \frac{3}{2} \langle P_2 \rangle \mp [R_{22} + \langle P_2^2 (P_2 - \langle P_2 \rangle)] \right\},$$

$n_x^0 = \cos qz, n_y^0 = \sin qz$ – невозмущенные компоненты директора, $q = 2\pi/P, P$ – шаг холестерической спирали.

Напряжения $\sigma_{xy}^{(2)}$ симметричны по перестановке индексов, диагональные элементы тензора напряжений не содержат слагаемых, нелинейных по возмущениям – эти компоненты не войдут в уравнения движения.

В формулах (2–3) β_s – адиабатическая сжимаемость, $R = 1 - d_T/7 + 12d_T R_{24}/35R_{22}$, $R_{nm} = \langle P_n P_m \rangle - \langle P_n \rangle \langle P_m \rangle$, $d_T = d \langle P_2 \rangle / T$, d – постоянная молекулярного поля, $P_n = P_n(\cos \chi)$ – полиномы Лежандра, χ – угол между длинной осью молекулы и директором, угловые скобки означают усреднение по

угловому распределению ориентаций длинных осей молекул, параметры K и β имеют вид

$$K = \beta d_T \frac{1}{T} \left(\frac{\partial T_c}{\partial p} - \frac{\alpha TV}{C_p} \right), \quad \beta = \left(1 + nR_{22} \frac{d_T^2}{C_p} - R_{22} \frac{d}{T} \right)^{-1},$$

T_c – температура ориентационного плавления кристалла, α – объемный коэффициент теплового расширения, V – объем, C_p – теплоемкость при постоянном давлении, функция $F = F(\omega\tau)$ определяют релаксационную зависимость возмущения углового распределения от частоты воздействия $F = F(\omega\tau) = \omega^2\tau^2/(1 + \omega^2\tau^2)$. В формуле для ω_1^\pm , полученной в [15], полагается $\alpha_1 \approx 1$, $\alpha_5 + \alpha_6 \approx -1$.

Упругие моменты Франка Γ в уравнении вращения и сила F в уравнении движения определяются дифференцированием плотности свободной энергии кристалла g по повороту директора в первом случае и по перемещениям u – во втором:

$$\Gamma = -\frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} + \nabla_i \frac{\partial g}{\partial \nabla_i \mathbf{n}},$$

$$F = -\frac{\partial g}{\partial \mathbf{u}} + \nabla_i \frac{\partial g}{\partial \nabla_i \mathbf{u}} - \Delta \frac{\partial g}{\partial \Delta \mathbf{u}}.$$

В двухконстантном приближении упругая энергия G имеет вид [11]

$$G = \int_V g dV = \frac{1}{2} K_{33} \int_V \{ (\operatorname{div} \mathbf{n})^2 + \lambda (\mathbf{n} \operatorname{rot} \mathbf{n} + q_0)^2 + (\mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{n})^2 \} dV,$$

где $K_{11} = K_{33}$, K_{22} – упругие постоянные Франка, $\lambda = K_{22}/K_{33}$, $q_0 = 2\pi/P_0$, P_0 – шаг холестерической спирали в равновесной холестерической структуре. В ХЖК-слое, растянутом вдоль оси спирали на величину $\delta' \ll 1$, шаг спирали определяется значением $P = P_0(1 + \delta')$, а равновесное и реальное волновые числа спирали, соответственно q_0 и q , связаны соотношением $q_0 = q(1 + \delta')$.

Представим директор в угловых переменных θ , $\Phi = qz + \varphi$, где θ – угол между директором и плоскостью xu , φ – угол отклонения директора от равновесной ориентации в плоскости слоя:

$$\mathbf{n} = (\cos\theta \cos\Phi, \cos\theta \sin\Phi, \sin\theta).$$

В переменных θ , Φ упругая энергия принимает вид

$$G = \frac{1}{2} K_{33} \int_V \{ (\nabla\theta)^2 + \cos^2\theta (\nabla_\perp \Phi)^2 + \lambda (\Phi_{,z})^2 - 2\lambda q_0 \cos^2\theta \Phi_{,z} + 2q\lambda (n_x^0 \theta_{,y} - n_y^0 \theta_{,x}) + 2\lambda q_0 \sin\theta \cos\theta n_\alpha \Phi_{,\alpha} +$$

$$+ (\lambda - 1) [(n_x^0 \theta_{,y} - n_y^0 \theta_{,x})^2 + \cos^4\theta (\Phi_{,z})^2 + \sin^2\theta \cos^2\theta (n_s^0 \Phi_{,s})^2 - \cos^2\theta (n_x^0 \theta_{,y} - n_y^0 \theta_{,x}) \Phi_{,z} + 2 \sin\theta \cos\theta n_s \Phi_{,s} (n_x^0 \theta_{,y} - n_y^0 \theta_{,x}) - 2 \sin\theta \cos^3\theta n_s^0 \Phi_{,s} \Phi_{,z}] \} dV. \quad (4)$$

Индекс α здесь и везде далее пробегает значения $\alpha = x, y$.

Рассмотрим малые деформации холестерической структуры, когда малы углы θ и φ . Разложим тригонометрические функции в (4) по степеням θ и φ и, преобразуя выражение для энергии G , сохраним в ней степени θ и φ по четвертую включительно. Полное выражение для энергии при этом оказывается громоздким, приведем его упрощенное выражение, считая выполняющимся неравенство: $|\theta| \ll |\varphi|$

$$G = \frac{1}{2} K_{33} \int_V \{ (\nabla\theta)^2 + (\nabla_\perp \varphi)^2 + \lambda (\varphi_{,z})^2 + q^2 \theta^2 (1 + 2\lambda\delta') + 4q\theta n_\alpha \varphi_{,\alpha} (1 + \lambda\delta') + (\lambda - 1) (n_x^0 \theta_{,y} - n_y^0 \theta_{,x})^2 \} dV. \quad (5)$$

Здесь

$$n_x = n_x^0 - n_y^0 \varphi - \frac{1}{2} n_x^0 \varphi^2, \\ n_y = n_y^0 + n_x^0 \varphi - \frac{1}{2} n_y^0 \varphi^2.$$

Третья и четвертая степени возмущения входят в перекрестное слагаемое, содержащее n_x, n_y .

Неравенство $|\theta| \ll |\varphi|$ в структуре с малым шагом спирали, когда $P_0 \ll h$, оправдано большей энергией геликоидальной деформации структуры, обусловленной выходом молекул из ХЖК-плоскостей, по сравнению с энергией перемещения слоев, обусловленной поворотом молекул в ХЖК-плоскостях. Соотношение между углами θ и φ , полученное в дальнейшем расчете, подтверждает это неравенство.

Заметим, что выбор новых переменных $\theta' = \theta(1 + \lambda\delta')$, $\varphi' = \varphi(1 - 1/2\lambda\delta')$ приводит упругую энергию к виду

$$G = \frac{1}{2} K_{33} \int_V \{ (\nabla\theta')^2 + (1 - \lambda\delta') (\nabla_\perp \varphi')^2 + \lambda (\varphi'_{,z})^2 + q^2 \theta'^2 + 4q\theta' n_\alpha \varphi'_{,\alpha} + (\lambda - 1) (n_x^0 \theta'_{,y} - n_y^0 \theta'_{,x})^2 \} dV,$$

использованному ранее в [12–13] в квадратичном по возмущениям представлении энергии.

Используя формулы (2) для нелинейных моментов и напряжений и свободную энергию (5),

выделим из (1) самосогласованную систему уравнений для углов θ , φ и скорости стационарных потоков v_z :

$$\begin{aligned} & \gamma\omega_2 F \varepsilon^2 \sin\theta \cos\theta - K_{33}[\Delta\theta - q^2\theta(1 + 2\lambda\delta') - \\ & \quad - 2qn_\alpha\varphi_{,\alpha}(1 + \lambda\delta') + \\ & \quad + (\lambda - 1)(n_x^2\theta_{,xx} + n_y^2\theta_{,yy} - 2n_x n_y \theta_{,xy})] = 0, \\ & \gamma(qv_z - \Omega) - K_{33}[\varphi_{,zz} + \Delta_\perp\varphi + 2q(n_\alpha\theta)_{,\alpha}(1 + \lambda\delta')] = 0, \\ & q(qv_z - \Omega) + \omega_1^+ F \varepsilon^2 (n_\alpha \sin\theta \cos\theta)_{,\alpha} = 0. \end{aligned}$$

Исключая скорость, получим следующие уравнения для θ , φ :

$$\begin{aligned} & K_{33}[\Delta\theta - q^2\theta(1 + 2\lambda\delta') - 2qn_\alpha\varphi_{,\alpha}(1 + \lambda\delta') + \\ & \quad + (\lambda - 1)(n_x^2\theta_{,xx} + n_y^2\theta_{,yy} - 2n_x n_y \theta_{,xy})] - \\ & \quad - \gamma\omega_2 F \varepsilon_0^2 \theta(1 - 2/3\theta^2) = 0, \quad (6) \\ & K_{33}[\varphi_{,zz} + \Delta_\perp\varphi + 2q(n_\alpha\theta)_{,\alpha}(1 + \lambda\delta')] + \\ & \quad + \gamma q^{-1} \omega_1^+ \varepsilon^2 [n_\alpha\theta(1 - 2/3\theta^2)]_{,\alpha} = 0. \end{aligned}$$

Ищем решение уравнений (6) в виде быстро меняющегося вдоль оси спирали угла θ и медленно меняющегося угла φ . Такое решение соответствует минимуму упругой энергии в деформированной холестерической структуре и, следовательно, наибольшему искажению при внешнем воздействии. Считая углы θ и φ нулевыми на границах слоя и периодическими в плоскости слоя, представим их в виде

$$\begin{aligned} \theta &= \sin k_z z [\psi_x n_x^0 \sin k_x x \cos k_y y + \psi_y n_y^0 \cos k_x x \sin k_y y], \\ \varphi &= \psi_2 \sin k_z z \cos k_x x \cos k_y y, \quad (7) \end{aligned}$$

где ψ_x , ψ_y , ψ_2 – постоянные коэффициенты, $k_z = \pi/h$. Имея в виду достаточно малый шаг холестерической спирали по сравнению с толщиной ХЖК-слоя, считаем выполняющимися неравенства

$$k_z = \pi/h \ll k_\alpha \ll q = 2\pi/P. \quad (8)$$

Подставим выражения (7) для углов в уравнения (6) и выделим из них систему уравнений для коэффициентов ψ_2 , ψ_x , ψ_y . Для этого умножим первое из уравнений один раз на произведение $n_x^0 \sin k_x \cos k_y$, другой раз – на $n_y^0 \cos k_x \sin k_y$ и второе уравнение – на $k_z z \cos k_x \cos k_y$ и проинтегрируем произведения по $z \in [0, h]$, $x \in [0, 2\pi/k_x]$ и $y \in [0, 2\pi/k_y]$. Раскладывая результаты интегрирования по степеням $k_z/q \ll 1$ и ограничиваясь в раз-

ложении второй степенью k_z/q , выделим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} & [2q^2(1 + \lambda\delta') + k^2]\psi_x - 2qk_x\psi_2 \left(1 - \frac{27}{128}\psi_2^2\right) - \\ & \quad - \frac{\lambda-1}{4}[(3k_y^2 + k_x^2)\psi_x - 2k_x k_y \psi_y] - \\ & \quad - f_2 \varepsilon^2 \psi_x \left[1 - \frac{27}{128}\psi_2^2 - \frac{3}{128}(3\psi_y^2 + \psi_x^2)\right] = 0, \\ & [2q^2(1 + \lambda\delta') + k^2]\psi_y - 2qk_y\psi_2 \left(1 - \frac{27}{128}\psi_2^2\right) - \\ & \quad - \frac{\lambda-1}{4}[(3k_x^2 + k_y^2)\psi_y - 2k_x k_y \psi_x] - \\ & \quad - f_2 \varepsilon^2 \psi_y \left[1 - \frac{27}{128}\psi_2^2 - \frac{3}{128}(3\psi_x^2 + \psi_y^2)\right] = 0, \\ & (\lambda k_z^2 + k^2)\psi_2 - qk_\alpha\psi_{,\alpha} \left(1 - \frac{9}{128}\psi_2^2\right)(1 + \lambda\delta') - \\ & \quad - q^{-1} f_1 \varepsilon^2 \left\{ k_\alpha \psi_\alpha \left(1 - \frac{9}{128}\psi_2^2\right) - \right. \\ & \quad \left. - \frac{3}{128} [k_x \psi_x (9\psi_x^2 + \psi_y^2) + k_y \psi_y (9\psi_y^2 + \psi_x^2)] \right\}. \quad (9) \end{aligned}$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned} f_1 &= \gamma\omega_1^+/K_{33}, \quad f_2 = \gamma\omega_2/K_{33}, \\ k^2 &= k_x^2 + k_y^2, \quad \alpha = x, y. \end{aligned}$$

При нормальном падении ультразвука на ХЖК-слой его воздействие на кристалл изотропно в плоскости слоя. Холестерическая структура в этом случае наименее устойчива к возмущениям с геометрией, соответствующей минимуму упругой энергии. В слоистых системах, в том числе и в ХЖК, такие возмущения при изотропном в плоскости слоя воздействии имеют вид квадратной сетки. Действительно, в длинноволновом приближении свободная энергия G слоистой структуры [16] при смещении слоев $w_z = w_0 \sin(k_z z) \cos(k_x x) \cos(k_y y)$ приводится к виду

$$\begin{aligned} G &= \frac{VB}{2048} [(k^4 + 24(k_x^2 - k_y^2)^2) \omega_0^4 + \\ & \quad + \frac{V}{8} [Bk_z^2 + K'k^2] \omega_0^2. \end{aligned}$$

Она минимальна при $k_x = k_y$ (здесь B и K' – упругие постоянные, V – объем). Поэтому рассмотрим да-

лее образование в ХЖК-слое структуры типа "квадратная сетка", полагая $k_x = k_y = k/\sqrt{2}$ и $\psi_x = \psi_y = \psi_1$. Выделим из системы (9) уравнения для ψ_1 и ψ_2 :

$$\begin{aligned} & \left[2q^2(1 + \lambda\delta') + \frac{3 + \lambda}{4}k^2 \right] \psi_1 - \\ & - 2qk_x \psi_2 \left(1 - \frac{9}{128}\psi_2^2 \right) (1 + \lambda\delta') - \\ & - f_2 \varepsilon^2 \psi_1 \left[1 - \frac{3}{32}\psi_1^2 - \frac{9}{128}\psi_2^2 \right] = 0, \quad (10) \\ & [\lambda k_z^2 + k^2] \psi_2 - 2qk_x \psi_1 \left(1 - \frac{9}{128} \right) (1 + \lambda\delta') - \\ & - 2f_1 q^{-1} \varepsilon^2 k_x \psi_1 \left[1 - \frac{15}{64}\psi_1^2 - \frac{9}{128}\psi_2^2 \right] = 0. \end{aligned}$$

Вводя вектор ψ

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix},$$

и выделяя в левой части системы (10) линейные по деформации слагаемые, представим ее в виде

$$\hat{D} \cdot \psi = Q, \quad (11)$$

где \hat{D} – матрица с компонентами

$$\begin{aligned} D_{11} &= 2q^2(1 + \lambda\delta') + \frac{3 + \lambda}{4}k^2 - f_2 \varepsilon_0^2, \\ D_{12} &= -2qk_x(1 + \lambda\delta'), \\ D_{21} &= -2qk_x(1 + \lambda\delta') - 2\frac{k_x}{q}f_1 \varepsilon_0^2, \\ D_{22} &= \lambda k_z^2 + k^2, \end{aligned} \quad (12)$$

Q – вектор правых частей системы, нелинейных по деформации структуры с компонентами

$$\begin{aligned} Q_1 &= f_2(\varepsilon^2 - \varepsilon_0^2)\psi_1 - \frac{9}{64}qk_x(1 - \lambda\delta')\psi_2^3 - \\ & - \frac{3}{128}f_2 \varepsilon^2 (4\psi_1^2 + 3\psi_2^2)\psi_1, \\ Q_2 &= 2\frac{k_x}{q}f_1(\varepsilon^2 - \varepsilon_0^2)\psi_1 - \frac{9}{64}qk_x \psi_1(1 - \lambda\delta')\psi_2^2 - \\ & - \frac{3k_x}{64q} \varepsilon^2 f_1 (5\psi_1^2 + 3\psi_2^2)\psi_1, \end{aligned} \quad (13)$$

ε_0 – пороговое сжатие, определяемое далее для доменной структуры с волновым числом k .

Проанализируем уравнения (11) методом возмущений. Учитывая, что уравнения содержат

первую и третью степени углов ψ_1 и ψ_2 , представим эти углы и квадрат сжатия ε^2 в виде

$$\begin{aligned} \psi_k &= \psi_k^{(1)}\zeta + \psi_k^{(3)}\zeta^3 + \dots, \quad k = 1, 2, \\ \varepsilon^2 &= \varepsilon_0^2 + E_2\zeta^2 + \dots, \end{aligned} \quad (14)$$

где $\zeta \ll 1$ – малый параметр. Подставляя разложения (14) в (11) и выделяя отдельно слагаемые, содержащие первую и третью степень ζ , получим уравнения для $\psi^{(1)}$ и $\psi^{(3)}$

$$\hat{D} \cdot \psi^{(1)} = 0, \quad (15)$$

$$\hat{D} \cdot \psi^{(3)} = Q^{(3)}, \quad (16)$$

в которых $Q^{(3)}$ – коэффициент при ζ^3 в разложении вектора Q ,

$$\begin{aligned} Q_1^{(3)} &= f_2 E_2 \psi^{(1)} - \frac{9}{64}qk_x(1 - \lambda\delta')(\psi_2^{(1)})^3 - \\ & - \frac{3}{128} \varepsilon_0^2 f_2 [4(\psi_1^{(1)})^2 + 3(\psi_2^{(1)})^2] \psi_1^{(1)}, \\ Q_2^{(3)} &= 2\frac{k_x}{q}f_1 E_2 \psi_1^{(1)} - \frac{9}{64}qk_x(1 - \lambda\delta')\psi_1^{(1)}(\psi_2^{(1)})^2 - \\ & - \frac{3k_x}{64q} \varepsilon_0^2 f_1 [5(\psi_1^{(1)})^2 + 3(\psi_2^{(1)})^2] \psi_1^{(1)}. \end{aligned}$$

Решим уравнение (15). Приравняв определитель системы нулю, найдем значение ε_0^2 . Учитывая соотношения (8), а также малость растяжения δ' , получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_0^2 &= \varepsilon_0^2(k) \approx \\ & \approx \frac{1}{2f_1 + f_2} \frac{\frac{3 + \lambda}{4}k^4 + 2\lambda q_0^2 k_z^2 - 2q_0^2 k^2 \lambda \delta'}{k^2}. \end{aligned} \quad (17)$$

Вводя обозначения

$$k_0^4 = \frac{8\lambda}{3 + \lambda} q_0^2 k_z^2, \quad \delta = \lambda \delta' \frac{4}{3 + \lambda} \frac{q_0^2}{k_0^2},$$

представим ε_0^2 в виде

$$\varepsilon_0^2 \approx \frac{3 + \lambda}{4(2f_1 + f_2)} \frac{k^4 + k_0^4 - 2k^2 k_0^2 \delta}{k^2}. \quad (18)$$

Величина ε_0 имеет смысл пороговой амплитуды сжатия в звуковой волне, при которой начинается формирование структуры с волновым числом k . Параметр δ равен отношению растяжения слоя δ' к пороговому растяжению δ_0 , при котором доменная структура формируется в ХЖК-слое без внешнего воздействия: $\delta = \delta'/\delta_0$.

Собственный вектор задачи (15) $\psi^{(1)}$ с учетом неравенств (8) имеет вид

$$\psi^{(1)} \approx \begin{pmatrix} 1 \\ q/k_x \end{pmatrix} a, \quad (19)$$

где a – определяемая далее амплитуда.

Величину a и ее зависимость от волнового числа k найдем из условия разрешимости уравнений (16) относительно $\psi_1^{(3)}$, $\psi_2^{(3)}$ в виде ортогональности вектора $\mathbf{Q}^{(3)}$ и собственного вектора ψ_c задачи, самосопряженной системе (15),

$$(\psi_c \mathbf{Q}^{(3)}) = 0. \quad (20)$$

Вектор ψ_c определим из уравнения

$$\hat{D}^T \cdot \psi_c = 0,$$

где индекс “ T ” означает транспонирование матрицы. Учитывая при его решении выражение (18) для ϵ_0^2 и неравенства (8), представим ψ_c в виде

$$\psi_c \approx \begin{pmatrix} 1 \\ q/k_x \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Подставим компоненты векторов $\psi^{(1)}$ и ψ_c в (20). Пренебрегая слагаемыми порядка малости $k^2/q^2 \ll 1$ и $\lambda\delta' \ll 1$, а также учитывая соотношение $k_x^2 = k^2/2$, придем к следующему уравнению для a :

$$(2f_1 + f_2)E_2 - \left[\frac{9q^4}{16k^2} + \frac{9}{128}(2f_1 + f_2)\epsilon_0^2 \right] a^2 = 0.$$

Умножая обе части уравнения на ζ^2 , получим

$$\begin{aligned} [\psi_1^{(1)}\zeta]^2 \left[\frac{9q^4}{16k^2} + \frac{9}{128}(2f_1 + f_2)\epsilon_0^2 \right] = \\ = (2f_1 + f_2)(\epsilon^2 - \epsilon_0^2). \end{aligned} \quad (22)$$

Выделим из (22) выражение для $\psi_1^{(1)}\zeta$. Учитывая неравенства (8) и оценки

$$\epsilon_0^2 \sim \frac{k_0^2}{2f_1 + f_2}, \quad \epsilon_0^2 \frac{(2f_1 + f_2)k^2}{q^4} \sim \left(\frac{k}{q_0} \right)^4 \ll 1,$$

придем к следующему выражению для $\psi_1^{(1)}\zeta$:

$$\psi_1^{(1)}\zeta = \sqrt{\frac{4(3+\lambda)k_0^2}{9} \frac{f(s, \delta, \xi)}{q_0^2}},$$

где

$$f(s, \delta, \xi) = \left\{ (1-\delta)\xi \left[s^2 + \frac{\delta}{1-\delta} - \frac{\xi^2 + 1}{2\xi(1-\delta)} \right] \right\}^{1/2}, \quad (23)$$

$\xi = k^2/k_0^2$ – квадрат отношения волнового числа структуры к волновому числу структуры, возникающей при растяжении слоя, $s = \epsilon/\epsilon_{th}$, ϵ_{th} – минимальное по волновому k числу значение ϵ_0 , определяемое формулой

$$\epsilon_{th} = \left[\frac{(3+\lambda)k_0^2}{2(2f_1 + f_2)} (1-\delta) \right]^{1/2},$$

которое достигается при $k = k_0$.

Амплитудные значения углов θ и φ в первом по ζ приближении принимают вид

$$\begin{aligned} \theta_0 = \theta_0(k) \approx \psi_1^{(1)}\zeta = \sqrt{\frac{4(3+\lambda)k_0^2}{9} \frac{f(s, \delta, \xi)}{q^2}} = \\ = \frac{2\sqrt{2\lambda}P_0}{3} \frac{f(s, \delta, \xi)}{h}, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \varphi_0 = \varphi_0(k) \approx \psi_2^{(1)}\zeta = \sqrt{\frac{2(3+\lambda)k_0^2}{9} \frac{f(s, \delta, \xi)}{q}} = \\ = \left[\frac{4\sqrt{2\lambda}(3+\lambda)P_0}{9} \frac{1}{h} \right]^{1/2} f(s, \delta, \xi). \end{aligned}$$

Отношение амплитуд θ_0 и φ_0 равно $\theta_0/\varphi_0 = [2\lambda(3+\lambda)P_0^2/h^2]^{1/4}$. В слое с малым шагом спирали это отношение мало, что оправдывает упрощения при выводе выражения (5) для упругой энергии.

Проанализируем полученные результаты. Искажению структуры соответствуют действительные значения функции $f(s, \delta, \xi)$. Используя несложную оценку $f^2(s, \delta, \xi) \geq k^2/k_0^2(1-\delta)(s^2-1) \geq 0$, найдем условие появления стационарных искажений в ХЖК-слое при действии ультразвука в виде

$$\epsilon \geq \epsilon_{th}.$$

Следовательно, значение

$$\epsilon_{th} = \left[\frac{3+\lambda}{2(2f_1 + f_2)} k_0^2 (1-\delta) \right]^{1/2}$$

имеет смысл порогового сжатия в звуковом поле в ХЖК-слое; геометрия возникающей при этом структуры определяется волновым числом k_0 , а размер доменов $d = \pi\sqrt{2}/k$ равен размеру доменов $d_0 = \pi\sqrt{2}/k_0$, возникающих при статическом растяжении слоя. Эти пороговые параметры совпадают с результатами предыдущих расчетов [12–13].

За порогом эффекта, когда выполняется неравенство $s > 1$ ($\epsilon > \epsilon_{th}$) искажения структуры пред-

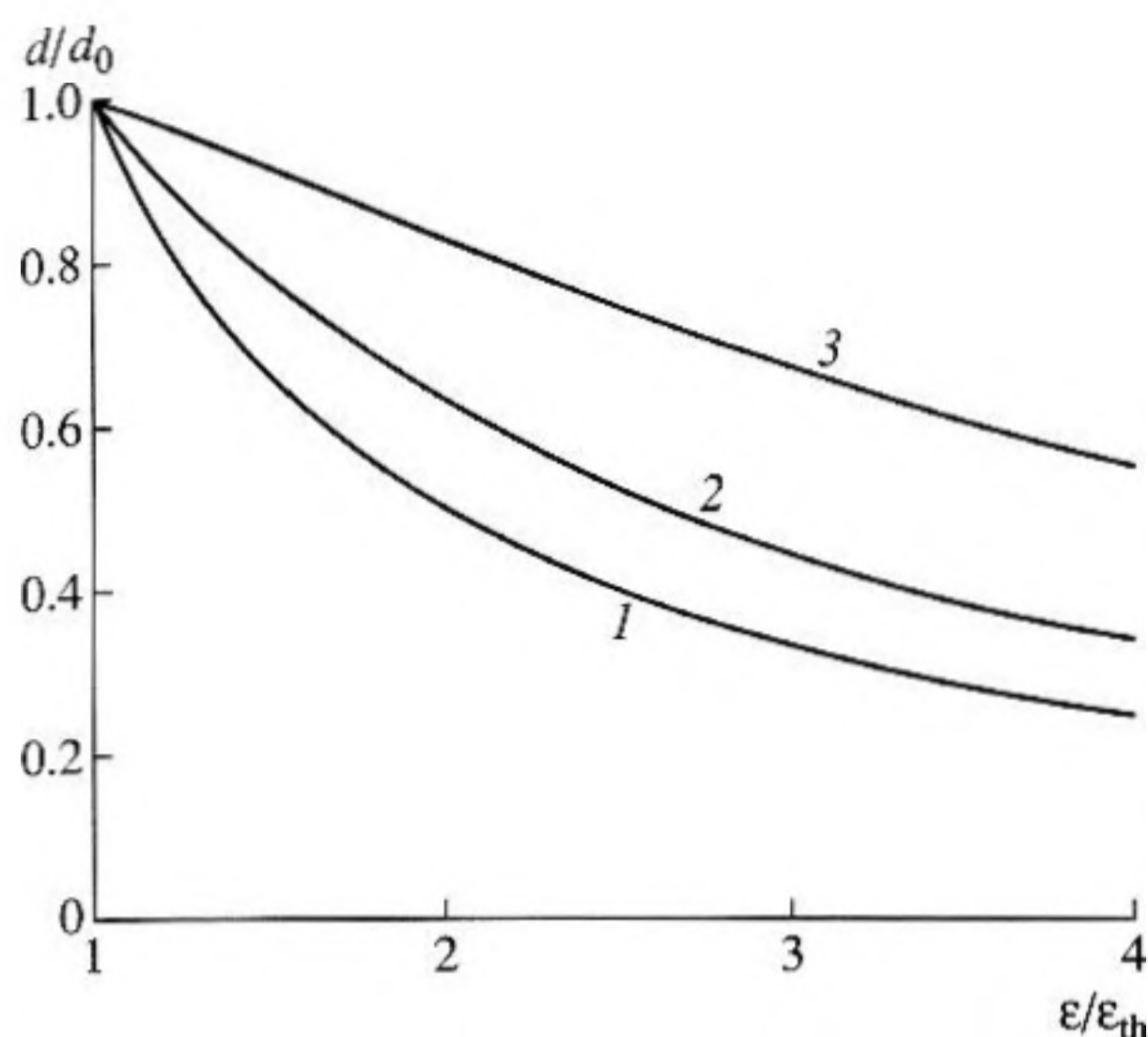


Рис. 1. Зависимость приведенного размера домена d/d_0 от амплитуды сжатия в ультразвуковом поле для различных растяжений ХЖК-слоя: 1 – $\delta = 0$, 2 – $\delta = 0.5$, 3 – $\delta = 0.85$.

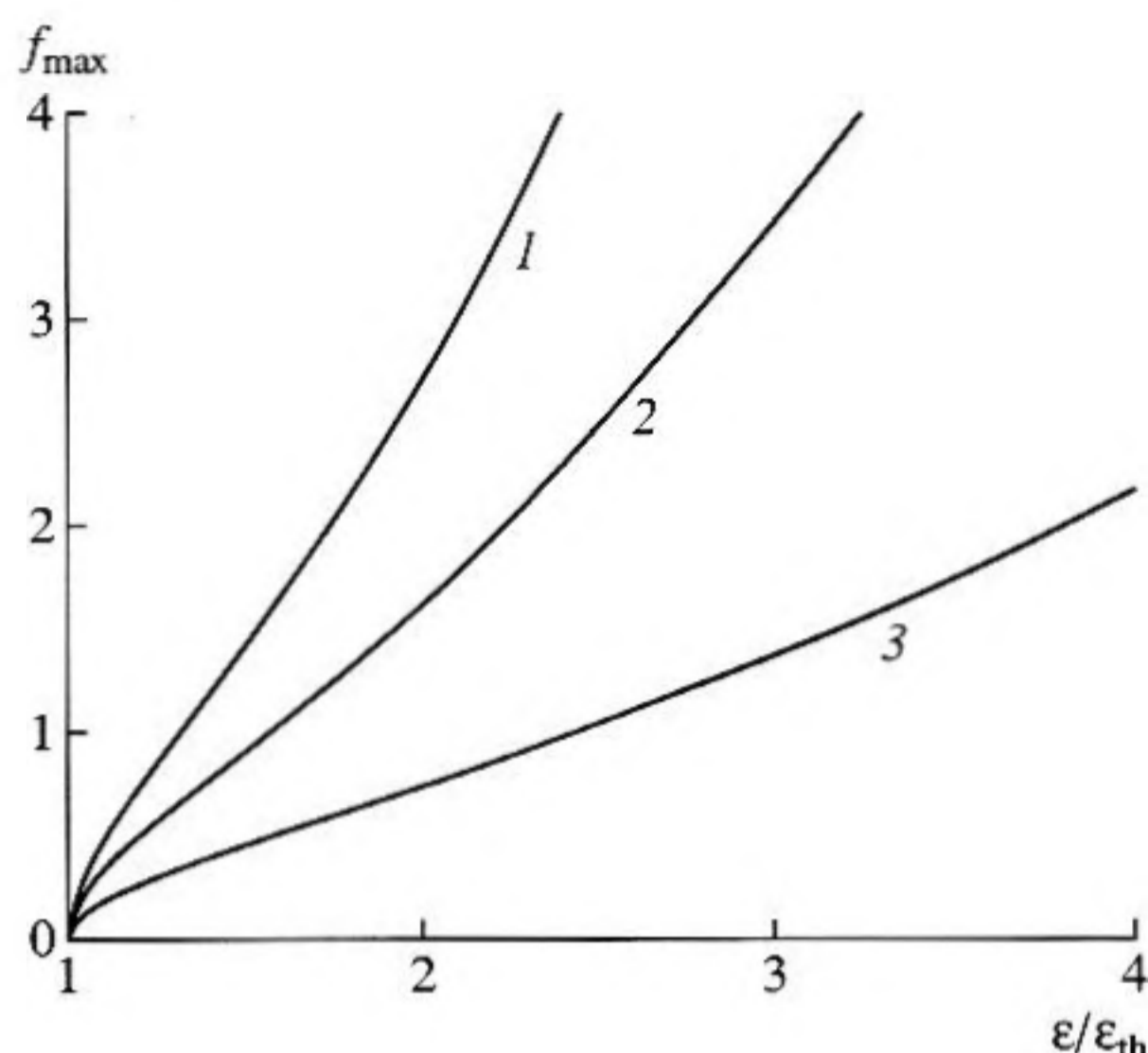


Рис. 2. Зависимость приведенной амплитуды деформации кристалла $f_{\max} = 3h/(2\sqrt{2}\lambda P_0)\theta_0$ от амплитуды сжатия в ультразвуковом поле для различных растяжений ХЖК-слоя: 1 – $\delta = 0$, 2 – $\delta = 0.5$, 3 – $\delta = 0.85$.

ставлены спектром волновых чисел k , лежащих в диапазоне

$$s^2(1-\delta) + \delta - \sqrt{[s^2(1-\delta) + \delta]^2 - 1} < \frac{k}{k_0} < s^2(1-\delta) + \delta + \sqrt{[s^2(1-\delta) + \delta]^2 - 1}.$$

Считая, что в эксперименте наблюдаются искажения с максимальной по k амплитудой, которая достигается при волновом числе k_{\max} , равном

$$k_{\max} = k_0 \sqrt{s^2(1-\delta) + \delta}, \quad (25)$$

будем определять деформацию структуры по-прежнему формулами (24), в которых для функции $f(s, \delta, \xi)$ берется ее максимальное по k значение f_{\max} :

$$f_{\max} = f(s, \delta, s^2(1-\delta) + \delta) = \left\{ \frac{1}{2} [(s^2(1-\delta) + \delta)^2 - 1] \right\}^{1/2}, \quad (26)$$

размер доменов d при этом определяется по формуле

$$d = \frac{\pi\sqrt{2}}{k_{\max}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{k_0 \sqrt{s^2(1-\delta) + \delta}} = \frac{d_0}{\sqrt{s^2(1-\delta) + \delta}}. \quad (27)$$

Размер доменов d и амплитуды деформации структуры θ_0 , φ_0 зависят от относительного сжатия в звуковой волне $s = \varepsilon/\varepsilon_{th}$ и предварительного растяжения δ холестерического слоя через скэй-

линговую комбинацию $[s^2(1-\delta) + \delta]$. Результаты численного расчета d и f_{\max} приведены графически на рис. 1, 2. На рис. 1 для различных растяжений слоя по формуле (27) построены кривые для приведенного размера доменной структуры d/d_0 как функции амплитуды сжатия в уз-волне. Теоретические кривые демонстрируют уменьшение размера доменов с увеличением интенсивности воздействия за порогом эффекта. Этот результат коррелирует с данными работы [14], где уменьшение размеров доменов с увеличением интенсивности ультразвука в надпороговой области наблюдалось экспериментально.

Из вида кривых для $f_{\max} = f(s, \delta, \xi_{\max})$ на рис. 2, построенных для различных растяжений слоя δ , следует, что при увеличении δ скорость возрастания деформации в доменах с ростом $s = \varepsilon/\varepsilon_{th}$ уменьшается. Этот результат отражает уменьшение относительной роли ультразвука в формировании доменной структуры при предварительном растяжении слоя.

Зависимость амплитуды деформации ХЖК от сжатия в звуковой волне $\theta_0 \sim \varphi_0 \sim \sqrt{\varepsilon^2 - \varepsilon_{th}^2}$ аналогична зависимости параметра фазового перехода от расстояния до температуры перехода в теории Ландау фазовых переходов II рода; аналогом температуры в данной работе служит обратная интенсивность ультразвука $J^{-1} \sim \varepsilon^{-2}$.

Рассмотрим динамику искажений холестерической структуры. Считая коэффициенты ψ_1 , ψ_2

зависящими от времени, преобразуем систему уравнений (11) к виду

$$\frac{\gamma}{K_{33}} \frac{d}{dt} \Psi + \hat{D} \cdot \Psi = Q, \quad (28)$$

где матрица \hat{D} и вектор Q определяются формулами (12), (13).

Представим по прежнему вектор Ψ разложением

$$\Psi = \zeta \Psi^{(1)} + \zeta^2 \Psi^{(2)} + \zeta^3 \Psi^{(3)} + \dots,$$

и введем различные масштабы зависимости углов деформации от времени, раскладывая временную производную по степеням ζ

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t_0} + \zeta \frac{\partial}{\partial t_1} + \zeta^2 \frac{\partial}{\partial t_2} + \dots$$

Выделяя из системы (28) слагаемые с разной степенью ζ , получим уравнения

$$\frac{\gamma}{K_{33}} \frac{\partial}{\partial t_0} \Psi^{(1)} + \hat{D} \cdot \Psi^{(1)} = 0, \quad (29)$$

$$\frac{\gamma}{K_{33}} \frac{\partial}{\partial t_0} \Psi^{(2)} + \hat{D} \cdot \Psi^{(2)} = -\frac{\gamma}{K_{33}} \frac{\partial}{\partial t_1} \Psi^{(1)}, \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{K_{33}} \frac{\partial}{\partial t_0} \Psi^{(3)} + \hat{D} \cdot \Psi^{(3)} = \\ = -\frac{\gamma}{K_{33}} \frac{\partial}{\partial t_2} \Psi^{(1)} - \frac{\gamma}{K_{33}} \frac{\partial}{\partial t_1} \Psi^{(2)} + Q^{(3)}. \end{aligned} \quad (31)$$

...

Представляя временную зависимость $\Psi^{(1)}$ экспонентой $\Psi^{(1)} \sim e^{ivt_0}$, где $\text{Im} v = 0$, приведем уравнение (29) к виду

$$\frac{i\gamma v}{K_{33}} \Psi^{(1)} + \hat{D} \cdot \Psi^{(1)} = 0, \quad (32)$$

которое при действительном значении ε имеет решение лишь при $v = 0$. Решения уравнения (32) и сопряженного ему при этом определяется по прежнему формулами (19, 21), а собственное число – формулой (18).

Из условия разрешимости системы (30)

$$\begin{aligned} \left(\Psi_c \cdot \frac{\gamma}{K_{33}} \frac{\partial}{\partial t_1} \Psi^{(1)} \right) + (\Psi_c \cdot \hat{D} \cdot \Psi^{(1)}) = \\ = \left(\Psi_c \cdot \frac{\gamma}{K_{33}} \frac{\partial}{\partial t_1} \Psi^{(1)} \right) = \frac{\gamma}{K_{33}} \left(1 + \frac{q^2}{k_x^2} \right) \frac{\partial a}{\partial t_1} = 0 \end{aligned}$$

вытекает, что амплитуда a , а следовательно, и вектор $\Psi^{(1)}$ не зависят от времени t_1 . Правая часть уравнения (30) при этом обращается в ноль, и уравнение имеет нулевое решение $\Psi^{(2)} = 0$. Усло-

вие разрешимости системы уравнений (31) с учетом неравенств (8) приведем к виду

$$\begin{aligned} \left(\Psi_c \cdot \left[-\frac{\gamma}{K_{33}} \frac{\partial}{\partial t_2} \Psi^{(1)} - \frac{\gamma}{K_{33}} \frac{\partial}{\partial t_1} \Psi^{(2)} + Q^{(3)} \right] \right) = \\ \approx -\frac{2\gamma q_0^2}{K_{33} k^2} \frac{\partial a}{\partial t_2} + (2f_1 + f_2) E_2 a - \frac{9q^4}{16k^2} a^3 = 0. \end{aligned} \quad (33)$$

Определяя, как и ранее, амплитуду деформации первым по ζ приближением $\theta_0 = \theta_0(t, k) \approx \zeta a$ и вводя обозначение

$$\begin{aligned} \tau_s^{-1} &= \frac{(2f_1 + f_2) K_{33} k^2}{\gamma q_0^2} (\varepsilon^2 - \varepsilon_0^2) = \\ &= \frac{(3 + \lambda) K_{33} k_0^4}{4\gamma q_0^2} f^2(s, \delta, \xi), = \\ &= \frac{2\lambda K_{33} k_z^2}{\gamma} f^2(s, \delta, \xi) \end{aligned} \quad (34)$$

получим из (33) следующее уравнение для эволюции амплитуды θ_0

$$\frac{d\theta_0}{dt} - \frac{\theta_0}{2\tau_s} \left[1 - \frac{\theta_0^2}{\theta^2(k)} \right] = 0. \quad (35)$$

Решение уравнения (35) имеет вид

$$\theta_0(t, k) = \theta_0(k) \left\{ 1 + \left[\frac{\theta_0^2(k)}{\theta_{00}^2} - 1 \right] e^{-t/\tau_s} \right\}^{-1/2}, \quad (36)$$

где θ_{00} угол начального отклонения директора от плоскости xy . Параметр $\tau_s = \tau_s(k)$ играет роль времени установления возмущений с волновым числом k . Как следует из формулы (34), это время минимально для волнового числа $k = k_{\max}$. При $t \rightarrow \infty$ формула (36) переходит в первую из формул (24).

Определим пределы применимости полученных результатов по интенсивности воздействия. При выводе формул (24) и (27) предполагались справедливыми неравенства

$$k \ll q_0, \quad \theta_0 \ll \varphi_0 \ll 1.$$

Используя формулу (25) для k_{\max} и формулы (24) для φ_0 и θ_0 , в которых $f = f_{\max}$, получим следующее ограничение на параметр s , определяющий продвижение за порог эффекта

$$s = \varepsilon/\varepsilon_{th} < \left\{ \left(\sqrt{\frac{9}{\sqrt{2\lambda(3+\lambda)}} \frac{h}{P_0}} + 1 - \delta \right) (1 - \delta)^{-1} \right\}^{1/2}.$$

Для значения $\lambda = 0.028$, использованного в работах [12–13], это неравенство сводится к следующему

$$s = \varepsilon/\varepsilon_{th} < \left\{ \frac{4.7\sqrt{h/P_0 - \delta}}{1 - \delta} \right\}^{1/2}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, ГРАНТ 00-02-17732.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Капустин А.П., Капустина О.А. Акустика жидких кристаллов. М.: Наука, 1986. С. 247.
2. Pattern Formation in Liquid Crystals // Edit. Buka A., Kramer L. NY: Springer-Verlag, 1996. 339 p.
3. Demus Ed. Ultrasonic Properties of Liquid Crystals. // Physical Properties of Liquid Crystals. 2000. V. 1. Germany. WILEY-VCH. P. 447–466.
4. Tarasov O.S., Krechov A.P., Kramer L. Transition to spatially periodic patterns in nematics under oscillatory shear flow linear analysis // arXiv:condmat/0205399. V. 1. 2003.
5. Кожевников Е.Н. Доменная структура в холестерическом жидком кристалле при воздействии ультразвука // ЖЭТФ. 1987. Т. 92. № 4. С. 1306–1315.
6. Hogan S.J., Mullen T., Woodford P. Rectilinear low-frequency shear of homogeneously aligned nematic liquid crystals. // Proc. Roy. Soc. Lond. A. 1993. V. 441. P. 559–573.
7. Krekhov A.P., Borsonyi T., Totch P., Buka A., Kramer L. Nematic liquid crystals under oscillatory shear flow // Phys. Rep. 2000. V. 337. P. 171–192.
8. Moritake H., Seike T., Toda K. Acoustooptic Effects of Nematic Liquid Crystals Induced by Elastic Wave Propagating in Glass Substrate // Jap. J. Appl. Phys. Phys. Rep. 1999. V. 38. P. 3076–3079.
9. Inoue M., Moritake H., Toda K. Periodic Properties of Domain in Nematic Liquid Crystals Induced by Elastic Waves // Jap. J. Appl. Phys. Phys. Rep. 2000. V. 389. P. 3125–3129.
10. Stephen M.J., Straley J.P. Physics of liquid crystals // Rev. of Modern Physics. 1974. V. 46. № 4. P. 617–704.
11. Де Жен П. Физика жидких кристаллов. М.: Мир. 1977. 399 с.
12. Кожевников Е.Н. Структура холестерического жидкого кристалла в ультразвуковом поле // Акуст. журн. 2001. Т. 47. Вып. 3. С. 553–557.
13. Кожевников Е.Н. Релаксационная природа доменной структуры в холестерическом жидком кристалле // Акуст. журн. 2002. Т. 48. Вып. 6. С. 777–787.
14. Гурова И.Н., Капустина О.А. Неустойчивость текстуры Гранжана холестерического жидкого кристалла в ультразвуковом поле // Акуст. журн. 1997. Т. 43. № 3. С. 338–343.
15. Кожевников Е.Н. Структурная релаксация нематических жидких кристаллов при распространении в них вязких волн // Акуст. журн. 1996. Т. 42. № 6. С. 800–805.
16. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Курс теоретической физики. VII. Теория упругости. М.: Наука. 1987. С. 235.

Structure of Acoustic Domains in a Cholesteric Liquid Crystal under the Effect of Ultrasound

E. N. Kozhevnikov

Samara State University, ul. Akademika Pavlova 1, Samara, 443011 Russia

e-mail: kozhev@ssu.samara.ru

Abstract—On the basis of the nonequilibrium hydrodynamics of a cholesteric liquid crystal (CLC), the properties of acoustic domains arising in a CLC layer under a normally incident ultrasonic wave are considered. The geometry and size of domains and the degree of deformation of the CLC structure are analyzed by the perturbation method for sound intensities exceeding the threshold value. Scaling dependences of the domain size and the deformation amplitude on the intensity of external action and the preliminary tension of the layer are plotted. It is shown that, as the effect advances beyond the threshold, the size of domains decreases.