

УДК 534.213

## РАССЕЯНИЕ ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ ВОЛН НА ПОВЕРХНОСТЯХ В СПЛОШНЫХ СРЕДАХ С УЧЕТОМ ПЕРЕОТРАЖЕНИЙ

© 2004 г. Н. В. Боев

Ростовский государственный университет  
344006 Ростов-на-Дону, ул. Большая садовая 105

E-mail: boyev@math.rsu.ru

Поступила в редакцию 21.04.2003 г.

Работа посвящена развитию лучевой теории дифракции применительно к произвольным (невыпуклым) гладким препятствиям в скалярном случае. Рассматривается трехмерная задача. Излагается асимптотический метод оценки дифракционных интегралов, основанный на методе многомерной стационарной фазы. Дифракционные интегралы получены на основе обобщения физической теории дифракции Кирхгофа. Получены явные формулы для давления в отраженной волне в случаях ее однократного и двукратного отражений.

Точное исследование рассеяния высокочастотных волн на поверхностях в сплошных средах сталкивается с существенными трудностями, если длина волны много меньше среднего размера препятствия [1]. Численные методы, такие как метод конечных элементов, метод граничных элементов, требуют в этом случае большого количества узлов на сетке. Это приводит к неустойчивости счета.

Для преодоления этой трудности были развиты различные асимптотические подходы, такие как геометрическая теория дифракционных лучей Келлера, теория Кирхгофа, ползущие волны и другие. Аналитические методы для рассматриваемого класса задач достаточно подробно изложены в монографиях [2–5].

Основное ограничение лучевых методов связано с тем, что они развиты в основном для выпуклых препятствий, поскольку только для таких объектов легко разделяются зоны “света” и “тени”.

Из недавних работ отметим [6], в которой применяется метод, основанный на аналитическом продолжении рассеянного поля, истоки которого восходят к работам Рэлея.

Дифракционная задача существенно усложняется, если граничная поверхность рассеивателя допускает переотражения волн. В принципе многократные переотражения могут быть исследованы в рамках лучевых переотражений, например, на основе геометрической теории дифракции (ГТД) Келлера. Однако нам неизвестны работы, в которых формулы для многократных переотражений были бы получены в явном виде. Известны лишь частные двумерные задачи [7], в которых для отражателей канонической формы выписаны результаты для случая двукратных переотражений.

Развиваемый в настоящей работе альтернативный метод, основанный на исследовании кратных дифракционных интегралов Кирхгофа методом многомерной стационарной фазы, позволяет выписать в едином явном виде амплитуду переотраженного волнового поля при произвольном числе переотражений от поверхности одного или нескольких рассеивателей [8]. Данная работа посвящена детальному исследованию частного случая двукратных отражений, который в данном методе является основой изучения задачи произвольного числа переотражений.

Остановимся вначале на изложении метода нахождения давления в отраженной волне в случае ее однократного отражения.

Пусть из точки  $x_0$  акустической среды на поверхность  $S$  препятствия падает сферическая высокочастотная монохроматическая волна. Одним из основных информативных параметров рассеянного поля является давление в отраженной волне в точке  $x$ . При этом, как известно, давление в отраженной волне определяется направлением падения волны и малой окрестностью точки зеркального отражения  $y^* \in S$ . Поэтому с ростом частоты давление в отраженной волне может быть получено в рамках лучевых представлений на основе метода стационарной фазы. Такой подход применен в плоской задаче [9, 10].

Если любой луч вида  $x_0 - y - x$  отражается от поверхности  $S$  ( $y \in S$ ) только один раз (рис. 1), тогда, согласно физической теории дифракции Кирхгофа, давление  $p(x)$  в отраженной волне определяется следующим интегралом [11]:

$$p(x) = \iint_S 2p^{inc}(y) \frac{\partial \Phi}{\partial n_y} dS, \quad (1)$$

если граница  $S$  препятствия является акустически твердой  $\partial p/\partial n|_S = 0$ . Здесь  $p^{inc}(y)$  – значение давления в падающей волне на границе  $S$ ,  $\Phi$  – потенциал фундаментального решения (функция Грина),  $n_y$  – внешняя нормаль к поверхности  $S$  в точке  $y$ ,  $k$  – волновое число,

$$p^{inc}(y) = |x_0 - y|^{-1} \exp(ik|x_0 - y|), \quad (2)$$

$$\Phi = (4\pi)^{-1} |x - y|^{-1} \exp(ik|x - y|).$$

При  $k \rightarrow \infty$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n_y} = ik \cos \gamma (4\pi)^{-1} |x - y|^{-1} \times \quad (3)$$

$$\times \exp(ik|x - y|) [1 + O(k^{-1})],$$

где  $\gamma$  – угол между нормалью  $n_y$  и направлением падения луча  $x_0 - y$ ,  $|x_0 - y|$  и  $|x - y|$  – расстояния между точками пространства  $x_0$  и  $y \in S$ ,  $x$  и  $y$  соответственно.

При падении луча из точки  $x_0$  на поверхности  $S$  имеется точка  $y^*$  пересечения ее с лучом, нормаль к поверхности в которой совместно с лучом падения определяют плоскость, в которой лежит и отраженный луч. Обозначим  $|x_0 - y^*| = L_0$ ,  $|x - y^*| = L$ . Таким образом, из (1)–(3) может быть получено следующее основное представление (после вынесения неосциллирующих функций за знак интеграла):

$$p(x) = \frac{ik \cos \gamma}{2\pi L_0 L} \iint_S \exp(ik\Phi) dS, \quad (4)$$

$$\Phi = |x_0 - y| + |x - y|.$$

Лучевое представление можно получить из (4), используя метод стационарной фазы [12]. При оценке интеграла (4) необходимо учитывать точки  $y$  из малой окрестности точки  $y^*$ . Отнесем малую окрестность точки  $y^* \in S$  к правой декартовой системе координат, определяемой нормалью и линиями кривизны поверхности в точке  $y^* \in S$ . Тогда произвольная точка  $y \in S$  из окрестности точки  $y^*$  будет иметь координаты  $y[\Delta s_1, \Delta s_2, -0.5(k_1(\Delta s_1)^2 + k_2(\Delta s_2)^2)]$ , где  $\Delta s_1, \Delta s_2$  – приращения дуг вдоль линий кривизны,  $k_1 = R_1^{-1}$  и  $k_2 = R_2^{-1}$  – главные кривизны, а  $R_1$  и  $R_2$  – главные радиусы кривизны поверхности  $S$  в точке  $y^* \in S$ ,  $k_1(\Delta s_1)^2 + k_2(\Delta s_2)^2$  – вторая квадратичная форма поверхности в точке  $y^*$  поверхности  $S$ , отнесенной к линиям кривизны.

Применим к треугольникам  $x_0 y^* y$  и  $x y^* y$  (рис. 1) теорему косинусов:

$$|x_0 - y|^2 = L_0^2 + |\Delta s|^2 - 2L_0 |\Delta s| \cos \angle x_0 y^* y, \quad (5)$$

$$|x - y|^2 = L^2 + |\Delta s|^2 - 2L |\Delta s| \cos \angle x y^* y.$$

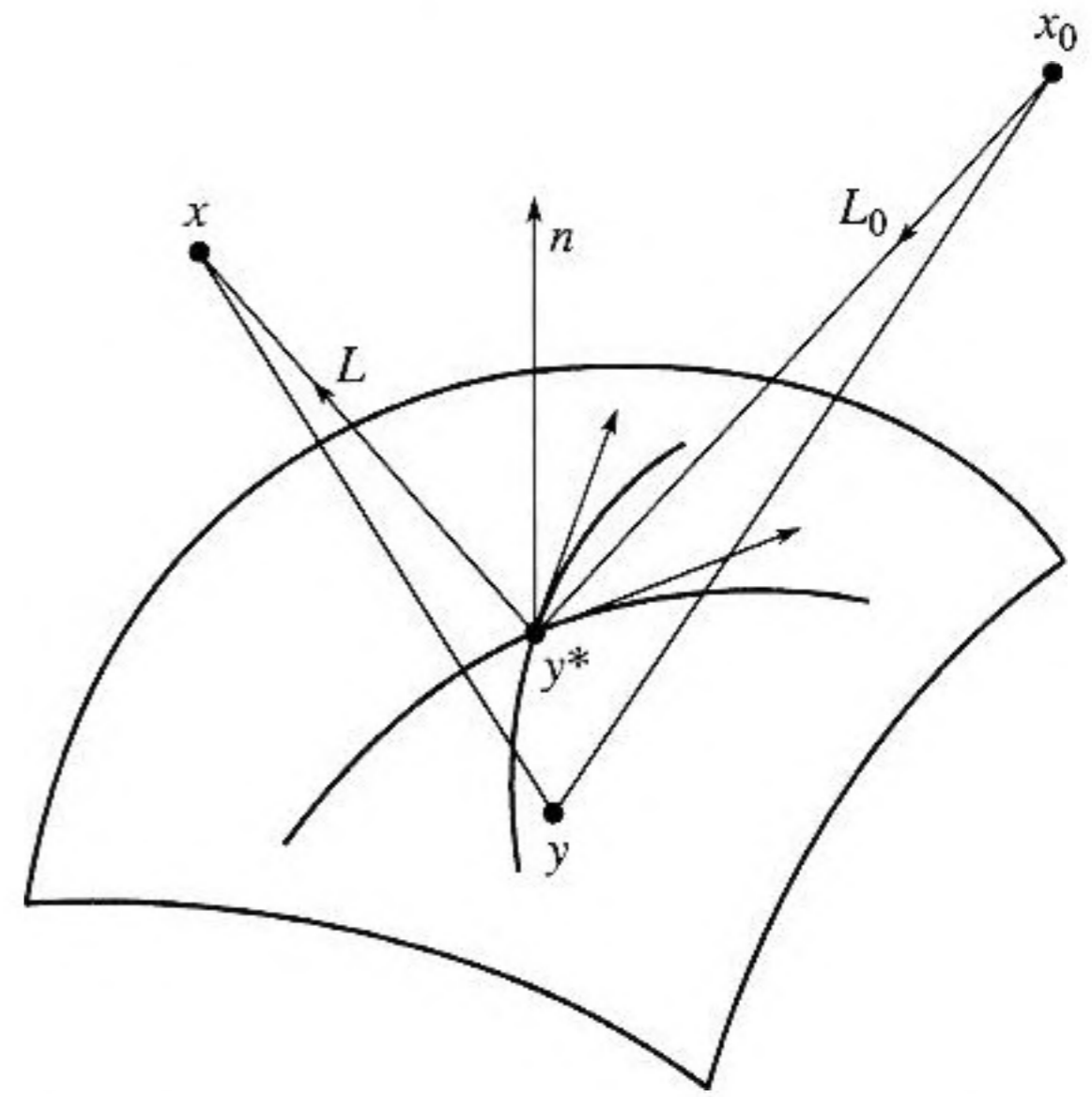


Рис. 1. Однократное отражение высокочастотной акустической волны от гладкого препятствия.

Из скалярных произведений векторов  $\{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$  – орт вектора  $y^* x_0$ ,  $\Delta s = \{\Delta s_1, \Delta s_2, -0.5[(k_1(\Delta s_1)^2 + k_2(\Delta s_2)^2)]\}$  и  $\{-\cos \alpha, -\cos \beta, \cos \gamma\}$  – орт вектора,  $y^* x$ ,  $\Delta s$  соответственно следует

$$|\Delta s| \cos \angle x_0 y^* y = \Delta s_1 \cos \alpha + \Delta s_2 \cos \beta +$$

$$+ 0.5(k_1(\Delta s_1)^2 + k_2(\Delta s_2)^2) \cos \gamma,$$

$$|\Delta s| \cos \angle x y^* y = -\Delta s_1 \cos \alpha - \Delta s_2 \cos \beta +$$

$$+ 0.5(k_1(\Delta s_1)^2 + k_2(\Delta s_2)^2) \cos \gamma.$$

Если пренебречь величинами, малыми по сравнению с  $(\Delta s_1)^2, \Delta s_1 \Delta s_2, (\Delta s_2)^2$ , то из формулы (5) следуют представления

$$|x_0 - y| = L_0 - \Delta s_1 \cos \alpha - \Delta s_2 \cos \beta +$$

$$+ 0.5(L_0^{-1} \sin^2 \alpha + k_1 \cos \gamma)(\Delta s_1)^2 -$$

$$- L_0^{-1} \cos \alpha \cos \beta \Delta s_1 \Delta s_2 +$$

$$+ 0.5(L_0^{-1} \sin^2 \beta + k_2 \cos \gamma)(\Delta s_2)^2,$$

$$|x - y| = L + \Delta s_1 \cos \alpha + \Delta s_2 \cos \beta +$$

$$+ 0.5(L^{-1} \sin^2 \alpha + k_1 \cos \gamma)(\Delta s_1)^2 -$$

$$- L^{-1} \cos \alpha \cos \beta \Delta s_1 \Delta s_2 +$$

$$+ 0.5(L^{-1} \sin^2 \beta + k_2 \cos \gamma)(\Delta s_2)^2.$$

Следовательно,

$$\varphi = L_0 + L + 0.5d_{11}(\Delta s_1)^2 + d_{12}\Delta s_1\Delta s_2 + 0.5d_{22}(\Delta s_2)^2,$$

$$d_{11} = (L_0^{-1} + L^{-1})\sin^2\alpha + 2k_1\cos\gamma;$$

$$d_{12} = -(L_0^{-1} + L^{-1})\cos\alpha\cos\beta,$$

$$d_{22} = (L_0^{-1} + L^{-1})\sin^2\beta + 2k_2\cos\gamma.$$

Отсутствие первых степеней  $\Delta s_1$ ,  $\Delta s_2$  в фазе  $\varphi$  говорит о том, что точка  $y^*$  прямого лучевого отражения соответствует стационарному значению фазы  $\varphi$ . Таким образом, главный член асимптотики интеграла (4) определяется коэффициента-

ми при  $(\Delta s_1)^2$ ,  $\Delta s_1\Delta s_2$ ,  $(\Delta s_2)^2$  и может быть получен из выражения (4) применением метода двумерной стационарной фазы [12].

$$p(x) = \cos\gamma \frac{\exp\left\{i\left[k(L_0 + L) + \frac{\pi}{4}(\delta_2 + 2)\right]\right\}}{L_0L\sqrt{|\det(D_2)|}},$$

где  $D_2$  – гессиан симметричной структуры ( $d_{ij} = d_{ji}$ ;  $i, j = 1, 2$ ), а  $\delta_2 = \text{sign} D_2$  – разность между числом положительных и отрицательных собственных значений матрицы  $D_2$ .

Окончательный результат, с учетом, что  $d_{21} = d_{12}$ , имеет вид:

$$p(x) = \frac{\exp\left\{i\left[k(L_0 + L) + \frac{\pi}{4}(\delta_2 + 2)\right]\right\}}{\sqrt{[(L_0 + L)^2 + 2L_0L(L_0 + L)(k_2\sin^2\alpha + k_1\sin^2\beta)\cos^{-1}\gamma + 4L_0^2L^2K]}}. \quad (6)$$

Здесь  $K = k_1k_2$  – гауссова кривизна поверхности  $S$  в точке  $y^*$ ,  $\{-\cos\alpha, -\cos\beta, -\cos\gamma\}$  – вектор, определяющий направление падения луча  $x_0 - y^*$  в выбранной системе координат.

Для формулы (6) выделим два предельных случая. Если  $k_1 = k_2 = 0$ , то из (6) следует известный результат для давления в отраженной от плоскости волне:  $p(x) = -(L_0 + L)^{-1}\exp[ik(L_0 + L)]$ .

В случае обратного рассеяния в дальнем поле (6) совпадает с представлением [11]:  $p(x) = 0.5iL_0^{-2}\sqrt{R_1R_2}\exp\left[i\left(2kL_0 + \frac{\pi}{4}\delta_2\right)\right]$ .

Формула (6) получена для случая, когда высокочастотная волна падает на выпуклую поверхность. Если волна падает на вогнутую поверхность, то главные кривизны  $k_1$  и  $k_2$  берутся отрицательными.

Формула для давления в один раз отраженной волне (6) от акустически твердой поверхности приведена в монографии [13]. В ней она получена на основе геометрической теории дифракции (ГТД) Келлера. Это означает, что главный член асимптотики дифракционного интеграла совпадает с расчетами давления в отраженной волне по ГТД. Вместе с тем, применение ГТД Келлера, основанной на использовании коэффициентов расходимости, уже в случае двукратного отражения волны является достаточно громоздким. Если исследовать задачу о переотражении высокочастотной волны от поверхности произвольного  $N$  числа раз, то, на наш взгляд, более удобно исходить из оценки  $2N$  кратного дифракционного ин-

теграла методом многомерной стационарной фазы. Основой исследования общего случая произвольного числа переотражений является задача о двукратном отражении, к рассмотрению которой и переходим.

Прямое использование приближения Кирхгофа в этом случае невозможно [4], так как оно не описывает многократно отраженных волн. Если в формулу Грина подставить в качестве  $p^{inc}(y)$  значения геометрооптического первичного поля, то приближение Кирхгофа дает лишь однократно отраженную волну. Двукратно отраженная волна получится лишь тогда, когда граничные значения  $p^{inc}(y)$  включают в себя и первичное поле, и его однократное отражение. Для решения задачи о двукратном переотражении будем исходить из модификации приближения Кирхгофа [4]. Двукратно отраженные волны будем находить интегрированием по окрестности  $S_2$  второй точки зеркального отражения  $y_2^*$ , лучей, полученных при однократном отражении от окрестности  $S_1$  первой точки зеркального отражения  $y_1^*$ . Такая модификация означает, что при нахождении главного члена асимптотики четырехкратного дифракционного интеграла мы будем находиться в рамках расчета амплитуды давления в двукратно отраженной волне по ГТД.

Рассмотрим повторное отражение луча  $x_0 - y_1^* - y_2^* - x_3$ , излучающегося из точки  $x_0$  и принимающегося в точке  $x_3$  (рис. 2). При этом точки  $y_1^*$  и  $y_2^*$  могут принадлежать как одной поверхности, так

и разным двум. Давление в точке приема  $p(x_3)$  дается формулой

$$p(x_3) = \iint_{S_2} 2p(y_2) \frac{\partial \Phi}{\partial n_2} dS_2.$$

Здесь  $p(y_2)$  – давление в падающей волне в точке  $y_2 \in S_2$  окрестности точки  $y_2^*$ , которое определяется после первого отражения на окрестности  $S_1$  точки  $y_1^*$ .

В то же время давление  $p(y_2)$  само выражается подобной формулой:

$$p(y_2) = \iint_{S_1} 2p^{inc}(y_1) \frac{\partial \Phi}{\partial n_1} dS_1.$$

Принимая во внимание, что

$$p^{inc}(y_1) = |x_0 - y_1|^{-1} \exp(ik|x_0 - y_1|)$$

определяет падающее поле, соответствующее точечному источнику  $x_0$ , можно выписать следующее основное представление:

$$p(x_3) = -\left(\frac{k}{2\pi}\right)^2 \frac{\cos \gamma_1 \cos \gamma_2}{L_0 L_1 L_2} \iiint_{S_2} \iiint_{S_1} e^{ik\varphi} dS_1 dS_2, \quad (7)$$

$$\varphi = |x_0 - y_1| + |y_1 - y_2| + |y_2 - x_3|, \quad (8)$$

$$|x_0 - y_1^*| = L_0, \quad |y_1^* - y_2^*| = L_1, \quad |y_2^* - x_3| = L_2.$$

Так же, как и в случае однократного отражения, в точках прямого зеркального отражения  $y_1^* \in S_1$  и  $y_2^* \in S_2$  окрестности этих точек отнесем к правым декартовым системам координат, определяемым нормальными  $n_1$  и  $n_2$  и линиями кривизны. Вдоль линий кривизны будем отсчитывать длины дуг  $\Delta s_1^{(1)}$  и  $\Delta s_2^{(1)}$  в окрестности  $S_1$  точки  $y_1^*$  и  $\Delta s_1^{(2)}$  и  $\Delta s_2^{(2)}$  в окрестности  $S_2$  точки  $y_2^*$ . Так же, как и ранее, для малых  $\Delta s_1^{(i)}, \Delta s_2^{(i)}$  ( $i = 1, 2$ )

$$\begin{aligned} |x_0 - y_1| &= L_0 - \Delta s_1^{(1)} \cos \alpha_1 - \Delta s_2^{(1)} \cos \beta_1 + \\ &+ 0.5(L_0^{-1} \sin^2 \alpha_1 + k_1^{(1)} \cos \gamma_1)(\Delta s_1^{(1)})^2 - \\ &- L_0^{-1} \cos \alpha_1 \cos \beta_1 \Delta s_1^{(1)} \Delta s_2^{(1)} + \\ &+ 0.5(L_0^{-1} \sin^2 \beta_1 + k_2^{(1)} \cos \gamma_1)(\Delta s_2^{(1)})^2, \\ |y_2 - x_3| &= L_2 - \Delta s_1^{(2)} \cos \alpha_2 + \Delta s_2^{(2)} \cos \beta_2 + \\ &+ 0.5(L_2^{-1} \sin^2 \alpha_2 + k_1^{(2)} \cos \gamma_2)(\Delta s_1^{(2)})^2 - \\ &- L_2^{-1} \cos \alpha_2 \cos \beta_2 \Delta s_1^{(2)} \Delta s_2^{(2)} + \\ &+ 0.5(L_2^{-1} \sin^2 \beta_2 + k_2^{(2)} \cos \gamma_2)(\Delta s_2^{(2)})^2. \end{aligned}$$

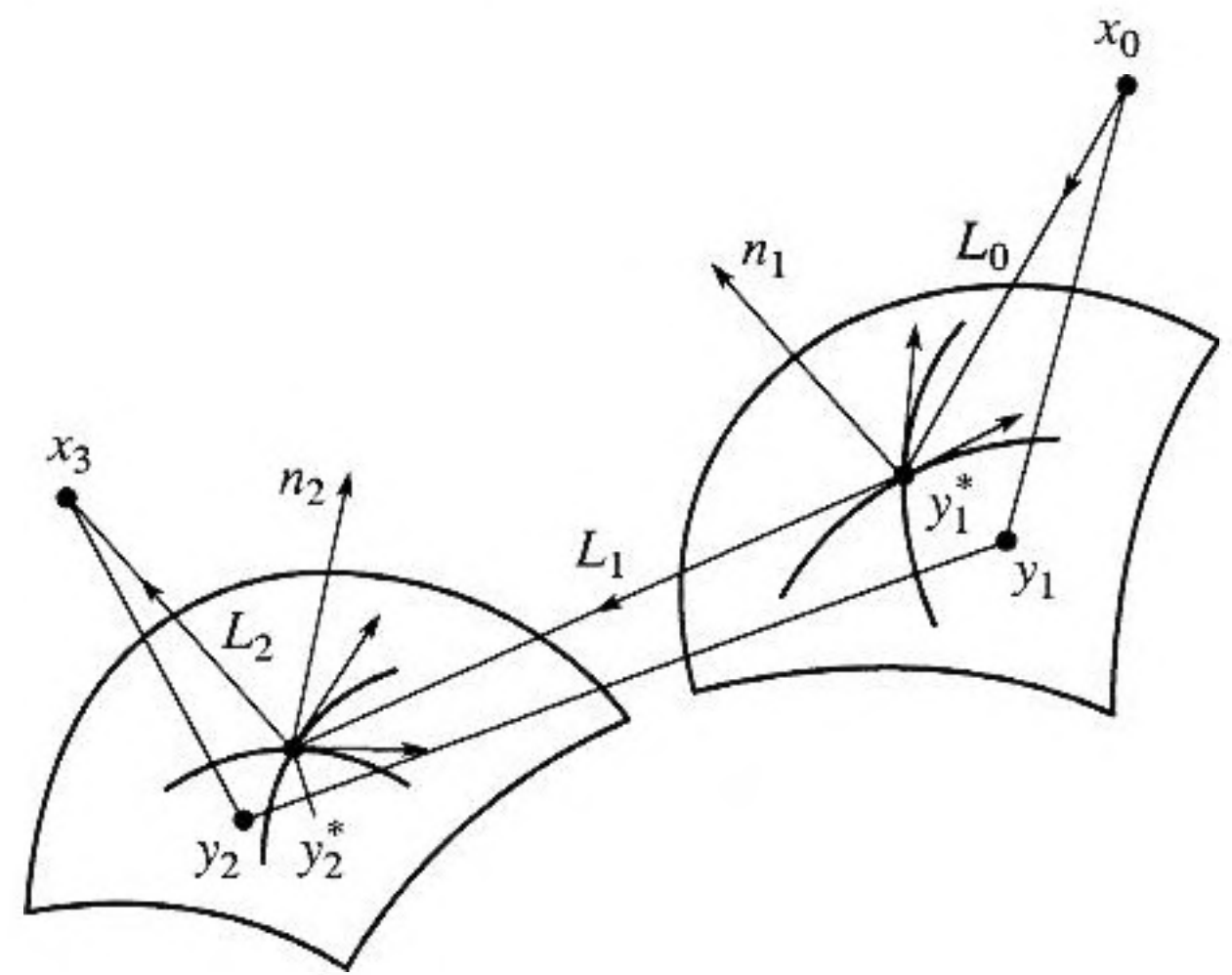


Рис. 2. Двукратное отражение высокочастотной акустической волны от гладких препятствий.

Найдем слагаемое  $|y_1 - y_2| = |y_2 y_1|$  в фазе (8). Это расстояние рассмотрим в системе координат, связанной с точкой  $y_2^*$ . В этой системе координат обозначим координаты точек  $y_2(\xi_2, \eta_2, \zeta_2)$ ,  $y_1(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$ ,  $y_1^*(\xi_1^0, \eta_1^0, \zeta_1^0)$ . С учетом этого вектор  $y_2 y_1$  представим в виде:

$$y_2 y_1 = y_2^* y_1^* + A y_1^* y_1 - y_2^* y_2,$$

$$y_2 y_1 = \{\xi_1 - \xi_2, \eta_1 - \eta_2, \zeta_1 - \zeta_2\};$$

$$y_2^* y_1^* = \{\xi_1^0, \eta_1^0, \zeta_1^0\},$$

$$y_i^* y_i = \{\Delta s_1^{(i)}, \Delta s_2^{(i)}, -0.5(k_1^{(i)}(\Delta s_1^{(i)})^2 + k_2^{(i)}(\Delta s_2^{(i)})^2)\},$$

$$i = 1, 2.$$

Здесь матрица  $A = (a_{ij}), i, j = 1, 2, 3$  – ортогональная матрица перехода от базиса декартовой системы координат в точке  $y_2^*$  к базису декартовой системы координат в точке  $y_1^*$ .

Заметим, что повторный интеграл в формуле (7) определяется только расстояниями  $|x_0 - y_1|$ ,  $|y_1 - y_2|$ ,  $|y_2 - x_3|$  и формами поверхностей  $S_1$  и  $S_2$  и не зависит от вращения их с сохранением взаимного расположения  $S_1$  и точки  $x_0$ ,  $S_2$  и точки  $x_3$  вокруг луча  $y_1^* - y_2^*$ . В связи с этим в случае двукратного отражения луча  $x_0 - y_1^* - y_2^* - x_3$  при вращении поверхностей  $S_1$  и  $S_2$  с плоскостями, образованными нормалью  $n_1$ , лучом  $x_0 - y_1^*$  и  $n_2$ , лучом  $y_2^* - x_3$ , соответственно как твердое целое вокруг луча  $y_1^* - y_2^*$  давление  $p(x_3)$  в точке  $x_3$  будет оставаться неизменным. В дальнейшем рассмот-

рим давление  $p(x_3)$  при расположении луча  $x_0 - y_1^* - y_2^* - x_3$  в одной плоскости.

В этом случае элементы  $a_{ij}$  ортогональной матрицы имеют вид:

$$\begin{Bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{Bmatrix} = G_{12}^{-1} \left[ \cos \beta_1 \begin{Bmatrix} \cos \beta_2 \\ -\cos \alpha_2 \end{Bmatrix} - \cos \alpha_1 \begin{Bmatrix} \cos \alpha_2 \\ \cos \beta_2 \end{Bmatrix} \cos(\gamma_1 + \gamma_2) \right]$$

$$\begin{Bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{Bmatrix} = G_{12}^{-1} \left[ \cos \alpha_1 \begin{Bmatrix} -\cos \beta_2 \\ \cos \alpha_2 \end{Bmatrix} - \cos \beta_1 \begin{Bmatrix} \cos \alpha_2 \\ \cos \beta_2 \end{Bmatrix} \cos(\gamma_1 + \gamma_2) \right]$$

$$\begin{Bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\cos \alpha_2 \\ -\cos \beta_2 \end{Bmatrix} \frac{\sin(\gamma_1 + \gamma_2)}{\sin \gamma_2}$$

$$\begin{Bmatrix} a_{31} \\ a_{32} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos \alpha_1 \\ \cos \beta_1 \end{Bmatrix} \frac{\sin(\gamma_1 + \gamma_2)}{\sin \gamma_1}$$

$$a_{33} = -\cos(\gamma_1 + \gamma_2), \quad G_{12} = \sin \gamma_1 \sin \gamma_2.$$

С учетом свойств ортогональной матрицы, а также соотношений

$$\begin{aligned} a_{11} \xi_1^0 + a_{21} \eta_1^0 + a_{31} \zeta_1^0 &= \\ &= L_1 (a_{11} \cos \alpha_2 + a_{21} \cos \beta_2 + a_{31} \cos \gamma_2) = \\ &= L_1 \cos \alpha_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{12} \xi_1^0 + a_{22} \eta_1^0 + a_{32} \zeta_1^0 &= \\ &= L_1 (a_{12} \cos \alpha_2 + a_{22} \cos \beta_2 + a_{32} \cos \gamma_2) = \\ &= L_1 \cos \beta_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{13} \xi_1^0 + a_{23} \eta_1^0 + a_{33} \zeta_1^0 &= \\ &= L_1 (a_{13} \cos \alpha_2 + a_{23} \cos \beta_2 + a_{33} \cos \gamma_2) = \\ &= -L_1 \cos \gamma_1 \end{aligned}$$

слагаемое  $|y_1 - y_2|$  в фазе  $\varphi$  (8) приводится к виду

$$\begin{aligned} |y_1 - y_2| &= L_1 + \sum_{i=1}^2 \left[ (-1)^{i+1} \{ \Delta s_1^{(i)} \cos \alpha_i + \right. \\ &\quad \left. + \Delta s_2^{(i)} \cos \beta_i + b_i (\Delta s_1^{(i)})^2 + c_i (\Delta s_2^{(i)})^2 \} - \right. \\ &\quad \left. - L_1^{-1} \cos \alpha_i \cos \beta_i \Delta s_1^{(i)} \Delta s_2^{(i)} + \sum_{j=1}^2 m_{ij} \Delta s_i^{(1)} \Delta s_j^{(2)} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{Bmatrix} b_1 \\ c_1 \end{Bmatrix} = 0.5 \left[ L_1^{-1} \begin{Bmatrix} \sin^2 \alpha_1 \\ \sin^2 \beta_1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} k_1^{(1)} \\ k_2^{(1)} \end{Bmatrix} \cos \gamma_1 \right],$$

$$\begin{Bmatrix} b_2 \\ c_2 \end{Bmatrix} = 0.5 \left[ L_1^{-1} \begin{Bmatrix} \cos^2 \alpha_2 \\ \cos^2 \beta_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} k_1^{(2)} \\ k_2^{(2)} \end{Bmatrix} \cos \gamma_2 \right],$$

$$\begin{Bmatrix} m_{11} \\ m_{12} \end{Bmatrix} = (L_1 G_{12})^{-1} \left[ \cos \beta_1 \begin{Bmatrix} \cos \beta_2 \\ -\cos \alpha_2 \end{Bmatrix} - \cos \alpha_1 \begin{Bmatrix} \cos \alpha_2 \\ \cos \beta_2 \end{Bmatrix} Q_{12} \right],$$

$$\begin{Bmatrix} m_{21} \\ m_{22} \end{Bmatrix} = -(L_1 G_{12})^{-1} \left[ \cos \alpha_1 \begin{Bmatrix} \cos \beta_2 \\ -\cos \alpha_2 \end{Bmatrix} + \cos \beta_1 \begin{Bmatrix} \cos \alpha_2 \\ \cos \beta_2 \end{Bmatrix} Q_{12} \right],$$

$$Q_{12} = \cos \gamma_1 \cos \gamma_2.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \varphi &= |x_0 - y_1| + |y_1 - y_2| + |y_2 - x_3| = \\ &= L_0 + L_1 + L_2 + 0.5 d_{11} (\Delta s_1^{(1)})^2 + d_{12} \Delta s_1^{(1)} \Delta s_2^{(1)} + \\ &+ d_{13} \Delta s_1^{(1)} \Delta s_1^{(2)} + d_{14} \Delta s_1^{(1)} \Delta s_2^{(2)} + 0.5 d_{22} (\Delta s_2^{(1)})^2 + \\ &+ d_{23} \Delta s_2^{(1)} \Delta s_1^{(2)} + d_{24} \Delta s_2^{(1)} \Delta s_2^{(2)} + 0.5 d_{33} (\Delta s_1^{(2)})^2 + \\ &+ d_{34} \Delta s_1^{(2)} \Delta s_2^{(2)} + 0.5 d_{44} (\Delta s_2^{(2)})^2, \end{aligned}$$

где

$$\begin{Bmatrix} d_{11} \\ d_{22} \end{Bmatrix} = (L_0^{-1} + L_1^{-1}) \begin{Bmatrix} \sin^2 \alpha_1 \\ \sin^2 \beta_1 \end{Bmatrix} + 2 \begin{Bmatrix} k_1^{(1)} \\ k_2^{(1)} \end{Bmatrix} \cos \gamma_1,$$

$$\begin{Bmatrix} d_{33} \\ d_{44} \end{Bmatrix} = (L_1^{-1} + L_2^{-1}) \begin{Bmatrix} \sin^2 \alpha_2 \\ \sin^2 \beta_2 \end{Bmatrix} + 2 \begin{Bmatrix} k_1^{(2)} \\ k_2^{(2)} \end{Bmatrix} \cos \gamma_2,$$

$$d_{12} = -(L_0^{-1} + L_1^{-1}) \cos \alpha_1 \cos \beta_1, \quad (9)$$

$$d_{34} = -(L_1^{-1} + L_2^{-1}) \cos \alpha_2 \cos \beta_2$$

$$d_{13} = m_{11}, \quad d_{14} = m_{12}, \quad d_{23} = m_{21}, \quad d_{24} = m_{22}.$$

Отсутствие в фазе  $\varphi$  слагаемых с первыми степенями  $\Delta s_j^{(i)}$  ( $i, j = 1, 2$ ) показывает, что точки  $y_1^* \in S_1, y_2^* \in S_2$  прямого лучевого отражения соответствуют стационарному значению фазы  $\varphi$  (8).

Окончательный результат может быть получен из выражения (7) применением метода стационарной фазы [6]:

$$p(x_3) = B \frac{\exp\left\{i\left[k(L_0 + L_1 + L_2) + \frac{\pi}{4}(\delta_4 + 4)\right]\right\}}{L_0 L_1 L_2 \sqrt{|\det(D_4)|}}, \quad (10)$$

где  $B = \cos\gamma_1 \cos\gamma_2$ ,  $D_4 = (d_{ij})$ ,  $i, j = 1, 2, 3, 4$  – гессин симметричной структуры и его элементы  $d_{ij}$ ,  $i \leq j$  приведены в формуле (9). Здесь  $\delta_4 = \text{sign } D_4$  – разность между числом положительных и отрицательных собственных значений матрицы  $D_4$ .

Полученные явные выражения (6), (10) показывают, что давление  $p(x)$  в отраженной волне определяется главными кривизнами, гауссовой кривизной поверхности в точках зеркального отражения, расстояниями между точками зеркального отражения, их удалением от источника волн и точки приема отраженной волны, а также направлениями падающих волн.

Разработанный метод является асимптотическим. Формулы для расчета амплитуды один раз отраженной волны (6) и двукратно переотраженной волны (10) справедливы при  $kd \gg 1$ ,  $kR_2^{(m)} \gg 1$ ,  $kR_1^{(m)} \gg 1$ , где  $d$  – характерный размер рассеивателя,  $R_1^{(m)}$ ,  $R_2^{(m)}$  ( $m = 1, 2$ ) – главные радиусы кривизны поверхности в точках зеркального отражения  $y_1^*$  и  $y_2^*$ .

Изложенный метод открывает перспективы нахождения выражения в замкнутом виде лучевой амплитуды с произвольным числом переотражений для акустических и упругих волн.

Автор выражает благодарность профессору М.А. Сумбатяну и профессору Ю.А. Устинову за внимание к работе и полезное обсуждение результатов исследования.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ по поддержке ведущей научной школы № НШ – 2113. 2003. 1

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бабич В.М., Булдырев В.С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. М.: Наука, 1972. 456 с.
2. Хенл Х., Мауэ А., Вестпфаль К. Теория дифракции. М.: Мир, 1964. 543 с.
3. Кравцов Ю.А., Орлов Ю.И. Геометрическая оптика неоднородных сред. М.: Наука, 1980. 421 с.
4. Боровиков В.А., Кинбер Б.Е. Геометрическая теория дифракции. М.: Связь, 1978. 248 с.
5. Uslenghi P.L. Theory of the Scattering Waves. N.Y.: Acad. Press., 1978. 514 p.
6. До Дык Тханг, Кюркчан А. Г. Эффективный метод решения задач дифракции волн на рассеивателях, имеющих изломы границы // Акуст. журн. 2003. Т. 49. № 1. С. 51–58.
7. Штагер Е.А. Рассеяние радиоволн на телах сложной формы. М.: Радио и связь, 1986. 184 с.
8. Боев Н.В., Сумбатян М.А. Коротковолновая дифракция на телах, ограниченных произвольной гладкой поверхностью // Доклады РАН. 2003. Т. 392. № 5. С. 614–617.
9. Дружинина И.Д., Сумбатян М.А. Коротковолновая дифракция на телах с произвольной гладкой границей в двумерном случае // Акуст. журн., 1992. Т. 38. Вып. 3. С. 470–476.
10. Sumbatyan M.A., Boyev N.V. High-frequency diffraction by nonconvex obstacles // J. Acoust. Soc. Amer. 1995. № 5. Pt. 1. P. 2346 – 2353.
11. Шендеров Е.Л. Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. 352 с.
12. Федорюк М.В. Метод перевала. М.: Наука, 1977. 368 с.
13. McNamara D.A.M., Pistorius C.W.I., Malherbe J.A.G. Introduction to the uniform geometrical theory of diffraction. Norwood: Artech House. 1990. 372 p.

## Scattering of High-Frequency Waves by Surfaces in Continuous Media with Allowance for Rereflections

N. V. Boev

Rostov State University, Bol'shaya Sadovaya ul. 105, Rostov-on-Don, 344006 Russia

e-mail: boyev@math.rsu.ru

**Abstract**—The study is devoted to the development of the ray theory of diffraction in application to arbitrary (nonconvex) smooth obstacles in the scalar case. A three-dimensional problem is considered. An asymptotic method of estimating the diffraction integrals is described. The method is based on the multidimensional stationary phase approach. The diffraction integrals are obtained on the basis of the generalization of the Kirchhoff physical theory of diffraction. Explicit expressions are derived for the pressure in the reflected wave in the cases of its single and double reflections.