

УДК 534.2

ДИСПЕРСИЯ ВОЛН В ПЛОСКОМ АКУСТИЧЕСКОМ СЛОЕ С ГИБКИМИ УПРУГИМИ СТЕНКАМИ

© 2004 г. Ю. Д. Каплунов*, И. В. Кириллова**, Ю. А. Постнова**

*Институт проблем механики РАН
117526 Москва, пр. Вернадского 101-1
E-mail: golden@ipmnet.ru

**Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
410026 Саратов, ул. Астраханская 83
E-mail: postnova_ja@mail.ru

Поступила в редакцию 18.02.2004 г.

Рассматривается плоский акустический слой, ограниченный упругими мембранами. Выводятся дисперсионные соотношения для симметричных и антисимметричных волн. Изучается предельное поведение дисперсионных кривых при стремлении волнового числа к нулю и бесконечности. С помощью полученных асимптотических формул конструируются двухточечные Паде-аппроксимации. Приводятся соотношения ортогональности для собственных мод.

Многочисленные работы, посвященные изучению трансцендентных уравнений Рэля-Лэмба для плоского упругого слоя (см., например, [1, 2]), сформировали современную методологию дисперсионного анализа в случае линейных волноводов. Она, в частности, предполагает рассмотрение предельного поведения дисперсионных кривых при различных соотношениях между волновым числом и круговой частотой. Соответствующие асимптотические зависимости дают важную исходную информацию при построении универсальных приближенных моделей в динамике пластин и оболочек [3].

В публикуемой статье качественный подход, разработанный для уравнения Рэля-Лэмба, развивается применительно к исследованию дисперсии волн в плоском акустическом слое, ограниченном упругими мембранами. Волновод с такими свойствами представляет интерес для моделирования ряда инженерных и биологических гидроупругих систем с гибкими стенками. При этом следует отметить, что уравнения движения мембраны являются низкочастотным асимптотическим приближением пространственных уравнений теории упругости для предварительно напряженного тела [4].

Ниже выводятся асимптотические формулы для корней полученного дисперсионного уравнения в окрестности нулевой частоты и частот запирания, а также при стремлении волнового числа к бесконечности. С их помощью определяются асимптотические законы распределения акустического давления по толщине слоя. Помимо этого выписываются двухточечные Паде-аппроксимации для дисперсионных кривых, переходящие в

пределе в традиционные длинноволновые и коротковолновые приближения. Эффективность приближенных формул демонстрируется путем сравнения с численным решением исходного дисперсионного уравнения. Дисперсионный анализ завершается выводом условий ортогональности для мод колебаний, которые в определенном смысле аналогичны условиям ортогональности для волн Лэмба в плоском упругом слое (см., например, [5]).

1. ДИСПЕРСИОННЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Рассмотрим плоский акустический слой с гибкими стенками – мембранами, находящимися на расстоянии $2H$ друг от друга (рис. 1). Уравнения движения для мембран и акустической среды запишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \pm \frac{p}{c^2 \rho h} &= 0, \\ \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где x и y – продольная и поперечная координаты, t – время, c – скорость упругой волны в мембране, c_0 – скорость распространения звука в акустической среде, h – толщина мембран, ρ – плотность материала мембран, ρ_0 – плотность среды, w и v – смещение мембран и среды, p – акустическое давление; знак плюс (минус) в первом уравнении со-

ответствует верхней (нижней) мембране (см. рис. 1). Условие непротекания через мембраны выглядит как

$$v|_{y=\pm H} = w. \quad (1.2)$$

Введем безразмерные переменные и неизвестные по формулам

$$[\xi, \zeta, \tau] = [x, y, c_0 t]/H, \quad (1.3)$$

$$[w, v] = H[w^*, v^*], \quad p = c_0^2 \rho_0 p^*.$$

При этом звездочка в дальнейшем будет опускаться.

В результате прямой подстановки соотношений (1.3) система уравнений (1.1) принимает безразмерную форму

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} \pm \kappa p &= 0, \\ \frac{\partial^2 p}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial \zeta^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} &= -\frac{\partial p}{\partial \zeta}, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где $\kappa = \frac{H\rho_0}{h\rho}$, $\varepsilon = \frac{c}{c_0}$.

Рассмотрим распространение гармонической волны с безразмерными частотой ω и волновым числом χ . Будем искать решение в форме

$$[w, v, p] = [W, V(\zeta), P(\zeta)] \exp[i(\omega\tau - \chi\xi)]. \quad (1.5)$$

Тогда система уравнений (1.4) примет вид

$$\begin{aligned} W &= \pm \frac{\kappa P}{\varepsilon^2 \chi^2 - \omega^2}, \\ \frac{d^2 P}{d\zeta^2} + (\omega^2 - \chi^2)P &= 0, \\ \frac{dP}{d\zeta} &= \omega^2 W. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Для симметричных мод колебаний ($P(\zeta)$ – четная функция) решение краевой задачи (1.6), (1.2) задается формулами

$$P(\zeta) = \frac{\omega^2 \operatorname{ch}(\beta\zeta)}{\beta \operatorname{sh}\beta} W, \quad V(\zeta) = \frac{\operatorname{sh}(\beta\zeta)}{\operatorname{sh}\beta} W, \quad (1.7)$$

при $\alpha^2 = \varepsilon^2 \chi^2 - \omega^2$, $\beta^2 = \chi^2 - \omega^2$, где ω и χ удовлетворяют дисперсионному уравнению

$$\frac{\alpha^2 \beta^2 \operatorname{th}(\beta)}{\omega^2 \beta} = \kappa. \quad (1.8)$$

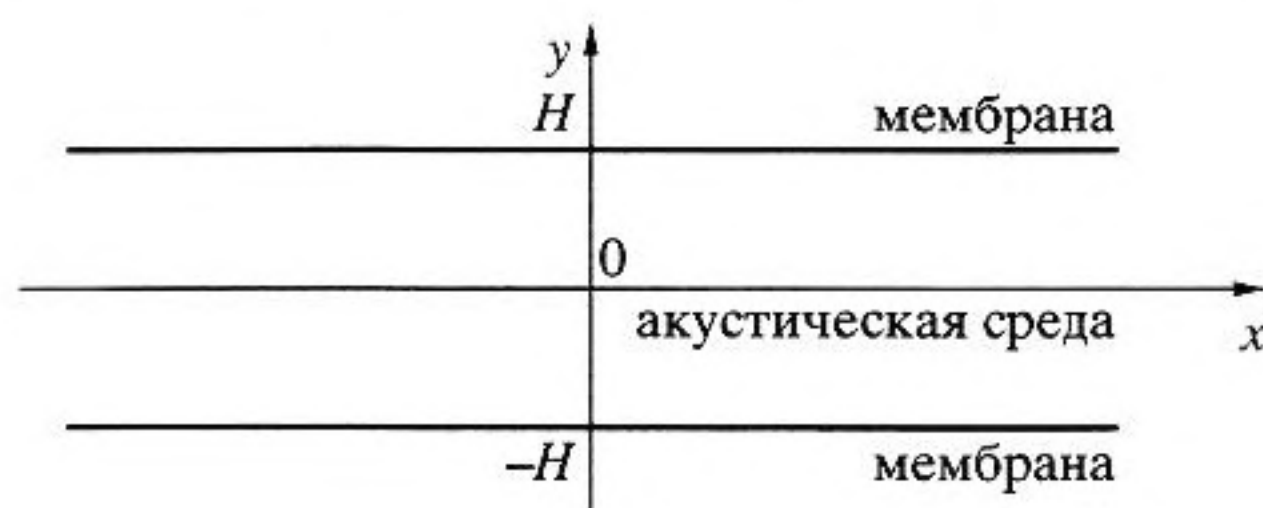


Рис. 1. Геометрия задачи.

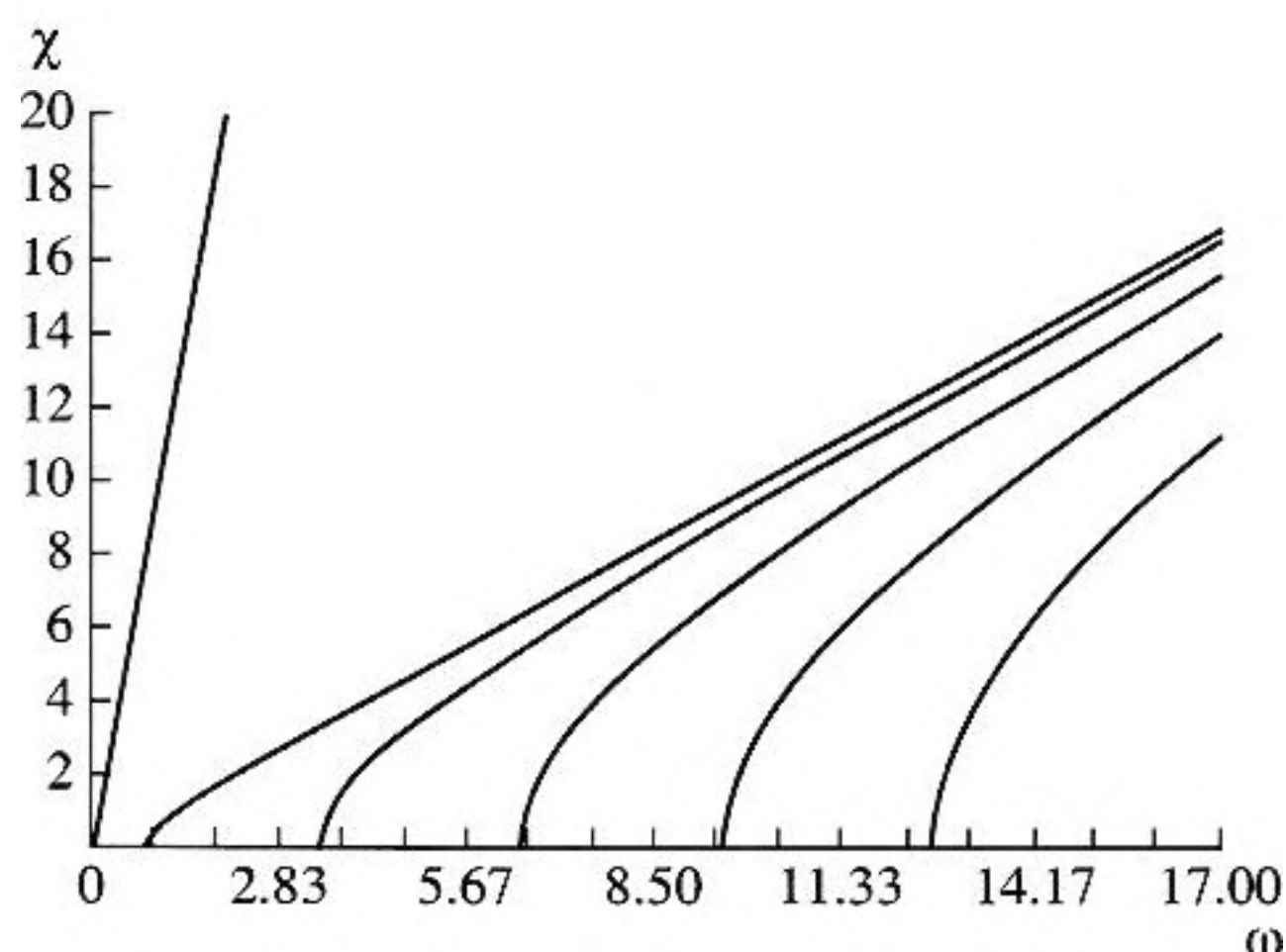


Рис. 2. Дисперсионные кривые для симметричного случая.

В антисимметричном случае (амплитуда $P(\zeta)$ – нечетная функция) имеем

$$P(\zeta) = \frac{\omega^2 \operatorname{sh}(\beta\zeta)}{\beta \operatorname{ch}\beta} W, \quad V(\zeta) = \frac{\operatorname{ch}(\beta\zeta)}{\operatorname{ch}\beta} W \quad (1.9)$$

при выполнении дисперсионного уравнения

$$\frac{\alpha^2 \beta^2 \operatorname{cth}(\beta)}{\omega^2 \beta} = \kappa. \quad (1.10)$$

На рис. 2, 3 представлены графики фундаментальных мод и мод высших порядков для симметричного и антисимметричного случаев при $\varepsilon = 0.1$ и $\kappa = 1$.

2. АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Изучим предельное поведение дисперсионных кривых при стремлении волнового числа к нулю и к бесконечности. Производя обычным образом разложения по степеням χ при $\chi \rightarrow 0$ в уравнениях (1.8) и (1.10), получим длинноволновую асимптотику фундаментальной моды. Она имеет вид в симметричном случае

$$\omega = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\kappa}} \chi^2 + O(\chi^4), \quad (2.1)$$

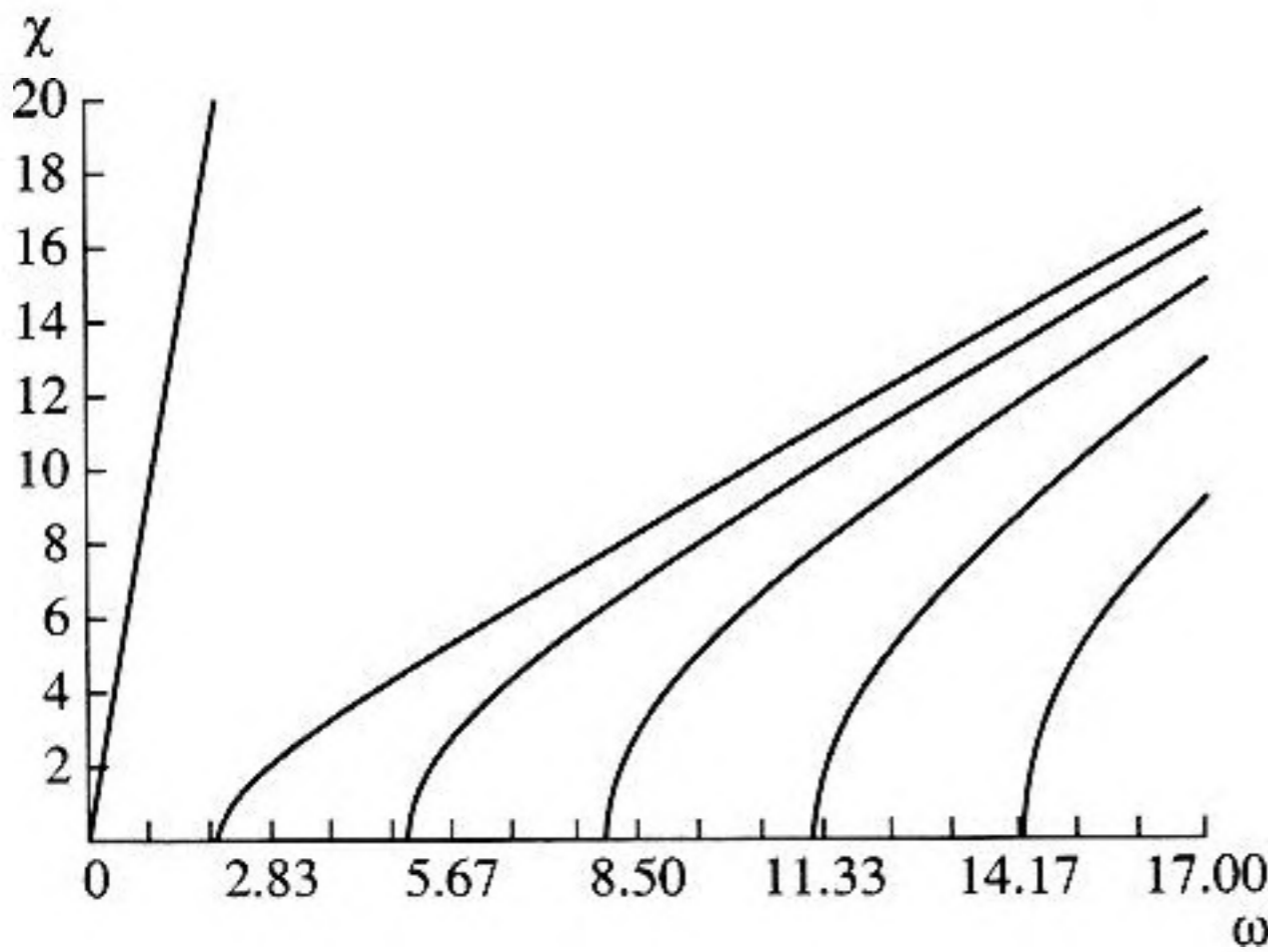


Рис. 3. Дисперсионные кривые для антисимметричного случая.

в антисимметричном случае

$$\omega = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1+\kappa}}\chi + O(\chi^3). \quad (2.2)$$

При стремлении волнового числа к бесконечности симметричная и антисимметричная фундаментальные моды переходят в поверхностную волну, предельная скорость распространения которой совпадает со скоростью c волн в мембране. Заменяя единицей гиперболические тангенс и котангенс в уравнениях (1.8) и (1.10) и полагая $\alpha^2 \sim \omega$, приходим к асимптотической формуле

$$\omega = -\frac{\kappa\varepsilon}{2\sqrt{1-\varepsilon^2}} + \varepsilon\chi + O\left(\frac{1}{\chi}\right), \quad (\chi \gg 1). \quad (2.3)$$

При $\chi = 0$ дисперсионные уравнения (1.8) и (1.10) дают уравнения для частот запираания $b_n, n = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} b_n \operatorname{tg}(b_n) &= \kappa; & b_n &\approx \pi(n-1), & n &\gg 1, \\ b_n \operatorname{ctg}(b_n) &= -\kappa; & b_n &\approx -\frac{\pi}{2} + \pi n, & n &\gg 1. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Соответствующие высокочастотные длинноволновые асимптотики имеют вид

$$\omega = b_n + \frac{A_n}{b_n}\chi^2 + O(\chi^4), \quad (2.5)$$

где

$$A_n = \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon\kappa}{b_n^2 + \kappa^2 + \kappa}. \quad (2.6)$$

В отличие от фундаментальных мод фазовая скорость мод высших порядков стремится на бесконечности к скорости c_0 объемных волн в акустической среде. Асимптотическое поведение этих мод при $\chi \rightarrow \infty$ ищем в форме

$$\omega = \chi + \frac{C_n}{\chi} + O\left(\frac{1}{\chi^2}\right). \quad (2.7)$$

Подстановка разложения (2.7) в дисперсионные соотношения (1.8) и (1.10) дает уравнения для C_n

$$\begin{aligned} \sqrt{2C_n} \operatorname{tg} \sqrt{2C_n} &= \frac{\kappa}{1-\varepsilon^2}; & C_n &\approx \frac{1}{2}\pi^2(n-1)^2, & n &\gg 1, \\ \sqrt{2C_n} \operatorname{ctg} \sqrt{2C_n} &= -\frac{\kappa}{1-\varepsilon^2}; & & & & \\ C_n &\approx \frac{\pi^2}{8}(2n-1)^2, & n &\gg 1. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Метод двухточечных Паде-аппроксимаций (см., например, [6]) позволяет преобразовать полученные асимптотики в дробно-рациональные формулы, обладающие заданным предельным поведением в нуле и на бесконечности. Они, например, могут быть представлены в виде: для симметричной фундаментальной моды

$$\omega = \frac{\frac{\varepsilon}{\sqrt{\kappa}}\chi^2 - \frac{\kappa\varepsilon}{2\sqrt{1-\varepsilon^2}}\chi^3 + \varepsilon\chi^4}{1 + \chi^3}, \quad (2.9)$$

для антисимметричной фундаментальной моды

$$\omega = \frac{\frac{\varepsilon}{\sqrt{1+\kappa}}\chi - \frac{\kappa\varepsilon}{2\sqrt{1-\varepsilon^2}}\chi^2 + \varepsilon\chi^3}{1 + \chi^2}, \quad (2.10)$$

для мод высших порядков

$$\omega = \frac{b_n + \frac{A_n}{b_n}\chi^2 + C_n\chi^4 + \chi^6}{1 + \chi^5}. \quad (2.11)$$

На рис. 4, 5 изображены графики точного решения для фундаментальных мод и их асимптотик показывают, что качество Паде-аппроксимаций ухудшается с ростом номера моды n , что связано с возрастанием коэффициента C_n в формуле (2.11) позволяющие оценить поведение корней дисперсионного уравнения в окрестности частот запираания (2.1, 2.2) и при больших значениях волнового числа (2.3), а также соответствующие Паде-аппроксимации (2.9, 2.10). Аналогичные графики для мод высших порядков на рис. 6, 7 (при $\varepsilon = 0.1, \kappa = 1$).

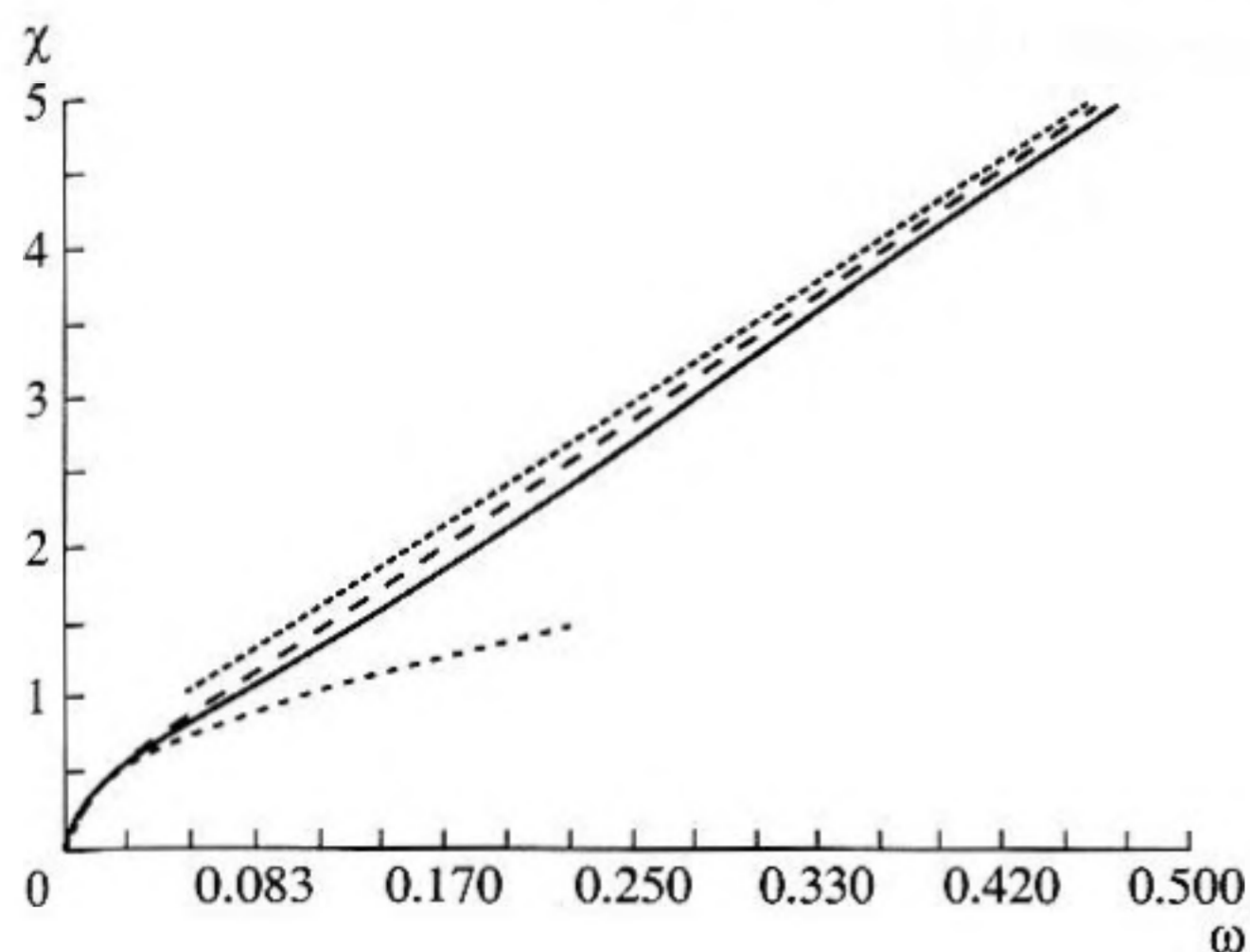


Рис. 4. Симметричная фундаментальная мода (сплошная линия) и ее асимптотики (пунктирные линии – асимптотики для $\chi \geq 1$ и $\chi \leq 1$; штриховая линия – Паде-аппроксимация).

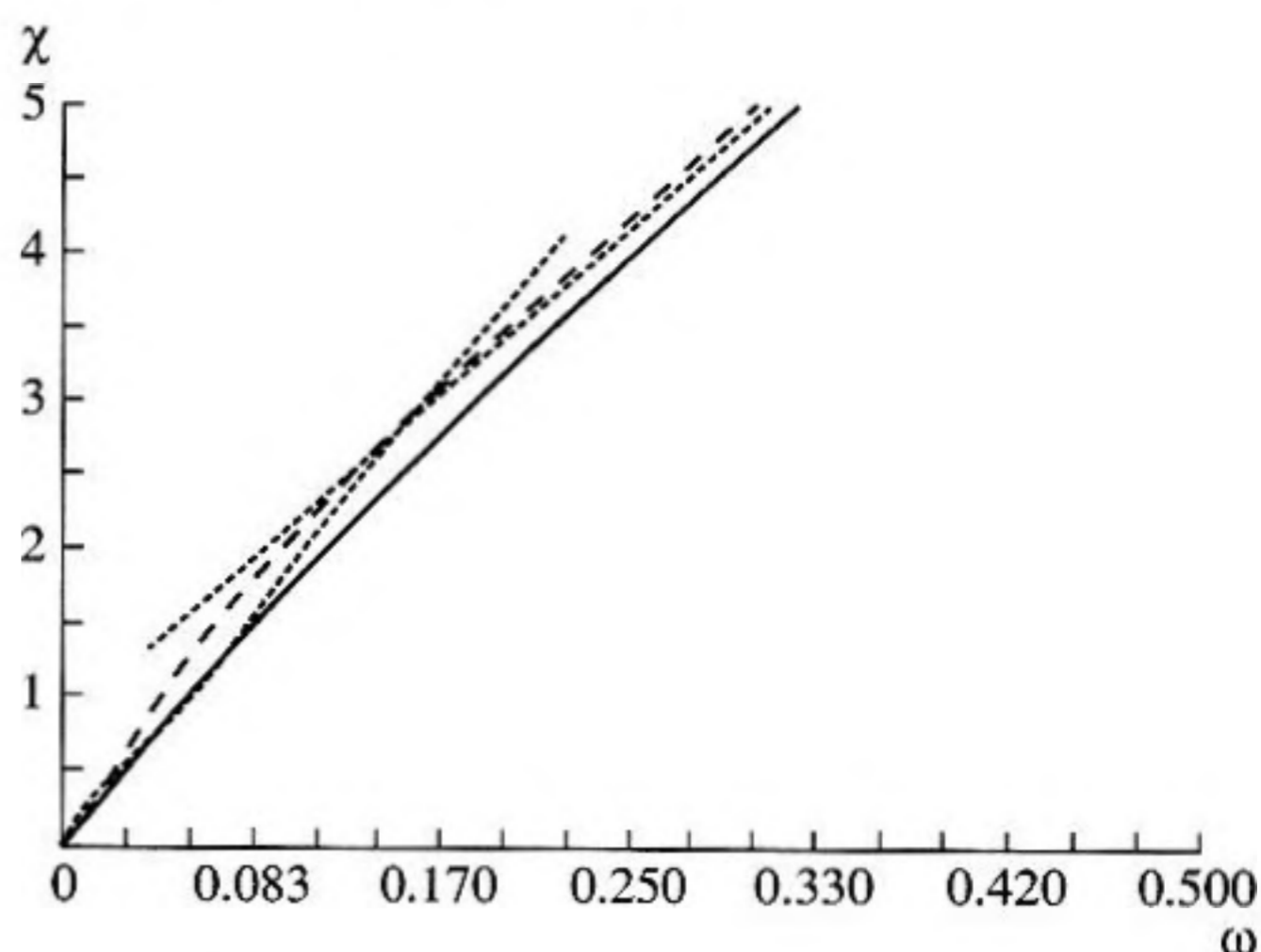


Рис. 5. Антисимметричная фундаментальная мода (сплошная линия) и ее асимптотики (пунктирные линии – асимптотики для $\chi \geq 1$ и $\chi \leq 1$; штриховая линия – Паде-аппроксимация).

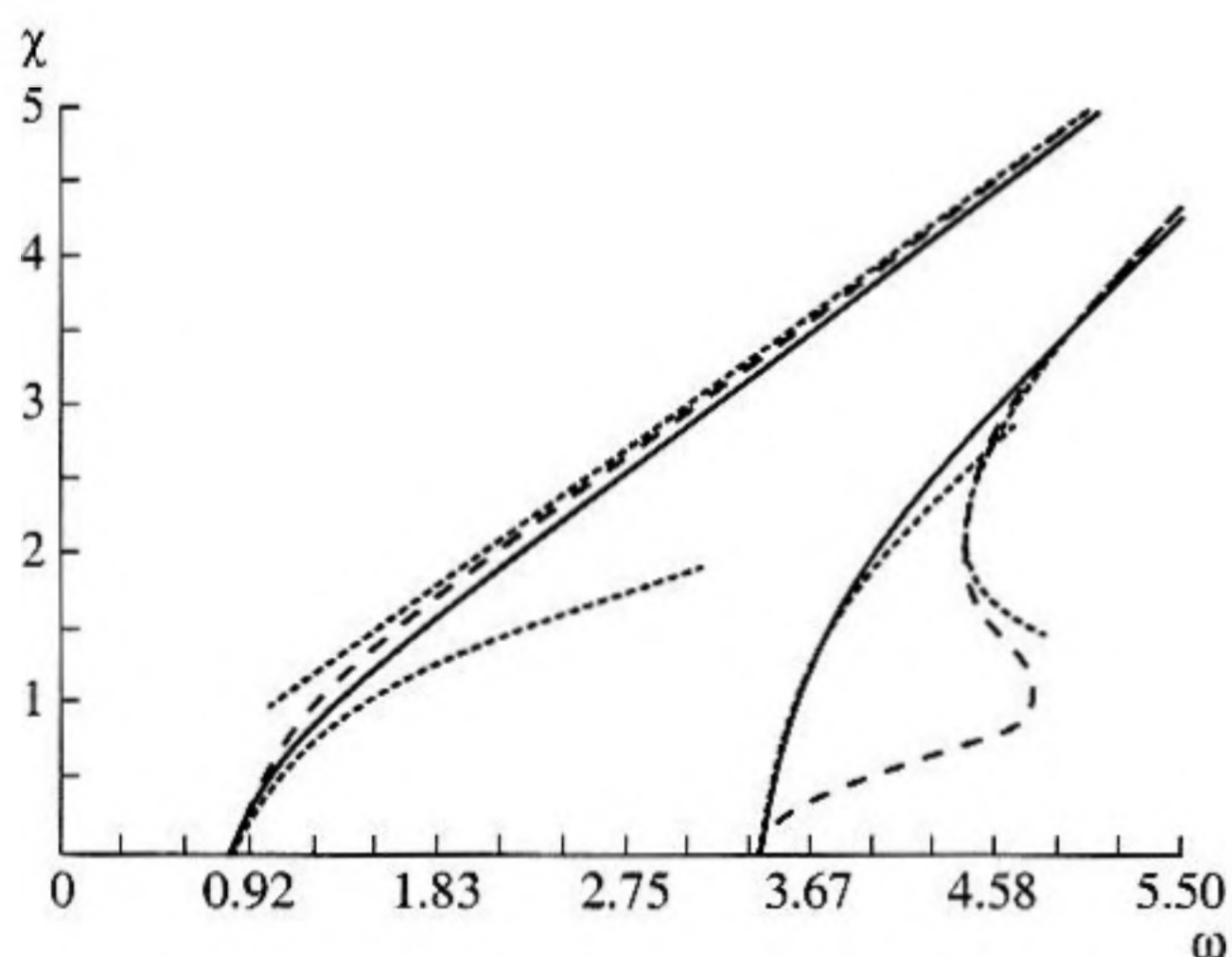


Рис. 6. Асимптотики для симметричные моды высших порядков (сплошные линии, $n = 1, 2$) и их асимптотики (пунктирные линии – асимптотики для $\chi \geq 1$ и $\chi \leq 1$; штриховые линии – Паде-аппроксимация).

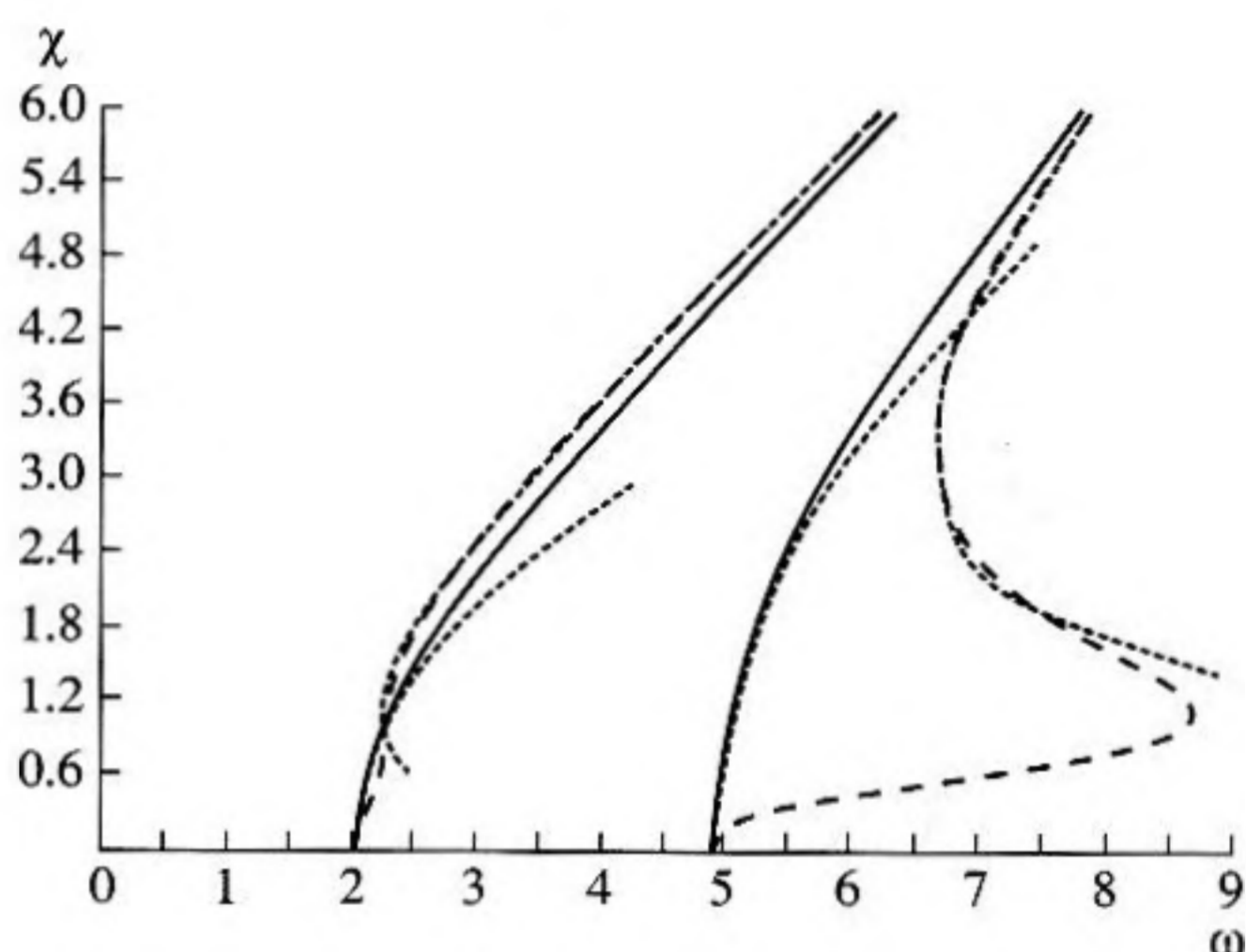


Рис. 7. Асимптотики для антисимметричные моды высших порядков (сплошные линии, $n = 1, 2$) и их асимптотики (пунктирные линии – асимптотики для $\chi \geq 1$ и $\chi \leq 1$; штриховые линии – Паде-аппроксимация).

С помощью приведенных выше разложений можно получить асимптотические законы распределения акустического давления по толщине слоя. Для фундаментальной моды они принимают вид: в симметричном случае

$$P = \left(\frac{\omega}{\chi}\right)^2 W, \quad (\chi \ll 1), \quad (2.12)$$

в антисимметричном случае

$$P(\zeta) = \omega^2 \zeta W, \quad (\chi \ll 1). \quad (2.13)$$

Для симметричных мод высшего порядка имеем

$$P(\zeta) = -\frac{\omega^2 W}{b_n \sin(b_n)} \left[\cos(b_n \zeta) - \left\{ \frac{2A_n - 1}{2b_n} \left(\operatorname{ctg}(b_n) + \frac{1}{b_n} \right) \cos(b_n \zeta) + \sin(b_n \zeta) \zeta \right\} \chi^2 \right], \quad (\chi \ll 1), \quad (2.14)$$

$$P(\zeta) = -\frac{\omega^2 \cos(\sqrt{2C_n}\zeta)}{\sqrt{2C_n} \sin(\sqrt{2C_n})} W, \quad (\chi \gg 1). \quad (2.15)$$

Аналогичные формулы для антисимметричных мод высших порядков принимают форму:

$$P(\zeta) = \frac{\omega^2 W}{b_n \cos(b_n)} \left[\sin(b_n \zeta) + \left\{ \frac{2A_n - 1}{2b_n} \left(\operatorname{tg}(b_n) - \frac{1}{b_n} \right) \sin(b_n \zeta) + \cos(b_n \zeta) \zeta \right\} \chi^2 \right], \quad (\chi \ll 1), \quad (2.16)$$

$$P(\zeta) = -\frac{\omega^2 \sin(\sqrt{2C_n}\zeta)}{\sqrt{2C_n} \cos(\sqrt{2C_n})} W, \quad (\chi \gg 1). \quad (2.17)$$

3. СООТНОШЕНИЕ ОРТОГОНАЛЬНОСТИ

Приведем уравнения (1.6) к задаче на собственные значения

$$\frac{d^2 P}{d\zeta^2} + \lambda P = 0, \quad (3.1)$$

при

$$\frac{dP}{d\zeta} \pm a(\lambda)P = 0, \quad (\zeta = \pm 1), \quad (3.2)$$

где

$$a(\lambda) = \frac{\kappa \omega^2}{-\varepsilon^2 \lambda + \omega^2 (1 - \varepsilon^2)}$$

и введем спектральный параметр $\lambda = -\beta^2$. Вследствие зависимости граничных условий от спектрального параметра задача (3.1), (3.2) не относится к классу задач, описываемых классической теорией Штурма-Лиувилля [7]. Чтобы определить соотношение ортогональности в рассматриваемом случае, запишем уравнение (3.1) для собственных функций P_n и P_m ($n \neq m$) и соответствующих им собственных значений λ_n и λ_m и вычтем из первого уравнения второе. В результате получим

$$\frac{d}{d\zeta} [P_n P'_m - P_m P'_n] + (\lambda_n - \lambda_m) P_n P_m = 0. \quad (3.3)$$

Интегрируя (3.3) от -1 до 1 и учитывая, что

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \lambda_i + \omega^2 (\varepsilon^2 - 1) &= \kappa \omega^2 \frac{P_i(1)}{P'_i(1)} = \\ &= -\kappa \omega^2 \frac{P_i(-1)}{P'_i(-1)}, \quad (i = n, m), \end{aligned} \quad (3.4)$$

приходим к интегральной форме уравнения (3.3)

$$(\lambda_n - \lambda_m) \left[\frac{\varepsilon^2}{\kappa \omega^2} F_{nm} + \int_{-1}^1 P_n(\zeta) P_m(\zeta) d\zeta \right] = 0, \quad (3.5)$$

$$n \neq m,$$

где

$$F_{nm} = P'_n(1)P'_m(1) + P'_n(-1)P'_m(-1). \quad (3.6)$$

Следовательно,

$$\frac{\varepsilon^2}{\kappa \omega^2} F_{nm} + \int_{-1}^1 P_n(\zeta) P_m(\zeta) d\zeta = 0, \quad n \neq m. \quad (3.7)$$

Вычисляя теперь левую часть (3.7) для $n = m$, получим соотношение ортогональности для собственных функций задачи (3.1), (3.2)

$$\frac{\varepsilon^2}{\kappa \omega^2} F_{nn} + \int_{-1}^1 P_n(\zeta) P_n(\zeta) d\zeta = \delta_{nm} B_n, \quad (3.8)$$

где

$$F_{nn} = [P'_n(1)]^2 + [P'_n(-1)]^2, \quad (3.9)$$

$$B_n = \frac{\varepsilon^2}{\kappa \omega^2} F_{nn} + \int_{-1}^1 P_n^2(\zeta) d\zeta, \quad (3.10)$$

а δ_{nm} – символ Кронекера.

В заключение отметим, что близкие условия ортогональности для акустических волноводов с гибкими стенками предлагались ранее в [8].

Работа выполнена при поддержке гранта Лондонского Королевского общества (Royal Society, London).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нугул У.К. О корнях уравнения Лэмба для деформации плиты, антисимметричной относительно срединной поверхности // Изв. Акад. наук. Серия физ.-мат. наук. 1963 г. Т. 12. № 3. С. 284–294.
2. Mindlin, R.D. Waves and vibrations in isotropic elastic plates / Proc. of the 1-st Symp. on Naval Struct. Mech., Pergamon Press, New York. 1958. P. 199–232.
3. Kaplunov J.D., Kossovich L.Yu., Nolde E.V. Dynamic of thin walled elastic bodies. San Diego: Academic Press, 1998. 226 p.
4. Kaplunov J.D., Nolde E.V., Rogerson G.A. A low-frequency model for dynamic motion in pre-stressed incompressible elastic structures / Proc. R. Soc. Lond. A (2000). V. 456. P. 2589–2610.
5. Бобровницкий Ю.И. Соотношения ортогональности для волн Лэмба // Акуст. журн. 1972. Т. 18. Вып. 4. С. 513–515.
6. Образцов И.Ф., Нерубайло И.Б., Андрианов И.В. Асимптотические методы в строительной механике тонкостенных конструкций. М.: Машиностроение, 1991. 416 с.

7. Титчмарш Э.Ч. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. М.: Издательство иностранной литературы, 1960. Часть I, 278 с.
8. Warren D.P., Lawrie J.B., Mohamed I.M. Acoustic scattering in waveguides that are discontinuous in geometry and material property // Wave Motion, 2002. V. 36. Issue 2, August, P. 119–142.

Dispersion of Waves in a Plane Acoustic Layer with Flexible Elastic Walls

Yu. D. Kaplunov*, I. V. Kirillova**, and Yu. A. Postnova**

*Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences,
pr. Vernadskogo 101-1b, Moscow, 117526 Russia

e-mail: golden@ipmnet.ru

**Saratov State University, ul. Astrakhanskaya 83, Saratov, 410026 Russia

e-mail: postnova_ja@mail.ru

Abstract—A plane acoustic layer bounded by elastic membranes is considered. Dispersion relations for symmetric and antisymmetric waves are derived. The limit behavior of dispersion curves is investigated for wave numbers tending to zero and to infinity. With the use of the resulting asymptotic expansions, the two-point Pade approximations are constructed. The orthogonality relations for eigenmodes are presented.