

УДК 534.23

ПОЛНЫЙ АКУСТИЧЕСКИЙ ИМПЕДАНС ВЫТЯНУТОГО СФЕРОИДА, СОВЕРШАЮЩЕГО ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

© 2004 г. А. Б. Майзель

Центральный научно-исследовательский институт им. акад. А.Н. Крылова
196158 Санкт-Петербург, Московское шоссе 44

E-mail: Krylov@krylov.spb.ru

Поступила в редакцию 12.01.04 г.

С использованием теории сфероидальных волновых функций определен полный акустический импеданс вытянутого сфероида, совершающего поперечные поступательные и вращательные перемещения. Получены выражения для сопротивлений излучения, присоединенных массы и момента инерции жидкости. Показано, что в низкочастотном приближении эти масса и момент инерции принимают предельные значения, тождественные гидродинамическим. Рассчитаны составляющие полного акустического импеданса сфероидов различной относительной толщины на произвольной частоте.

При решении задач об излучении звука телами сфероидальной формы возникает потребность в знании их сопротивлений излучения и присоединенных масс жидкости. Представляет интерес сопоставление этих величин с результатами решения подобной же классической задачи об осциллирующей сфере. Настоящая статья посвящена определению сопротивлений излучения, присоединенных массы и момента инерции вытянутого сфероида, совершающего поперечные колебания, посредством нахождения его полного акустического импеданса. Обозначив z продольную ось сфероида, будем рассматривать гармонические поступательные перемещения сфероида относительно оси x и вращательные его перемещения относительно оси y (рис. 1). В данной работе принята зависимость колебательных процессов от времени t в форме $\exp(-j\omega t)$, где ω – круговая частота.

Выражения для полного акустического импеданса сфероида в случае его осцилляций вдоль оси x с линейной скоростью V_x или поворотов вокруг оси y с угловой скоростью ω_y , Z_x или Z_y соответственно имеют вид [1]

$$\begin{aligned} Z_x &= \frac{F_x}{V_x} = R_x - j\omega M_x, \\ Z_y &= \frac{M_y}{\omega_y} = R_y - j\omega I_y, \end{aligned} \quad (1)$$

где F_x и M_y – вынуждающие сила и момент, с которыми сфероид действует на жидкость при двух рассматриваемых видах колебаний, R_x и R_y – соответствующие им сопротивления излучения, M_x –

присоединенная масса жидкости в случае осциллирующей сфероида, I_y – присоединенный момент инерции массы жидкости в случае поворотов сфероида.

Вынуждающие силу и момент можно найти, интегрируя по поверхности тела давления, которые создаются в жидкости осциллирующим сфероидом (обозначим это давление p_x) либо вращающимся сфероидом (p_y):

$$F_x = \int_s p_x \cos(n, x) ds, \quad (2)$$

$$M_y = - \int_s p_y [\cos(n, z)x - \cos(n, x)z] ds.$$

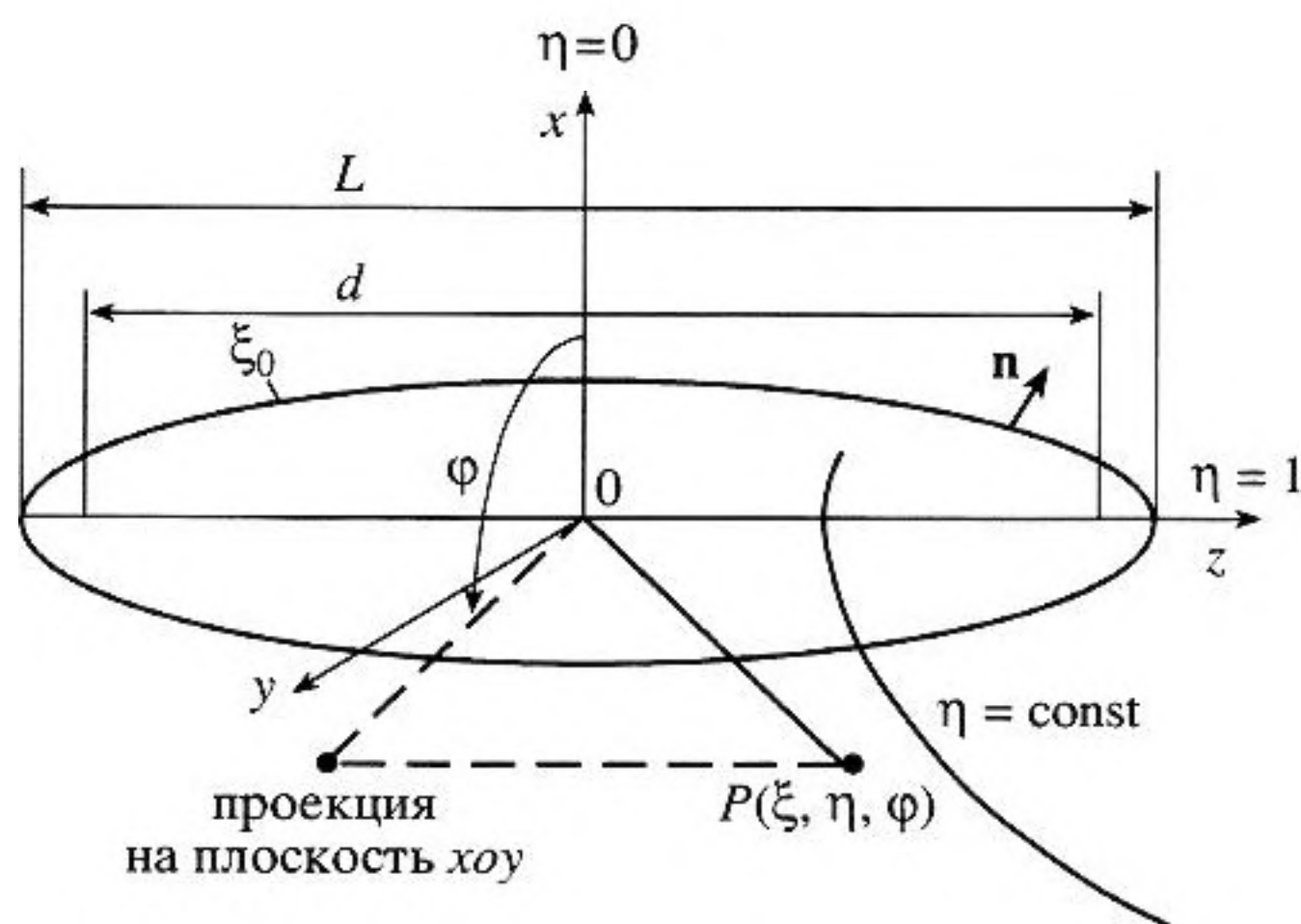


Рис. 1. Геометрия задачи и система вытянутых сфероидальных координат.

Здесь \mathbf{n} – внешняя нормаль к поверхности сфероид; направляющие косинусы задаются соотношениями

$$\begin{aligned}\cos(n, x) &= \xi \sqrt{\frac{1-\eta^2}{\xi^2-\eta^2}} \cos \varphi, \\ \cos(n, z) &= \eta \sqrt{\frac{\xi^2-1}{\xi^2-\eta^2}};\end{aligned}\quad (3)$$

$$ds = \frac{d^2}{4} \sqrt{(\xi^2-1)(\xi^2-\eta^2)} d\eta d\varphi,$$

ξ, η, φ – вытянутые сфероидальные координаты [1], d – междуфокусное расстояние сфероид (см. рис. 1).

В свою очередь, порождаемые колеблющимся сфероидом давления будем искать в виде рядов

$$p_{x,y} = \sum_{n=1}^{\infty} P_{x,y} R_{1n}^{(3)}(h, \xi) S_{1n}(h, \eta) \cos \varphi, \quad (4)$$

удовлетворяющих условию излучения на бесконечности, в которых $R_{1n}^{(3)}(h, \xi)$ – вытянутые радиальные сфероидальные функции (в.р.с.ф.) 3-го рода, $S_{1n}(h, \eta)$ – вытянутые угловые сфероидальные функции (в.у.с.ф.), $h = kd/2$ – волновой размер сфероид, k – волновое число звука в жидкости. Это традиционный прием, применяемый при решении подобных задач (см., например, [2]). Неизвестные коэффициенты $P_{x,y}$ определим из граничного условия на поверхности сфероид

$$V_n = \frac{1}{jkrc} \frac{\partial p}{\partial n} = \frac{1}{jkrc} \frac{1}{g_\xi} \frac{\partial p}{\partial \xi}, \quad \xi = \xi_0, \quad (5)$$

где V_n – нормальная компонента амплитуды скорости, ρ – плотность жидкости, c – скорость звука в ней, g_ξ – элемент метрического тензора, равный [1]

$$g_\xi = \frac{d}{2} \sqrt{\frac{\xi^2-\eta^2}{\xi^2-1}}.$$

Нормальная компонента скорости V_n связана со скоростью V_x следующим образом:

$$V_n = V_x \cos(n, x).$$

При вращательных колебаниях сфероид вокруг оси y линейная скорость перемещения точек его поверхности относительно оси x равна

$$V_x = \omega_y z = \omega_y \frac{d}{2} \xi_0 \eta.$$

Наличие множителя $\cos \varphi$ в направляющем косинусе $\cos(n, x)$ (3), отвечающее геометрии решаемой задачи, и диктует выбор именно такой зависимости от φ в выражении (4).

Подставим последние формулы, а также (3) и (4) в граничное условие (5), умножим обе его части на функцию $S_{1k}(h, \eta)$, проинтегрируем их по η в пределах $[-1, +1]$ и, воспользовавшись свойством ортогональности в.у.с.ф. [1]

$$\int_{-1}^{+1} S_{mn}(h, \eta) S_{mk}(h, \eta) d\eta = \begin{cases} N_{mn}(h), & k = n, \\ 0, & k \neq n, \end{cases}$$

определим коэффициенты $P_{x,y}$ разложения (4) как для поступательных, так и для вращательных перемещений сфероид. После выполнения указанных процедур придем к следующим результатам:

$$\begin{aligned}p_x &= V_x \frac{4}{3} j h \rho c \frac{\xi_0}{\sqrt{\xi_0^2-1}} \cos \varphi \times \\ &\times \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{d_0^{1n}(h) R_{1n}^{(3)}(h, \xi) S_{1n}(h, \eta)}{N_{1n}(h) R_{1n}^{(3)'}(h, \xi_0)}, \\ p_y &= \omega_y \frac{2}{5} j h \rho c \frac{d \xi_0^2}{\sqrt{\xi_0^2-1}} \cos \varphi \times \\ &\times \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \frac{d_1^{1n}(h) R_{1n}^{(3)}(h, \xi) S_{1n}(h, \eta)}{N_{1n}(h) R_{1n}^{(3)'}(h, \xi_0)}.\end{aligned}\quad (6)$$

Здесь $d_0^{1n}(h)$ и $d_1^{1n}(h)$ – коэффициенты разложения в.у.с.ф. в ряд по присоединенным функциям Лежандра [1].

Теперь, подставив выражения (6) в (1)–(3), получим искомые выражения для полного акустического импеданса:

– в случае осциллирующего сфероид

$$Z_x = \frac{2\pi}{9} j \omega \rho \xi_0^2 d^3 \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{[d_0^{1n}(h)]^2 R_{1n}^{(3)}(h, \xi_0)}{N_{1n}(h) R_{1n}^{(3)'}(h, \xi_0)}, \quad (7)$$

– в случае вращающегося сфероид

$$Z_y = \frac{\pi}{50} j \omega \rho \xi_0^2 d^5 \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \frac{[d_1^{1n}(h)]^2 R_{1n}^{(3)}(h, \xi_0)}{N_{1n}(h) R_{1n}^{(3)'}(h, \xi_0)}.$$

Исследуемые сопротивления излучения, присоединенные масса и момент инерции сфероид могут быть извлечены из этих рядов либо аналитически (в низкочастотном приближении), либо расчетным путем (для произвольной частоты).

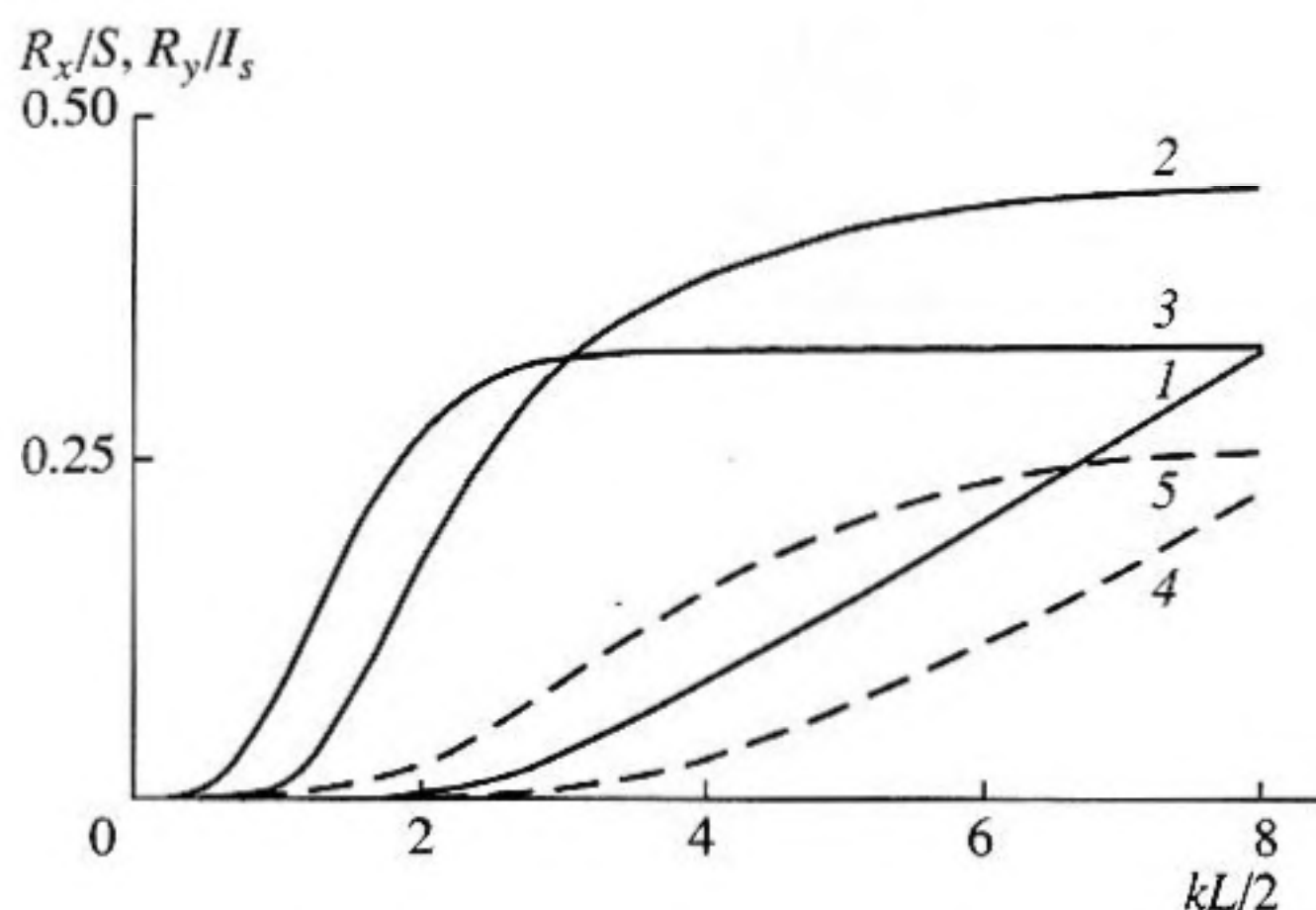


Рис. 2. Зависимость сопротивления излучения сфероида от его волновой полудлины:
 1 – осциллирующий сфероид, R_x/S , $\xi_0 = 1.01$;
 2 – то же, $\xi_0 = 1.1$;
 3 – осциллирующая сфера, R_x/S ;
 4 – сфероид, совершающий вращательные колебания, R_y/I_s , $\xi_0 = 1.01$;
 5 – то же, $\xi_0 = 1.1$

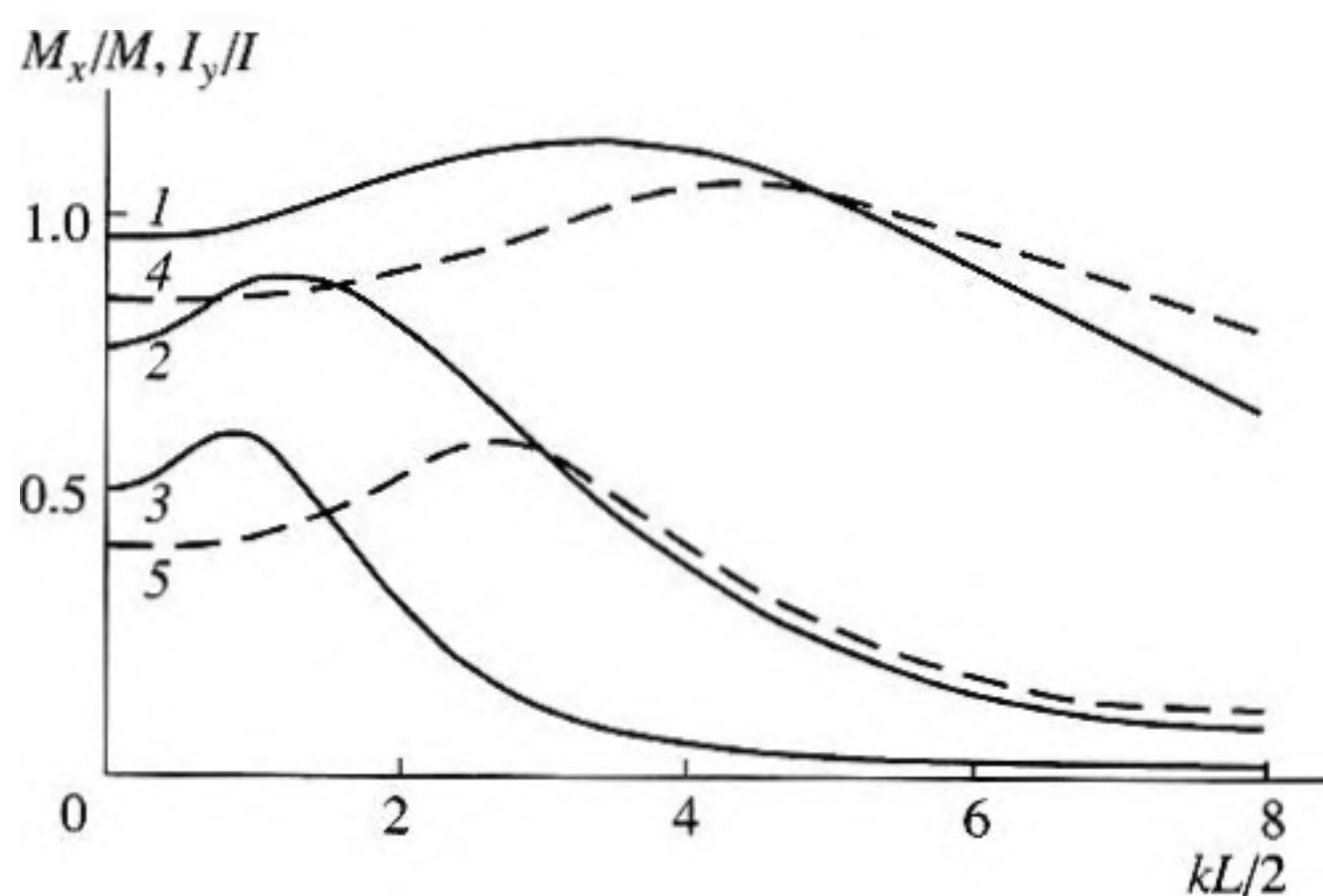


Рис. 3. Зависимость присоединенных массы и момента инерции сфероида от его волновой полудлины:
 1 – осциллирующий сфероид, M_x/M , $\xi_0 = 1.01$;
 2 – то же, $\xi_0 = 1.1$;
 3 – осциллирующая сфера, M_x/M ;
 4 – сфероид, совершающий вращательные колебания, I_y/I , $\xi_0 = 1.01$;
 5 – то же, $\xi_0 = 1.1$

Устремив в выражениях (7) волновой размер сфероида к нулю, с помощью [1, 3] установим, что

$$\lim_{h \rightarrow 0} Z_x = \frac{\pi}{6} j \omega \rho \xi_0^2 d^3 \frac{Q_1^1(\xi_0)}{Q_1^1(\xi_0)} = -j \omega \lambda_{11},$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} Z_y = \frac{\pi}{120} j \omega \rho \xi_0^2 d^5 \frac{Q_2^1(\xi_0)}{Q_2^1(\xi_0)} = -j \omega \lambda_{55},$$

(8)

где $Q_1^1(\xi_0)$ и $Q_2^1(\xi_0)$ – присоединенные функции Лежандра 2-го рода, λ_{11} – присоединенная масса жидкости при равномерном движении сфероида вдоль оси x , широко используемая в гидродинамике [3], λ_{55} – аналогичный присоединенный момент инерции массы жидкости при равномерном вращении сфероида вокруг оси y [там же]. Из выражений (8) видно, что в предельном низкочастотном случае акустика и гидродинамика действительно дают тождественное описание присоединенных масс колеблющегося сфероида, а его сопротивления излучения стремятся при этом к нулю.

В области более высоких частот значения сопротивлений излучения, присоединенных массы и момента инерции сфероида можно найти, вычисляя реальные и мнимые части выражений (7) и сопоставляя их с формулами (1). Однако в отличие от гидродинамического приближения благодаря применению волновых сфероидальных функций эти значения будут зависеть от частоты и учитывать волновое движение жидкости. Расчеты выполнялись с использованием таблиц волновых

сфероидальных функций [4–6]. Результаты расчетов нормировались:

1) R_x – значением площади поверхности сфероида S , равным

$$S = \frac{\pi d^2}{2} \sqrt{\xi_0^2 - 1} \left(\sqrt{\xi_0^2 - 1} + \xi_0^2 \arcsin \frac{1}{\xi_0} \right);$$

2) R_y – значением момента инерции площади поверхности сфероида относительно оси y , равным

$$I_s = \frac{\pi d^4}{64} \sqrt{\xi_0^2 - 1} \left[\xi_0^2 (\xi_0^4 + 5\xi_0^2 - 4) \arcsin \frac{1}{\xi_0} - \sqrt{\xi_0^2 - 1} (\xi_0^4 - 5\xi_0^2 + 2) \right];$$

3) M_x – значением массы плавающего сфероида, плотность которого равна плотности жидкости, равным

$$M = \frac{\pi}{6} \rho d^3 \xi_0 (\xi_0^2 - 1);$$

4) I_y – значением момента инерции плавающего сфероида относительно оси y , равным

$$I = \frac{\pi}{120} \rho d^5 \xi_0 (\xi_0^2 - 1) (2\xi_0^2 - 1).$$

На рис. 2 и 3 представлены результаты расчетов составляющих полного акустического импеданса двух сфероеидов различной относительной толщины в зависимости от волновой полудлины сфероида $kL/2$, где L – его длина. У первого сфе-

роида $\xi_0 = 1.01$ (отношение длины к ширине 7.12), у второго $\xi_0 = 1.1$ (отношение длины к ширине 2.40). Здесь же для сравнения приведены данные аналогичных вычислений для осциллирующей сферы как функции ее волнового полудиаметра (при вращательных колебаниях сферы сопротивление излучения и присоединенный момент инерции равны нулю). Графики рис. 2 и 3 позволяют по заданному волновому размеру сфероида отыскивать его сопротивление излучения, присоединенные массу или момент инерции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Скучик Е. Основы акустики: В 2-х т. Т. 2. М.: Мир, 1976. 544 с.
2. Ye Z., Hoskinson E. Low-frequency acoustic scattering by gas-filled prolate spheroids in liquids. II. Comparison with the exact solution // J. Acoust. Soc. Amer. 1998. V. 103. № 2. P. 822–826.
3. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика: В 2-х ч. Ч.1. Л.; М.: Гостехиздат, 1948. 536 с.
4. Фламмер К. Таблицы волновых сфероидальных функций. М.: ВЦ АН СССР, 1962. CIV, 140 с.
5. Таблицы сфероидальных волновых функций и их первых производных: В 2-х т. Т. 2 / Под ред. В.И. Крылова. Мн.: Наука и техника, 1976. 420 с.
6. Spheroidal wave functions / J.A. Stratton, P.M. Morse, L.J. Chu e.a. New York: The Technology Press of M.I.T., John Wiley & Sons; London: Chapman and Hall, 1956. XIV, 613 p.

The Total Acoustic Impedance of a Prolate Spheroid Performing Transverse Oscillatory Movements

A. B. Maizel'

*Krylov Central Research Institute, Russian Academy of Sciences,
Moskovskoe sh. 44, St. Petersburg, 196158 Russia
e-mail: krylov@krylov.spb.ru*

Abstract—Using the theory of spheroid wave functions, the total acoustic impedance is determined for a prolate spheroid performing transverse translational and rotational oscillatory movements. Expressions for the radiation resistance, the added mass, and the added moment of inertia are derived. It is shown that, in the low-frequency approximation, this mass and moment of inertia reach limiting values identical with hydrodynamic ones. The components of the total acoustic impedance are calculated for spheroids of different relative thickness at arbitrary frequency.