

УДК 534.26

НОРМАЛЬНЫЕ ВОЛНЫ КРУГОВОГО ТИПА В ПОЛОМ УПРУГОМ ЦИЛИНДРЕ

© 2004 г. В. В. Тютюкин

Акустический институт им. Н.Н. Андреева РАН

117036 Москва, ул. Шверника 4

E-mail: Tyutekin@akin.ru

Поступила в редакцию 18.05.04 г.

В статье рассматриваются так называемые круговые нормальные волны, распространяющиеся в полом упругом цилиндре. Получены дисперсионное уравнение для волновых чисел этих волн, уравнение для критических частот и выражения для собственных функций такого волновода. Численными методами получены решения этих уравнений для различных значений параметра d , равного относительной толщине цилиндра. Выполнен анализ полученных решений и описаны основные свойства дисперсионных кривых, в том числе для низкочастотных волн нового типа, описываемых ветвями, в виде незамкнутых петель. На основе расчета и последующего анализа собственных функций проведена идентификация отдельных нормальных волн.

Волноводные свойства упругих тел цилиндрической формы до сих пор представляют значительный научный интерес. В научной литературе существует большое число работ, посвященных этой проблеме, в том числе для тел, представляющих собой толстостенные цилиндрические оболочки [1–3]. В основном эти работы посвящены волнам, упругие поля в которых являются периодическими функциями полярного угла θ , т.е. в общем случае решения пропорциональны множителю $\exp(in\theta)$, где n – целое число. В ряде работ [4–6] исследовались асимптотические решения для волн, распространяющихся в направлении угловой координаты; соответственно величина $n = \nu$, где ν играет роль углового волнового числа и в общем случае является нецелой величиной. Подобные волны учитываются, в частности, при решении задач дифракции на цилиндрических препятствиях [7, 8]. Точные решения для таких волн были получены в работе [9], в которой рассматривались волноводные свойства плоской пластины кольцевидной формы, по которой распространяются волны изгибного типа.

В настоящей работе рассматриваются свойства круговых нормальных волн, распространяющихся в полом упругом цилиндре бесконечной длины (фронт волны параллелен оси z).

Зададим геометрические размеры цилиндра в виде $r = a$ – внешняя граница, $r = br$ – внутренняя граница, $2L = a - b$ – толщина волновода.

Для решения задачи введем в рассмотрение скалярный потенциал $\phi(r, \theta)$ и (в силу двумерности задачи) единственную компоненту векторного потенциала $\psi_z(r, \theta) \equiv \psi(r, \theta)$. Эти функции

должны удовлетворять соответствующим уравнениям Гельмгольца

$$\Delta\phi(r, \theta) + k_l^2\phi(r, \theta) = 0 \quad (1)$$

$$\Delta\psi(r, \theta) + k_t^2\psi(r, \theta) = 0. \quad (2)$$

Здесь $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$, k_l – волновое число

продольных волн, $k_l^2 = \frac{\rho\omega^2}{\lambda + 2\mu}$, k_t – волновое число

сдвиговых волн, $k_t^2 = \frac{\rho\omega^2}{\mu}$, λ и μ – коэффициенты

Лямэ, ρ – плотность, ω – круговая частота.

В качестве граничных условий используем отсутствие напряжений на поверхностях цилиндра

$$\sigma_{rr} = 0, \quad \sigma_{r\theta} = 0; \quad \text{при } r = a, b, \quad (3)$$

где σ_{rr} – нормальное, а $\sigma_{r\theta}$ – тангенциальное напряжение. Эти величины можно непосредственно выразить через потенциалы ϕ и ψ (см., например, [1]):

$$\sigma_{rr} = -k_l^2\phi + 2\mu\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial\theta} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right), \quad (4)$$

$$\sigma_{r\theta} = \mu\left(\frac{2}{r}\frac{\partial^2\phi}{\partial r\partial\theta} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right). \quad (5)$$

В соответствии с поставленной задачей будем искать решения системы (1), (2) в виде упругих волн, бегущих в направлении угла θ :

$$\phi(r, \theta) = \Phi(r)\exp(i\nu\theta), \quad (6)$$

$$\psi(r, \theta) = \Psi(r)\exp(i\nu\theta). \quad (7)$$

Подставляя (6) и (7) в (1) и (2), получим систему уравнений для определения амплитуд нормальных волн:

$$\Delta\Phi + \left(k_t^2 - \frac{v^2}{r^2}\right)\Phi = 0, \quad (8)$$

$$\Delta\Psi + \left(k_t^2 - \frac{v^2}{r^2}\right)\Psi = 0. \quad (9)$$

Уравнения (4)–(5) с учетом (6) и (7) можно переписать следующим образом:

$$\frac{\sigma_{rr}}{2\mu} = \frac{d^2\Phi}{dr^2} - \frac{\lambda}{2\mu}k_t^2\Phi + iv\frac{d}{dr}\left(\frac{\Psi}{r}\right), \quad (10)$$

$$\frac{\sigma_{r\theta}}{2\mu} = -\frac{d^2\Psi}{dr^2} - \frac{1}{2}k_t^2\Psi + iv\frac{d}{dr}\left(\frac{\Phi}{r}\right). \quad (11)$$

Решения системы (8)–(9) записываются в виде

$$\Phi_v(r) = AJ_v(k_t r) + BY_v(k_t r), \quad (12)$$

$$\Psi_v(r) = CJ_v(k_t r) + DY_v(k_t r), \quad (13)$$

где J_v и Y_v – функции Бесселя и Неймана соответственно, A , B , C и D – произвольные постоянные.

Введем в рассмотрение безразмерные параметры $x = k_t r$ и $y = k_t r$, а также $\alpha = \frac{k_t}{k_r} = \frac{y}{x}$, который можно выразить через коэффициент Пуассона σ следующим образом: $\sigma = \sqrt{\frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)}}$. Отметим,

что в дальнейшем мы используем величину $\sigma = 0.25$, так что $\alpha = 0.58$. С учетом этого выражения (10)–(11) после достаточно громоздких преобразований, которые мы здесь не приводим, можно записать в виде

$$\frac{\sigma_{rr}}{2\mu k_t^2} = L_1(x)\Phi_v(\alpha x) + T_1(x)\Psi_v(x), \quad (14)$$

$$\frac{\sigma_{r\theta}}{2\mu k_t^2} = L_2(x)\Phi_v(\alpha x) + T_2(x)\Psi_v(x), \quad (15)$$

где операторы L и T задаются формулами

$$L_1(x) = -\frac{\alpha}{x} \frac{d}{dx} + \left[\frac{v(\alpha-1+v)}{x^2} - \frac{1}{2} \right];$$

$$T_1(x) = \frac{iv}{x} \left(\frac{d}{dx} - \frac{1}{x} \right);$$

$$L_2(x) = \frac{iv}{x} \left[\alpha \frac{d}{dx} - \frac{(\alpha-1)v+1}{x} \right];$$

$$T_2(x) = \frac{1}{x} \frac{d}{dx} - \left(\frac{v^2}{x^2} - \frac{1}{2} \right).$$

Интересно отметить, что при $\alpha = 1$ (однако физически нереализуемый случай) выполняются соотношения $L_1 = -T_2$; $L_2 = T_1$.

В свою очередь, подставляя решения (12), (13) в (14), (15), можно получить окончательно:

$$\frac{\sigma_{rr}}{2\mu k_t^2} = AL_1(x)J_v(\alpha x) + BL_1(x)Y_v(\alpha x) + CT_1(x)J_v(x) + DT_1(x)Y_v(x), \quad (16)$$

$$\frac{\sigma_{r\theta}}{2\mu k_t^2} = AL_2(x)J_v(\alpha x) + BL_2(x)Y_v(\alpha x) + CT_2(x)J_v(x) + DT_2(x)Y_v(x). \quad (17)$$

Вводя обозначения $x_a = k_r a$ и $x_b = k_r b$ и используя граничные условия (3), получим следующую однородную систему алгебраических уравнений для определения величин A , B , C и D :

$$AL_1(x_a)J_v(\alpha x_a) + BL_1(x_a)Y_v(\alpha x_a) + CT_1(x_a)J_v(x_a) + DT_1(x_a)Y_v(x_a) = 0, \quad (18)$$

$$AL_2(x_a)J_v(\alpha x_a) + BL_2(x_a)Y_v(\alpha x_a) + CT_2(x_a)J_v(x_a) + DT_2(x_a)Y_v(x_a) = 0, \quad (19)$$

$$AL_1(x_b)J_v(\alpha x_b) + BL_1(x_b)Y_v(\alpha x_b) + CT_1(x_b)J_v(x_b) + DT_1(x_b)Y_v(x_b) = 0, \quad (20)$$

$$AL_2(x_b)J_v(\alpha x_b) + BL_2(x_b)Y_v(\alpha x_b) + CT_2(x_b)J_v(x_b) + DT_2(x_b)Y_v(x_b) = 0. \quad (21)$$

Дисперсионное уравнение относительно неизвестной величины углового волнового числа v получаем, как обычно, приравняв нулю детерминант системы (18)–(21).

$$\Delta(v) = \begin{vmatrix} L_1(x_a)J_v(\alpha x_a) & L_1(x_a)Y_v(\alpha x_a) & T_1(x_a)J_v(x_a) & T_1(x_a)Y_v(x_a) \\ L_2(x_a)J_v(\alpha x_a) & L_2(x_a)Y_v(\alpha x_a) & T_2(x_a)J_v(x_a) & T_2(x_a)Y_v(x_a) \\ L_1(x_b)J_v(\alpha x_b) & L_1(x_b)Y_v(\alpha x_b) & T_1(x_b)J_v(x_b) & T_1(x_b)Y_v(x_b) \\ L_2(x_b)J_v(\alpha x_b) & L_2(x_b)Y_v(\alpha x_b) & T_2(x_b)J_v(x_b) & T_2(x_b)Y_v(x_b) \end{vmatrix} = 0. \quad (22)$$

Решение уравнения $\Delta(v) = 0$ имеет множество корней $v = v_n(x_a, x_b)$, где индекс n определяет различные ветви решения характеристического уравнения. С целью их идентификации, а также для проверки выполнения граничных условий (18)–(21), считая, что корни $v = v_n(x_a, x_b)$ вычислены, найдем собственные функции (формы колебаний) рассматриваемого волновода. С этой целью используем первые три уравнения системы (18)–(21) (очевидно, что четвертое уравнение является их линейной комбинацией). Положив $A = 1$ (что не нарушает общности решения), получим неоднородную систему уравнений для определения оставшихся коэффициентов, зависящих как от v_n , так и от n .

$$BL_1(x_a)Y_v(\alpha x_a) + CT_1(x_a)J_v(x_a) + DT_1(x_a)Y_v(x_a) = -L_1(x_a)J_v(\alpha x_a), \quad (23)$$

$$BL_2(x_a)Y_v(\alpha x_a) + CT_2(x_a)J_v(x_a) + DT_2(x_a)Y_v(x_a) = -L_2(x_a)J_v(\alpha x_a), \quad (24)$$

$$BL_1(x_b)Y_v(\alpha x_b) + CT_1(x_b)J_v(x_b) + DT_1(x_b)Y_v(x_b) = -L_1(x_b)J_v(\alpha x_b). \quad (25)$$

Решение системы (23)–(25) можно представить в виде

$$B_n = \frac{\Delta_B(v_n)}{\Delta(v_n)}, \quad C_n = \frac{\Delta_C(v_n)}{\Delta(v_n)}, \quad D_n = \frac{\Delta_D(v_n)}{\Delta(v_n)}, \quad (26)$$

где

$$\Delta(v_n) = - \begin{vmatrix} L_1(x_a, v_n)Y_v(\alpha x_a) & T_1(x_a, v_n)J_v(x_a) & T_1(x_a, v_n)Y_v(x_a) \\ L_2(x_a, v_n)Y_v(\alpha x_a) & T_2(x_a, v_n)J_v(x_a) & T_2(x_a, v_n)Y_v(x_a) \\ L_1(x_b, v_n)Y_v(\alpha x_b) & T_1(x_b, v_n)J_v(x_b) & T_1(x_b, v_n)Y_v(x_b) \end{vmatrix},$$

$$\Delta_B(v_n) = - \begin{vmatrix} L_1(x_a, v_n)J_v(\alpha x_a) & T_1(x_a, v_n)J_v(x_a) & T_1(x_a, v_n)Y_v(x_a) \\ L_2(x_a, v_n)J_v(\alpha x_a) & T_2(x_a, v_n)J_v(x_a) & T_2(x_a, v_n)Y_v(x_a) \\ L_1(x_b, v_n)J_v(\alpha x_b) & T_1(x_b, v_n)J_v(x_b) & T_1(x_b, v_n)Y_v(x_b) \end{vmatrix},$$

$$\Delta_C(v_n) = - \begin{vmatrix} L_1(x_a, v_n)Y_v(\alpha x_a) & L_1(x_a, v_n)J_v(\alpha x_a) & T_1(x_a, v_n)Y_v(x_a) \\ L_2(x_a, v_n)Y_v(\alpha x_a) & L_2(x_a, v_n)J_v(\alpha x_a) & T_2(x_a, v_n)Y_v(x_a) \\ L_1(x_b, v_n)Y_v(\alpha x_b) & L_1(x_b, v_n)J_v(\alpha x_b) & T_1(x_b, v_n)Y_v(x_b) \end{vmatrix},$$

$$\Delta_D(v_n) = - \begin{vmatrix} L_1(x_a, v_n)Y_v(\alpha x_a) & T_1(x_a, v_n)J_v(x_a) & L_1(x_a, v_n)J_v(\alpha x_a) \\ L_2(x_a, v_n)Y_v(\alpha x_a) & T_2(x_a, v_n)J_v(x_a) & L_2(x_a, v_n)J_v(\alpha x_a) \\ L_1(x_b, v_n)Y_v(\alpha x_b) & T_1(x_b, v_n)J_v(x_b) & L_1(x_b, v_n)J_v(\alpha x_b) \end{vmatrix}.$$

На основании полученных значений коэффициентов собственные функции волновода для напряжений можно записать в виде

$$\frac{\sigma_{rr}}{2\mu k_t^2} = L_1(x)J_{v_n}(\alpha x) + B_n L_1(x)Y_{v_n}(\alpha x) + C_n T_1(x)J_{v_n}(x) + D_n T_1(x)Y_{v_n}(x), \quad (27)$$

$$\frac{\sigma_{r\theta}}{2\mu k_t^2} = L_2(x)J_{v_n}(\alpha x) + B_n L_2(x)Y_{v_n}(\alpha x) + C_n T_2(x)J_{v_n}(x) + D_n T_2(x)Y_{v_n}(x). \quad (28)$$

Собственные функции для радиального u_r и углового u_θ смещений можно определить через значения скалярного и векторного потенциалов:

$$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi}{\partial r}. \quad (29)$$

Вводя операторы $R_1 = \frac{d}{dx}$ и $R_2(v) = \frac{iv}{x}$, смещения (29), соответствующие корню v_n характеристического уравнения (22), можно записать в виде

$$\frac{u_r}{k_t} = R_1 \Phi_{v_n}(\alpha x) + R_2(v_n) \Psi_{v_n}(x), \quad (30)$$

$$\frac{u_\theta}{k_t} = R_2(v_n) \Phi_{v_n}(\alpha x) - R_1 \Psi_{v_n}(x), \quad (31)$$

где

$$\Phi_{v_n}(\alpha x) = J_{v_n}(\alpha x) + B_n Y_{v_n}(\alpha x),$$

$$\Psi_{v_n}(x) = C_n J_{v_n}(x) + D_n Y_{v_n}(x).$$

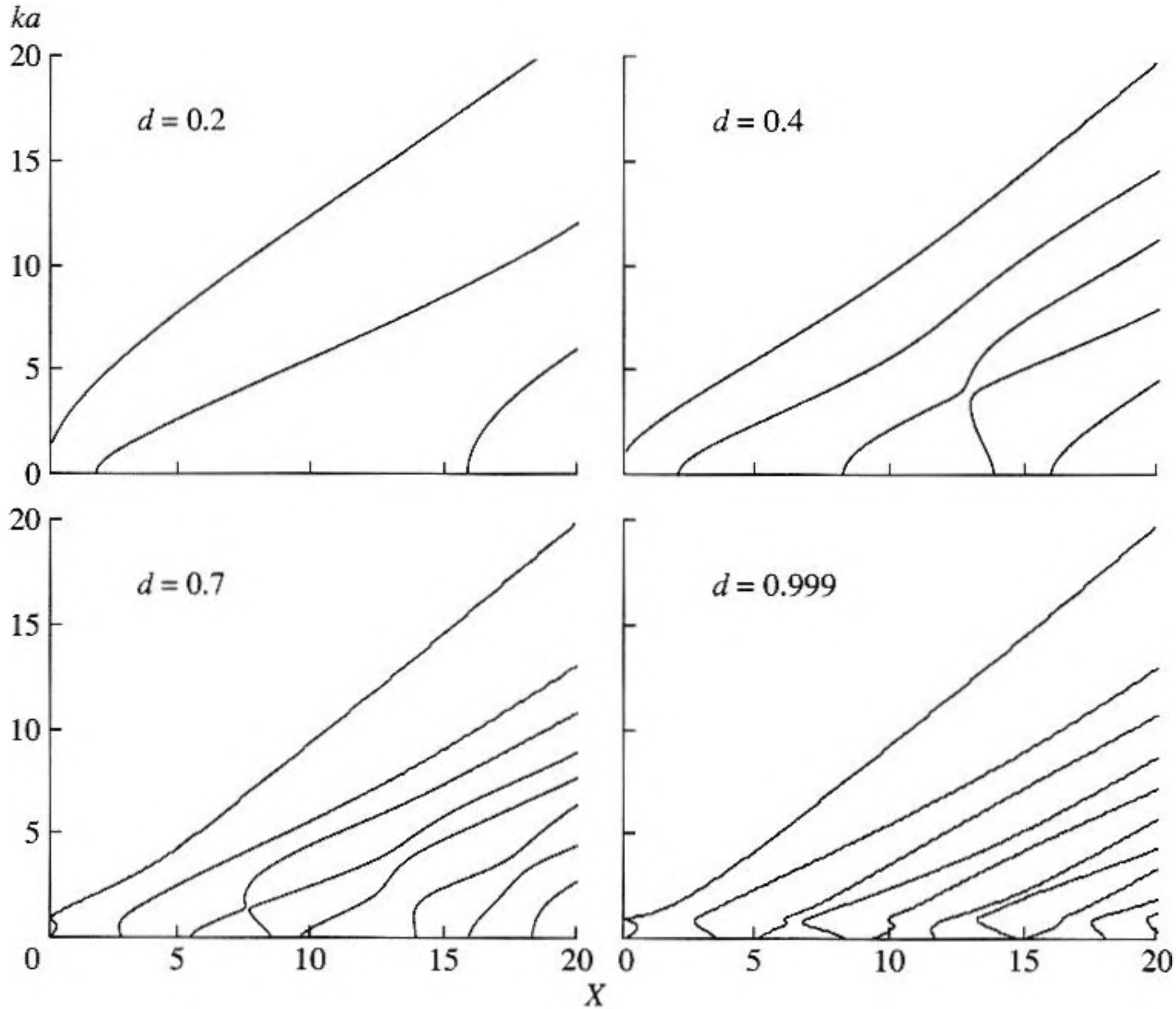


Рис. 1. Дисперсионные зависимости для нормальных волн углового типа в полом упругом цилиндре. Параметр $X = k_r a$.

Прежде чем перейти к изложению результатов расчетов, сделаем несколько замечаний по поводу их представления. Выше было указано, что искомая величина v играет роль углового волнового числа, входящего в выражение для фазы нормальной волны $\varphi = v\theta$. Следуя работе [9], преобразуем это выражение так: $\varphi = \frac{v}{r}r\theta = k_r S$,

где $k_r = \frac{v}{r}$ – “линейное” волновое число, $S = r\theta$ – длина дуги, пройденная волной. Выбирая такую форму представления результатов, зададим для определенности $r = a$, т.е. будем рассматривать волновое число, соответствующее внешней границе полого цилиндра. Тогда неизвестную величину v в приведенных уравнениях можно заменить на $v = ka$ (нижний индекс у k будем опускать). Аргументы, входящие в вышеприведенные уравнения могут быть представлены в виде $x_a = k_r a$; $x_b = k_t(1 - d)$, где $d = \frac{L}{R_0}$ – безразмерная толщина цилиндра.

Скорость распространения волны c также будет зависеть от радиуса. Выбирая в качестве основного аргумента величину $X = k_r a$, безразмерную искомую скорость можно записать в виде $C = \frac{c}{c_t} = \frac{k_t a}{v} = \frac{X}{ka}$, где c_t – скорость сдвиговых волн в среде.

Решение уравнения (22) для неизвестной величины $v = ka$ в зависимости от безразмерной частоты $X = k_r a$ для различных значений безразмерной толщины цилиндра d выполнялось с помощью специальной компьютерной программы.

На рис. 1 приведены результаты расчета для различных величин d . Приведенный график является типичным для всех значений параметра $0 < d < 1$. Наблюдаются три группы дисперсионных кривых: а) одиночные ветви ($n = 0$), начинающиеся при нулевой частоте и имеющие в этой точке значения $v = 1$; б) одиночные ветви ($n = 0'$) в виде незамкнутых петель, расположенных в непосредственной близости от начала координат. Эти последние приведены более подробно на рис. 2 для некоторых значений параметра d (ветви, соответствующие волнам с $n = 0'$ расположены при значе-

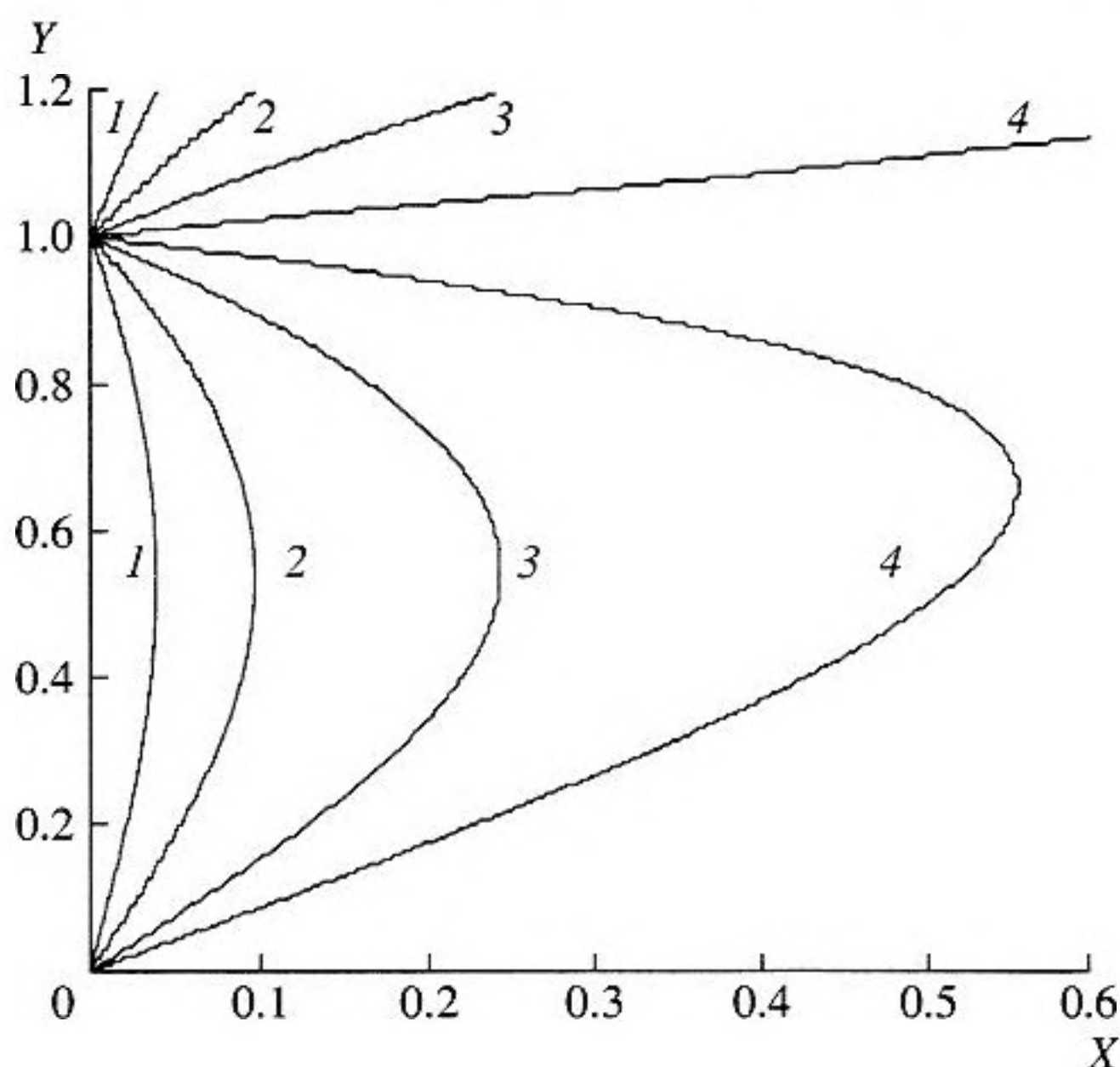


Рис. 2. Низкочастотные "полузамкнутые" ветви. Параметр $Y = ka$. 1 - $d = 0.2$, 2 - $d = 0.4$, 3 - $d = 0.7$, 4 - $d = 0.9$.

ниях $ka \leq 1$, здесь же при $ka \geq 1$ частично показаны волны с $n = 0$); подобные ветви для нормальных волн были получены также в работе [9]; в) бесконечное число ветвей, соответствующих, как в любом волноводе, нормальным волнам высоких порядков, число которых растет при увеличении d .

Рассмотрим свойства всех этих волн в отдельности.

На рис. 3 приведены графики безразмерной фазовой скорости $C = \frac{c}{c_t}$ волны $n = 0$ для некоторых значений параметра d . Видно, что вблизи начала координат эта скорость пропорциональна частоте. При больших значениях этого параметра она имеет частотные максимумы, а затем при $X \rightarrow \infty$ стремится к постоянной величине $C_\infty \approx 0.933$, не зависящей от параметра d . При малых величинах d такие максимумы отсутствуют, скорость стремится к той же величине C_∞ , но при значительно больших частотах. Можно утверждать, что скорость $C = C_\infty$ по своему физическому смыслу близка к скорости рэлеевских волн.

С целью идентификации различных ветвей дисперсионных кривых с помощью формул (28), (29), (30) и (31) для различных значений параметра d на отдельных частотах были проведены расчеты собственных функций для смещений u_r и u_θ , а также напряжений σ_{rr} и $\sigma_{r\theta}$. При этом указанные величины нормировались на соответствующие

их максимальные значения, а безразмерная радиальная координата x задавалась в виде $x = \frac{r}{a} - \frac{a+b}{2a}$, так что за начало координат бралась срединная поверхность цилиндра, а величина x изме-

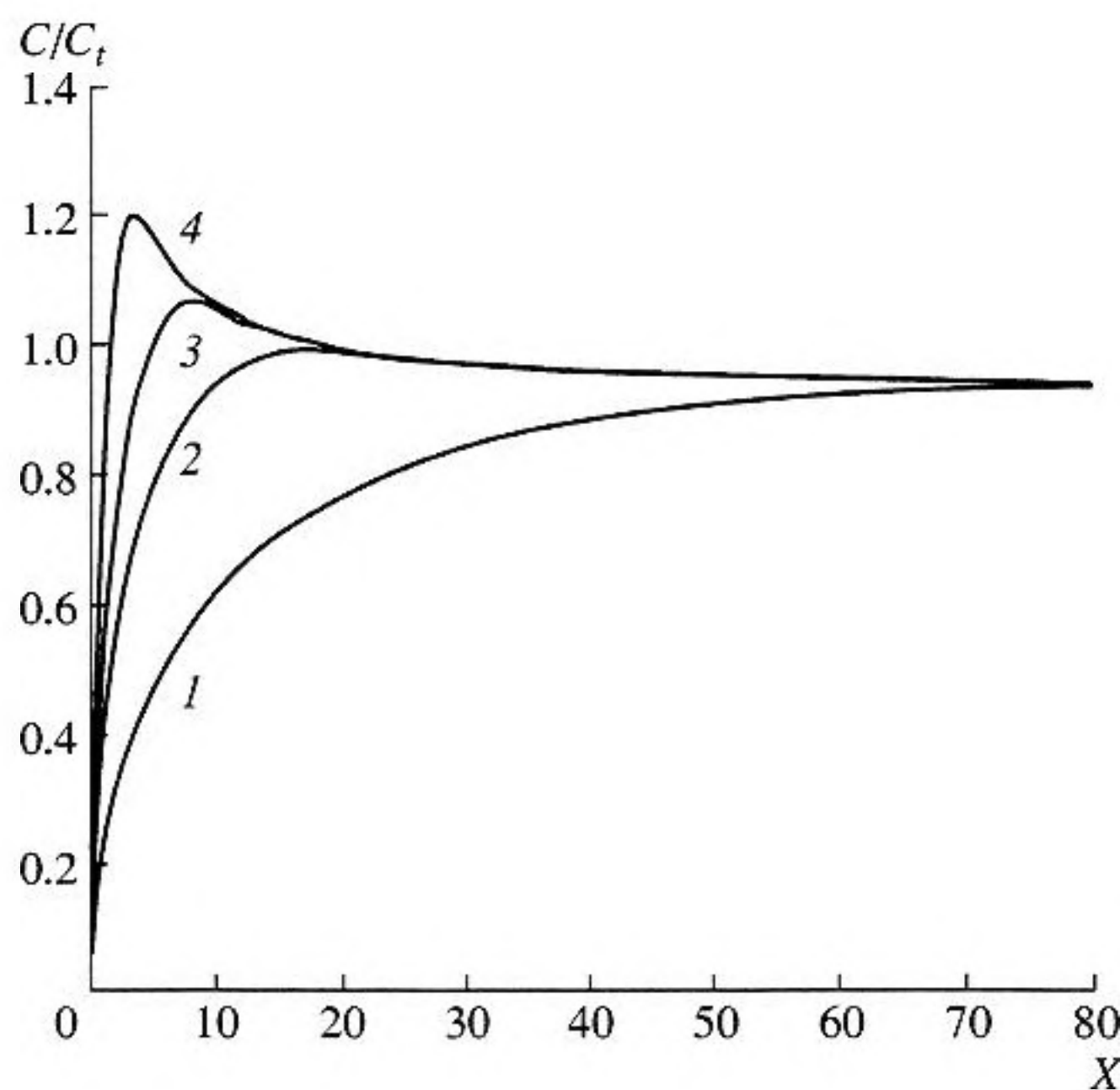


Рис. 3. Фазовые скорости нормальных волн с $n = 0$. 1 - $d = 0.1$, 2 - $d = 0.3$, 3 - $d = 0.5$, 4 - $d = 0.9$.

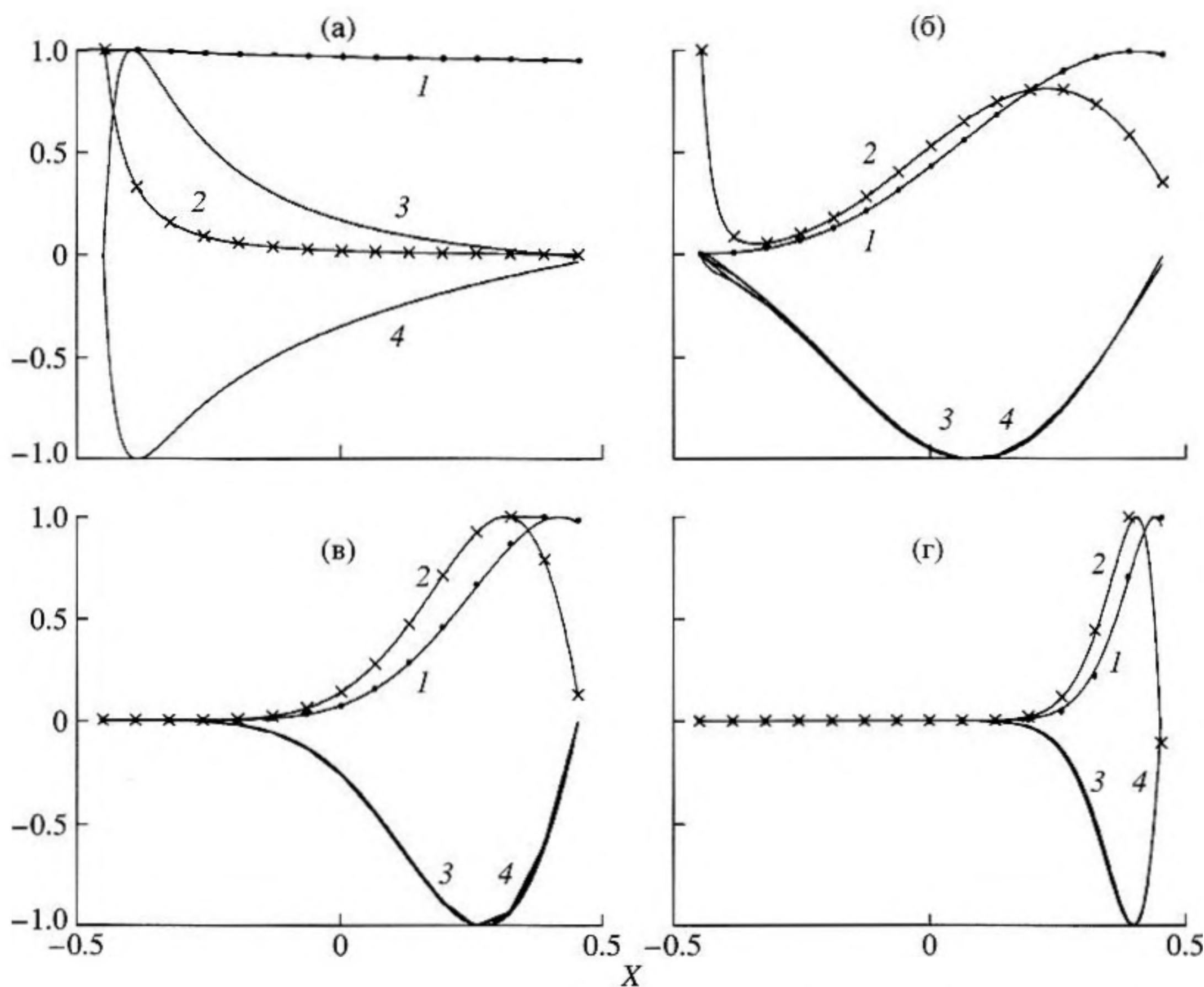


Рис. 4. Собственные функции для нормальной волны с $n = 0$ при $d = 0.9$. 1 – смещение u_r ; 2 – смещение u_θ ; 3 – напряжение σ_{rr} ; 4 – напряжение $\sigma_{r\theta}$. а) $X = 0.5$; б) $X = 5$; в) $X = 10$; г) $X = 32$.

нялась в пределах $-\frac{d}{2} \leq x \leq \frac{d}{2}$. На всех нижеследующих графиках у величин u_θ и $\sigma_{r\theta}$ опущен множитель i .

На рис. 4 приведены соответствующие графики для $d = 0.9$ (другие параметры приведены в подписи к рисунку). Из этого рисунка видно, что при низких частотах (рис. 3а) радиальное смещение u_r практически не зависит от радиуса, т.е. по телу распространяется волна квазиизгибного типа. При этом угловое смещение u_θ и напряжения σ_{rr} и $\sigma_{r\theta}$ максимальны вблизи его внутренней поверхности и уменьшаются к внешней. Другие случаи – б), в) и г) – отображают трансформацию собственных форм при увеличении частоты, заключающуюся в последовательном смещении всех величин в сторону внешней поверхности и их концентрации вблизи нее.

На рис. 5 представлены аналогичные данные для значения $d = 0.1$. Характер изменения приведенных величин примерно такое же, как и для $d = 0.9$, кроме того, что максимальные значения напряжений изначально располагаются на срединной поверхности цилиндра ($x = 0$), а концентрация

смещений и напряжений вблизи внешней поверхности происходит при значительно большей частоте.

На рис. 6 представлены (для параметра $d = 0.9$) собственные функции для нормальных волн с $n = 0'$, описываемых незамкнутыми петлями (рис. 2). Видно, что независимо от частоты все функции мало отличаются друг от друга и от соответствующих функций для волн с $n = 0$ (рис. 1а), за исключением того, что смещение u_r изменяет фазу на противоположную. При этом случаи а) и в) соответствуют нижней половине петли, б) и г) – верхней.

Исходя из данных рис. 2 и 6, можно сделать основные качественные выводы относительно свойств низкочастотных волн с $n = 0'$.

1. Эти волны на одной и той же частоте имеют два различных значения фазовой скорости (за исключением частоты, при которой верхняя и нижняя ветви сливаются вместе).

2. Групповая скорость, определяемая формулой $c_g = \frac{d\omega}{dk} = c_l \frac{dX}{dY}$, для верхней (нисходящей)

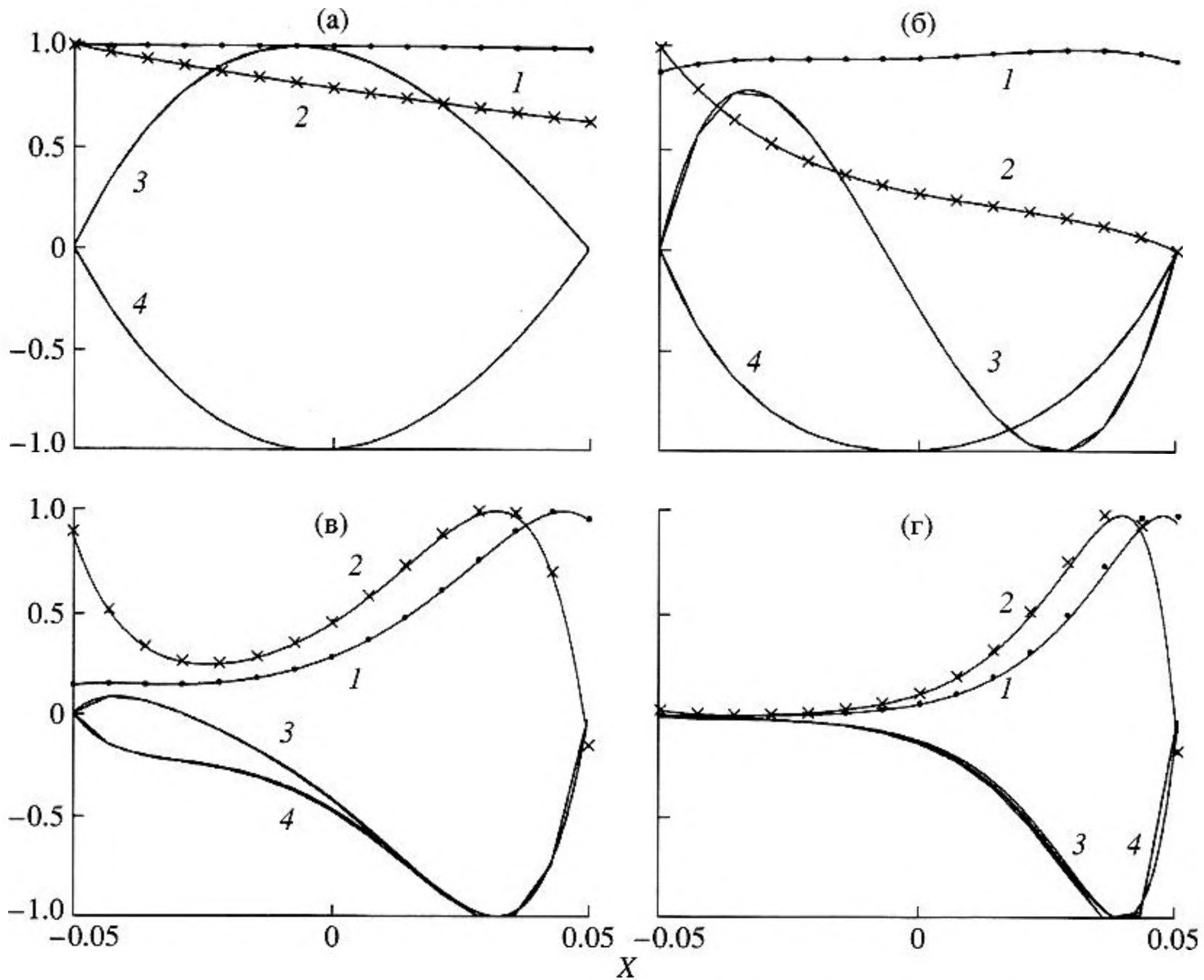


Рис. 5. То же, что на рис. 4, но для $d = 0.1$. а) $X = 0.5$; б) $X = 30$; в) $X = 90$; г) $X = 148$.

ветви отрицательна, а для нижней (восходящей) ветви положительна.

3. Волны имеют квазиизгибный характер с концентрацией напряжений вблизи внутренней поверхности цилиндрического тела.

Из рис. 1 видно, что нормальные волны высоких порядков ($n \geq 1$) зарождаются при значениях $v_n = 0$. При этом величины, описывающие поле нормальных волн, не зависят от полярного угла θ . В момент зарождения каждой такой волны ее волновой фронт представляет собой окружность, "соосную" с границами волновода $r = a$ и $r = b$. В этом случае смещения выражаются через цилиндрические функции нулевого порядка. В плоских волноводах процесс зарождения нормальных волн аналогичен рассмотренному – волновой фронт параллелен плоской границе волновода.

Так же как и в плоских волноводах, существуют критические частоты (частоты зарождения волн). Уравнение для критических частот нетрудно получить из уравнения (22), положив в нем $v =$

$= v_n = 0$. В этом случае операторы $L_{1,2}(x)$ и $T_{1,2}(x)$ имеют вид

$$L_1(x) = -\left(\frac{\alpha d}{x dx} + \frac{1}{2}\right); \quad L_2(x) = T_1(x) = 0;$$

$$T_2(x) = \frac{1}{x} \frac{d}{dx} + \frac{1}{2};$$

а уравнение (22) приобретает вид

$$\begin{vmatrix} J(\alpha x_a) & Y(\alpha x_a) \\ J(\alpha x_b) & Y(\alpha x_b) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I(x_a) & K(x_a) \\ I(x_b) & K(x_b) \end{vmatrix} = 0, \quad (32)$$

где введены дополнительные обозначения

$$J(x) = \frac{\alpha}{x} J_1(x) - \frac{1}{2} J_0(x);$$

$$Y(x) = \frac{\alpha}{x} Y_1(x) - \frac{1}{2} Y_0(x);$$

$$I(x) = -\frac{1}{x} J_1(x) + \frac{1}{2} J_0(x);$$

$$K(x) = -\frac{1}{x} Y_1(x) + \frac{1}{2} Y_0(x).$$

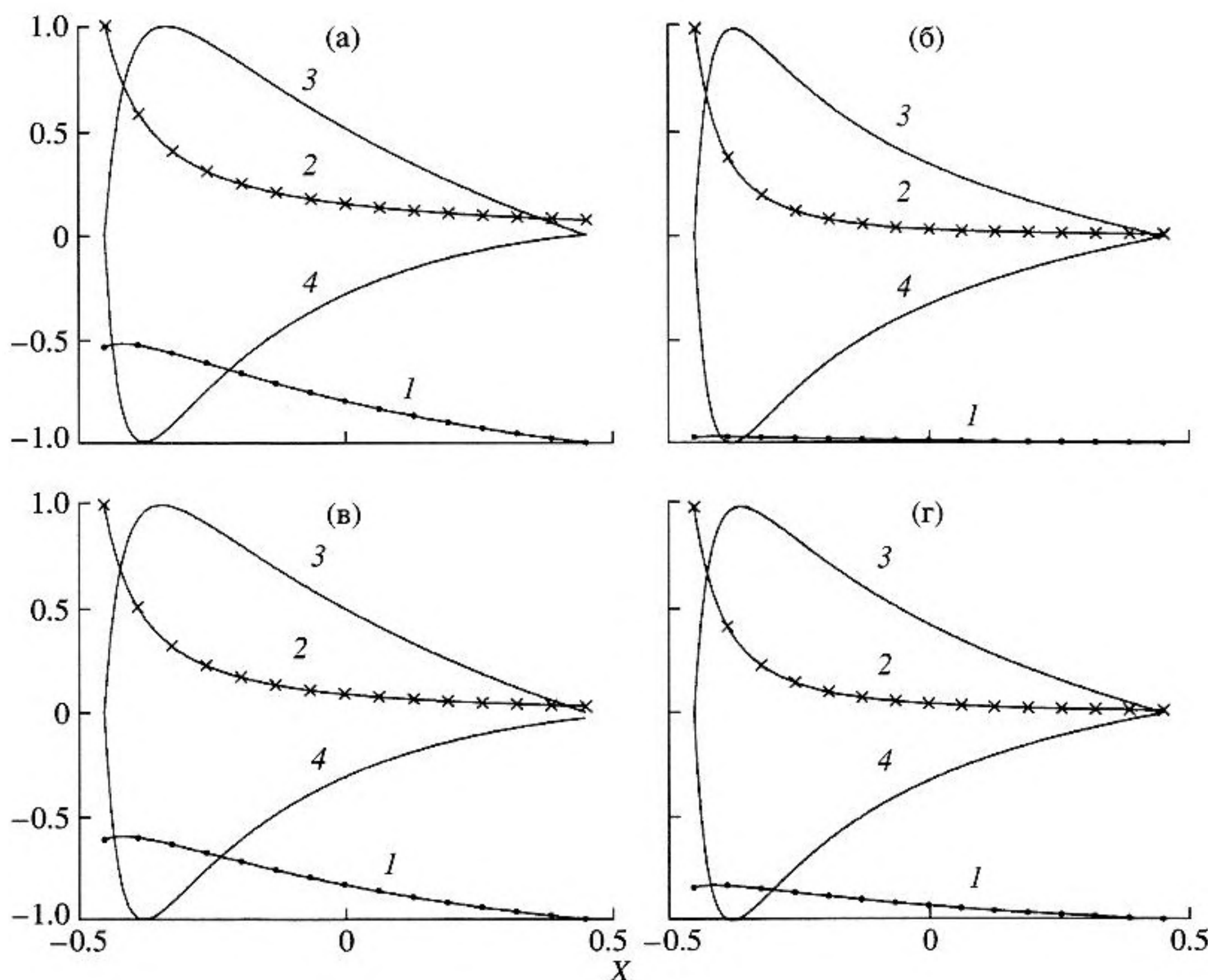


Рис. 6. Собственные функции для нормальной волны с $n = 0'$ при $d = 0.9$. а) $X = 0.5$; б) $X = 5$; в) $X = 10$; г) $X = 32$.

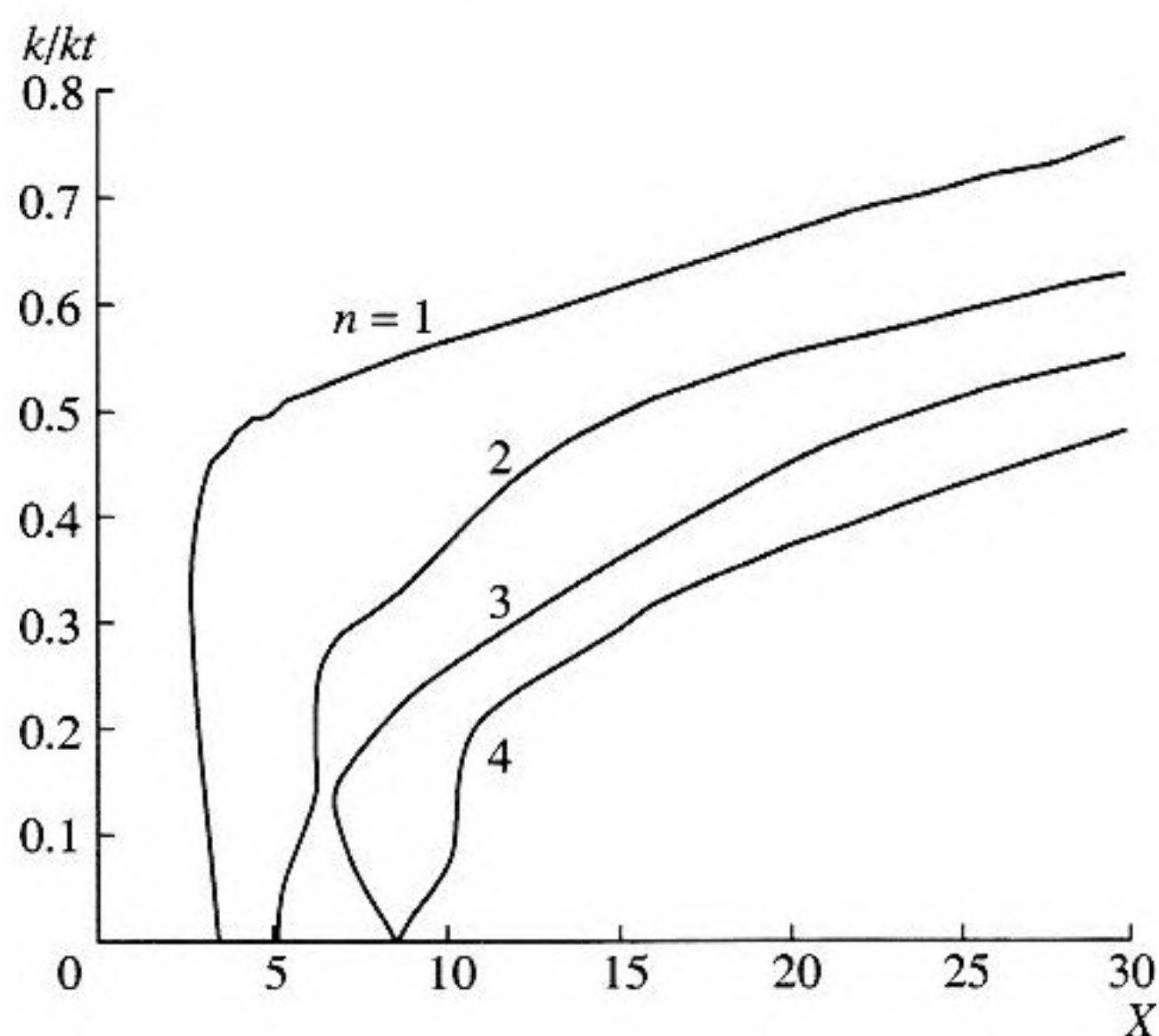


Рис. 7. Частотные характеристики безразмерных волновых чисел для $n \geq 1$ ($d = 0.9$).

Таким образом, уравнение для критических частот, что и следовало ожидать, состоит из двух независимых уравнений, первое из которых относится к волнам, зарождающимся продольными, а второе к волнам, зарождающимся поперечными.

На рис. 7 для $d = 0.9$ приведены безразмерные волновые числа $\frac{k}{k_t}$ для первых четырех волн ($n = 1-4$). При этом $n = 1$ и $n = 4$, согласно уравнению (32), соответствуют волнам, зарождающимся

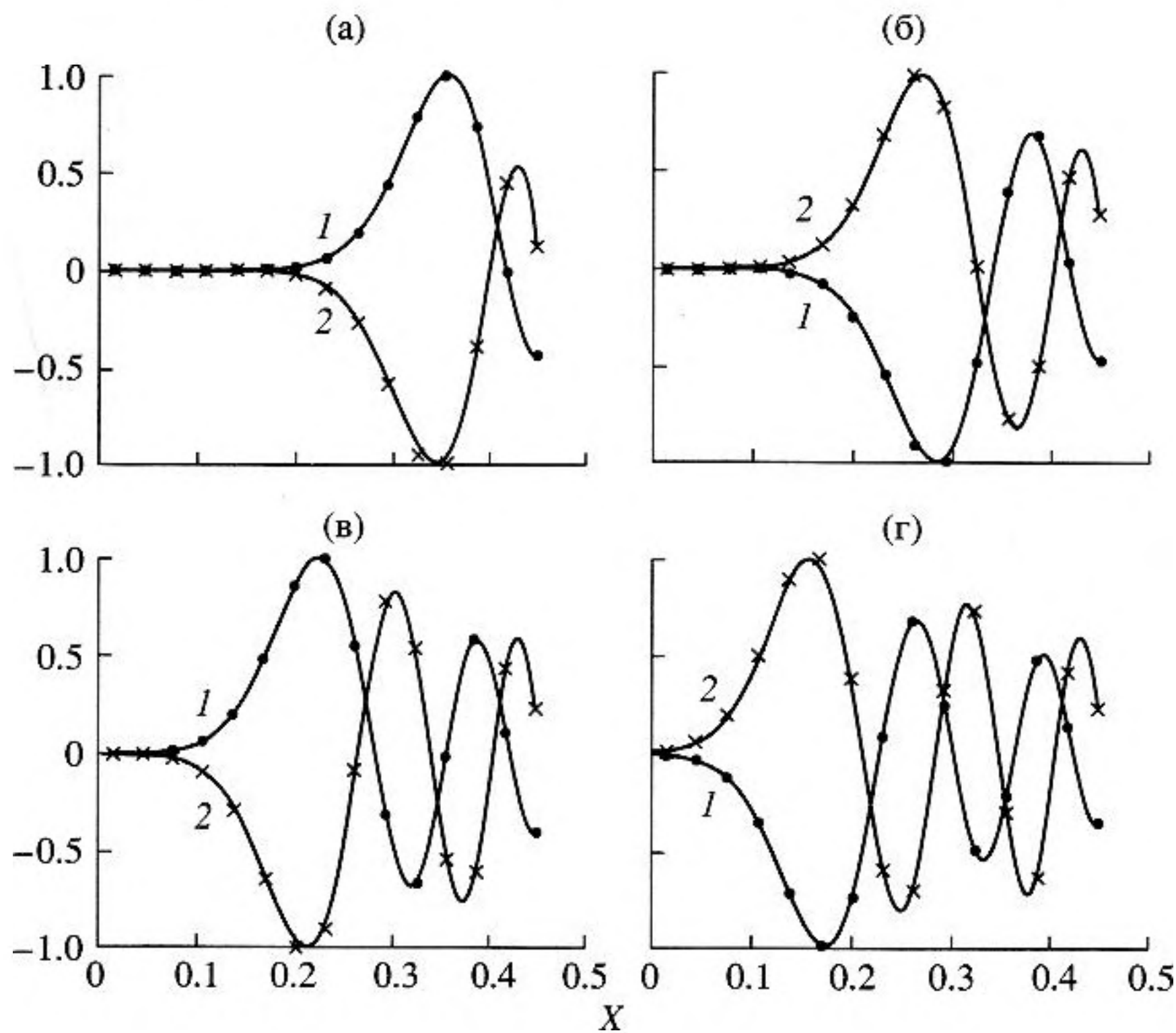


Рис. 8. Собственные функции смещений для нормальных волн с $n \geq 1$. Параметры: $d = 0.9$, $X = 80$. а) $n = 1$; б) $n = 2$; в) $n = 3$; г) $n = 4$.

ся продольными, а $n = 2$ и $n = 3$ – поперечными. Существенно, что при стремлении волнового размера цилиндра к бесконечности скорость всех нормальных волн стремится к скорости поперечных волн, что говорит об их принадлежности к типу квазилэмбовских волн. Отличие от лэмбовских волн упругого слоя состоит, в частности, в том, что волна с $n = 1$ для последних зарождается поперечной, а не продольной, как в рассмотренном случае.

На рис. 8 приведены собственные формы смещений волн с $n = 1-4$ для большого значения безразмерной частоты $X = 80$. При этом используются только положительные значения координаты x , поскольку при $x < 0$ и смещения и силы на этой частоте весьма малы и все поля сосредоточены вблизи внешней поверхности цилиндра. Из рисунка видно, что номер волны (как и в плоских волноводах) соответствует числу пересечений кривых оси x .

Полученные результаты могут быть непосредственно использованы для исследования характеристик круговых нормальных волн продольно-сдвигового типа тонкой пластины, имеющей форму кольца (такая задача для волн изгибного типа была решена в работе [9]). Для этого необходимо модуль упругости плоской вол-

ны $\lambda + 2\mu$ заменить на продольный модуль упругости пластины $E_p = \frac{E}{1 - \sigma^2}$ и множитель α представить в виде $\alpha = \frac{k_p}{k_t} = \sqrt{\frac{1 - \sigma}{2}}$, который для использовавшейся величины $\sigma = 0.25$ составляет $\alpha \cong 0.612$.

В заключение отметим, что исследованные в настоящей работе нормальные волны можно рассматривать как винтовые волны полого упругого цилиндра, распространяющиеся под углом $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ к его оси. Для винтовых волн с другими значениями этого угла приведенные выше волновые числа волн кругового типа можно определить как “критические волновые числа” (по аналогии с критическими частотами).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Физическая акустика. Под ред. У. Мэзона. 1966. Т. 1. Ч. 1. М.: Мир. 385 с.
2. Kumar Ram. Dispersion of axially symmetric waves in empty and fluid-filled cylindrical shells. *Acustica*. 1972. V. 27. P. 317–329.

3. Клещев А.А. Дифракция звука от точечного источника на упругой цилиндрической оболочке // Акуст. журн. 2004. Т. 50. № 1. С. 86–89.
4. Бреховских Л.М. О поверхностных волнах в твердом теле, удерживаемых кривизной границы // Акуст. журн. 1960. Т. 13. № 4. С. 541–554.
5. Викторов И.А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах. М.: Наука, 1981. С. 215.
6. Голубева Е.В. О винтовых поверхностных волнах на упругом цилиндре // Акуст. журн. 1986. Т. 22. № 3. С. 385–386.
7. Vboulis G., Paipetis S.A., Theocaris P.S. Circumferential waves around cylindrical inhomogeneties in plane viscoelastic solid systems // J. Sound Vibrat. 1974. V. 35. № 4. P. 521–533.
8. Шендеров Е.Л. Излучение и рассеяние звука. Л.: Судостроение, 1989. С. 301.
9. Тютюкин В.В. Волноводные свойства плоской кольцевой пластины. I. Изгибные волны // Акуст. журн. 2003. Т. 49. № 6. С. 843–851.

Circumferential Normal Modes in an Empty Elastic Cylinder

V. V. Tyutekin

*Andreev Acoustics Institute, Russian Academy of Sciences
ul. Shvernika 4, Moscow, 117036 Russia
e-mail: Tyutekin@akin.ru*

Abstract—The so-called circumferential normal modes propagating in an empty elastic cylinder are considered. A dispersion equation for the wave numbers of these waves, an equation for the critical frequencies, and expressions for the eigenfunctions of such a waveguide are derived. Solutions to these equations are obtained by numerical methods for different values of the parameter d representing the relative thickness of the cylinder. An analysis of the solutions is performed, and the main properties of the dispersion curves are described, including those for the low-frequency waves of the new type, which correspond to the branches in the form of open loops. Individual normal modes are identified on the basis of the calculation and subsequent analysis of eigenfunctions.

Сдано в набор 12.07.2004 г.

Подписано к печати 14.09.2004 г.

Формат бумаги 60 × 88¹/₈

Офсетная печать

Усл. печ. л. 18.0

Усл. кр.-отт. 4.5 тыс.

Уч.-изд. л. 18.5

Бум. л. 9.0

Тираж 243 экз.

Зак. 8764

Учредитель: Российская академия наук

Адрес издателя: 117997, Москва, Профсоюзная ул., 90

Оригинал-макет подготовлен МАИК "Наука/Интерпериодика"

Отпечатано в ППП "Типография "Наука", 121099, Москва, Шубинский пер., 6