АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2005, том 51, № 4, с. 463–468

УДК 534.6,534.22

АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ ДИАМЕТРОВ ЭЛЕКТРОДОВ НА ДИФРАКЦИОННЫЕ ЭФФЕКТЫ В УЛЬТРАЗВУКОВОМ ПОЛЕ, ВОЗБУЖДАЕМОМ КОЛЕБЛЮЩИМСЯ ПЬЕЗОДИСКОМ

© 2005 г. В. В. Галанин, В. С. Кононенко*

Поволжская государственная академия телекоммуникаций и информатики, факультет базового телекоммуникационного образования
443010 Самара, ул. Л. Толстого 23
E-mail: galanin_v@mail.ru
**Самарский государственный технический университет, физико-технологический факультет*
443100 Самара, ул. Первомайская 18
E-mail: physics@sstu.samara.ru

Поступила в редакцию 22.12.2003 г.

В работе рассматривается проблема излучения ультразвука источниками конечных размеров. Сформулирована и решена краевая задача для ультразвуковых волн, возбуждаемых защемленным по краю колеблющимся пьезодиском, имеющим характерный спектр собственных частот и соответствующее распределение амплитуд колебаний. Теоретически исследовано влияние размеров электродов на дифракционные эффекты в ультразвуковом поле пьезодиска.

В подавляющем большинстве работ, посвященных расчету ультразвукового поля поршневого излучателя, зависимость дифракционных эффектов от параметров пьезоизлучателя не исследуется [1–7]. В работах [8, 9] предложен подход для расчета дифракционного поля, создаваемого зажатым по краю колеблющимся пьезодиском, имеющим характерный спектр собственных частот и соответствующее распределение амплитуд колебаний. В связи с этим появилась возможность исследовать влияние диаметра электродов пьезоизлучателя на возбуждаемое им ультразвуковое поле в жидкости. Актуальность данной проблемы обусловлена тем, что на практике широко используются ультразвуковые излучатели, диаметр которых превосходит диаметр электродов.

Общее решение задачи о колебаниях пластин отсутствует [10–12]. Поэтому для решения данной проблемы рассмотрим излучение круглой пьезопластинки, зажатой по краям, в слой жидкости, причем противоположная сторона слоя представляет собой плоский жесткий экран, в который заделана приемная круглая пьезопластинка. Приближенное решение ищется для узкополосного конечного сигнала в пренебрежении многократными отражениями, когда излучаемый и отраженный импульсы разделяются во времени. Кроме того, как показано в работе [8], для достаточно тонких пьезодисков в первом приближении влиянием поперечных волн и волн Лэмба можно пренебречь и исключить из рассмотрения сдвиговые колебания пьезопластины. В этом случае нетрудно получить решение поставленной задачи и рассмотреть зависимость дифракционных поправок от параметров системы.

Рассмотрим колебания круглой изотропной пьезопластины радиусом a, защемленной в отверстии бесконечно жесткого экрана такой же толщины. Аналогичная пьезопластина применяется для приема колебаний. Воспользуемся цилиндрической системой координат r, φ, z. Пусть излучающая и приемная пьезопластины имеют одинаковый радиус a, толщину d, находятся на расстоянии L друг от друга. Ось z проходит через центры пластин. Поверхности излучающей пьезопластины совпадают с плоскостями $z = -d$ и $z = 0$, а поверхности приемной пластины – с плоскостями $z = L$ и $z = L + d$.

Так как пластины жестко зажаты по контуру, то должны выполняться следующие граничные условия:

$$\begin{gathered} u_1 = 0 \text{ при } u_3 = 0 \text{ при } r = a, \\ u_{2,1} = 0 \text{ при } r \geq a, \quad z = 0 \text{ и } z = L, \end{gathered} \tag{1}$$

где u_1, $u_{2,1}$ и u_3 – смещения частиц излучающей пьезопластины, слоя жидкости и приемной пьезопластины, соответственно.

Граничные условия (1) с учетом того, что радиус электрода может быть меньше радиуса пьезопластины, необходимо дополнить следующим

требованием для электрической индукции D_1 в излучающей пьезопластине:

$$D_1 = D_{10} \text{ при } r \le a_1, \quad D_1 = 0 \text{ при } r > a_1, \tag{2}$$

где D_{10} – электрическая индукция поля, возбуждаемого приложенным к электродам электрическим напряжением, a_1 – радиус электрода излучающей пьезопластины.

Пусть ультразвуковые волны в излучающей пьезопластине, слое жидкости и приемной пьезопластине описываются уравнением Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_j}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c_j^2}u_j = 0, \tag{3}$$

где u_j – смещение частиц среды с номером j (j = = 1, 2, 3), c_j – скорость распространения волн в данной среде, ω – циклическая частота.

Решение уравнения (3) для жидкости должно учитывать импульсный характер излучения ультразвукового сигнала, при котором в течение действия возбуждающего импульса колебания в диске можно считать установившимся и излучение – стационарным. При этом в жидкости на границе $z = 0$ импульсный сигнал, отраженный от границы $z = L$, отсутствует, так как разделен во времени с возбуждающим. Напротив, у границы $z = L$ отраженная волна должна учитываться при использовании граничных условий. В связи с этим, учитывая симметрию звукового поля относительно оси z и граничные условия (1), решение уравнения (3) ищем в виде

$$u_1 = \sum_{n=1}^{\infty} J_0\left(\frac{\nu_{0n} r}{a}\right)(A_n e^{-ik_n z} + B_n e^{ik_n z}) \quad \text{при } -d \le z \le 0, \tag{4}$$

$$u_{2,1} = \int_0^{\infty} e^{-i\beta z} J_0(\alpha r) f(\alpha)\alpha d\alpha = C(r, z)e^{-ik_2 z} \quad \text{при } 0 \le z < L, \tag{5}$$

$$u_2 = u_{2,1} + u_{2,2} = C(r, z)e^{-ik_2 z} + D(r, z)e^{ik_2 z} \quad \text{при } 0 < z \le L, \tag{6}$$

$$u_3 = \sum_{m=1}^{\infty} J_0\left(\frac{\nu_{0m} r}{a}\right)(E_m e^{-ik_m z} + F_m e^{ik_m z}) \quad \text{при } L \le z \le L + d, \tag{7}$$

где волновые числа $k_n^2 = k_1^2 - \nu_{0n}^2/a^2$, $k_m^2 = k_3^2 - \nu_{0m}^2/a^2$ определяют собственные частоты колебаний излучающей и приемной пьезопластин, k_1, k_2, k_3 – волновые числа для излучающей пьезопластины, жидкости и приемной пьезопластины, соответственно, ν_{0n}, ν_{0m} – корни функции Бесселя нулевого порядка; $\beta^2 = k_2^2 - \alpha^2$, α – независимая переменная, $f(\alpha)$ – функция распределения амплитуды радиальных волн, определяемая из граничных условий; A_n, B_n, E_m, F_m, $C(r, z)$ и $D(r, z)$ – величины, связанные с амплитудами волн, распространяющихся в положительном и отрицательном направлениях вдоль оси z. Для слоя жидкости имеем два выражения, которые учитывают импульсный характер возбуждения пьезопластин. Формула (5) описывает ультразвуковое поле на излучающей пьезопластине, когда нет сигнала, отраженного от приемной пьезопластины, а формула (6) описывает ультразвуковое поле на приемной пьезопластине, для которой в жидкости существует как падающая, так и отраженная волна.

Граничные условия на поверхностях пьезопластин будут иметь вид:

$$T_1 = 0 \text{ при } z = -d \tag{8}$$

$$T_1 = T_2 \text{ при } z = 0 \tag{9}$$

$$u_1 = u_{2,1} \text{ при } z = 0 \tag{10}$$

$$T_2 = T_3 \text{ при } z = L \tag{11}$$

$$u_{2,3} = u_3 \text{ при } z = L \tag{12}$$

$$T_3 = 0 \text{ при } z = L + d, \tag{13}$$

где T_1, T_3 – упругие напряжения в излучающей и приемной пластинах, величина $T_2 = c_2^D(\partial u_2/\partial z)$ определяет звуковое давление в жидкости, $c_2^D = \rho_2 c_2^2$, ρ_2, c_2 – плотность и скорость звука в жидкой среде, соответственно.

Уравнения пьезоэффекта для продольной моды колебаний имеют вид [13]:

$$T_j = c_j^D \frac{\partial u_j}{\partial z} - hD_j, \tag{14}$$

$$E_j = -h\frac{\partial u_j}{\partial z} + \beta^s D_j, \tag{15}$$

где E_j, D_j – напряженность и индукция электрического поля в излучающей ($j = 1$) и приемной ($j = 3$)

пьезопластинах, $c_j^D = \rho_j c_j^2$ – модули упругости при постоянной индукции, ρ_j, c_j – соответственно плотность и скорость продольных волн в пьезопластинах, h – пьезоэлектрическая постоянная, β^s – обратная диэлектрическая проницаемость.

Подставляя выражения (4)–(7) и (14) в граничные условия (8)–(13), получим шесть уравнений с шестью неизвестными A_n, B_n, E_m, F_m, $C(r, z)$, $D(r, z)$. Решая их, найдем выражение для величины смещения u_3, которое связано с выходным напряжением на приемной пьезопластине. Рассмотрим отдельные этапы решения. Подставим u_1 и $u_{2,1}$ из равенств (4) и (5) в равенства (6), (7) и (10). Умножим эти равенства на $(r/a^2)J_0(\nu_{0m}r/a^2)$ и проинтегрируем их по r от 0 до a. В силу ортогональности функций Бесселя члены суммы, для которых $m \neq n$, будут равны 0. Из полученной системы уравнений с тремя неизвестными A_n, B_n и $C(r, 0)$ найдем выражение для $C(r, 0)$:

$$C(r,0) = \frac{4ihD_{10}}{c_1^D}\sum_{n=1}^{\infty} J_0\left(\frac{\nu_{0n}r}{a}\right)\frac{k_n L_{1,n} R_n}{\nu_{0n} J_1(\nu_{0n})}\sin^2\frac{k_n d}{2}, \quad (16)$$

где

$$R_n^{-1} = \gamma_n \cos k_n d + i \sin k_n d,$$

$$\gamma_n = \frac{c_2^D k_2}{c_1^D k_n}, \quad L_{1,n} = \frac{a_1 J_1(\nu_{0n} a_1/a)}{a J_1(\nu_{0n})}.$$

Для нахождения $u_{2,1}$ запишем граничные условия для $z = 0$ со стороны жидкости согласно (1) в следующем виде:

$$\begin{cases} u_{2,1} = C(r,0), & 0 \le r < a \\ u_{2,1} = 0, & r \ge a. \end{cases} \quad (17)$$

Применяя к выражению (5) интегральные преобразования Ханкеля с учетом условия (17) и вычислив известный интеграл для функций Бесселя, получим

$$f(\alpha) = \frac{4ihD_{10}a^2}{c_1^D}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k_n}{k}L_{1,n}R_n\sin^2\frac{k_n d}{2}\frac{J_0(x)}{(\nu_{0n}^2 - x^2)},$$

где $x = \alpha a$.

Отсюда, согласно (5), следует выражение для $u_{2,1}$:

$$u_{2,1} = \frac{4ihD_{10}}{c_1^D}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{L_{1,n}R_n}{k_n}\times$$
$$\times \sin^2\frac{k_n d}{2}\int_0^{\infty} e^{-i\beta z} J_0\left(\frac{rx}{a}\right)\frac{J_0(x)x\,dx}{(\nu_{0n}^2 - x^2)}. \quad (18)$$

Данное выражение описывает акустическое поле, создаваемое зажатой по краю колеблющейся пьезопластиной, с учетом дифракции.

Используя граничные условия (10)–(12), найдем выражения для E_m, F_m. Подставим формулы (6), (7) в равенства (10)–(12), а затем, предварительно умножив полученные выражения на $(r/a^2)J_0(\nu_{0m}r/a^2)$, проинтегрируем по r от 0 до a. В результате для смещений на приемной пьезопластине u_3 будем иметь:

$$u_3 = \frac{16ihD_{10}}{c_1^D}\sum_{m=1}^{\infty} J_0\left(\frac{\nu_{0m}r}{a}\right)\frac{\nu_{0m}R_m}{J_1(\nu_{0m})}\times$$
$$\times \cos(k_m(z - L - d))\sum_{n=1}^{\infty}\frac{L_{1,n}R_n}{k_n}\sin^2\frac{k_n d}{2} I_{mn}, \quad (19)$$

где

$$I_{mn} = \int_0^{\infty} e^{-i\beta z}\frac{xJ_0^2(x)dx}{(\nu_{0m}^2 - x^2)(\nu_{0n}^2 - x^2)}. \quad (20)$$

Полагая $D_3 = 0$, в соответствии с уравнением (15) определим амплитуду электрического напряжения на приемной пьезопластине по формуле

$$U = \frac{2h}{a^2}\int_L^{L+d} dz \int_0^{a_2}(\partial u_3/\partial z) r\,dr,$$

где a_2 – радиус электрода приемной пьезопластины. Подставляя в это равенство выражение для u_3 из (19), получим

$$U = \frac{64ih^2 D_{10}}{k_2 c_2^D}U_{mn}, \quad (21)$$

$$U_{mn} = \sum_{m=1}^{\infty}\gamma_m L_{2,m} R_m \sin^2\frac{k_m d}{2}\times$$
$$\times \sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n L_{1,n} R_n \sin^2\frac{k_n d}{2} I_{mn}, \quad (22)$$

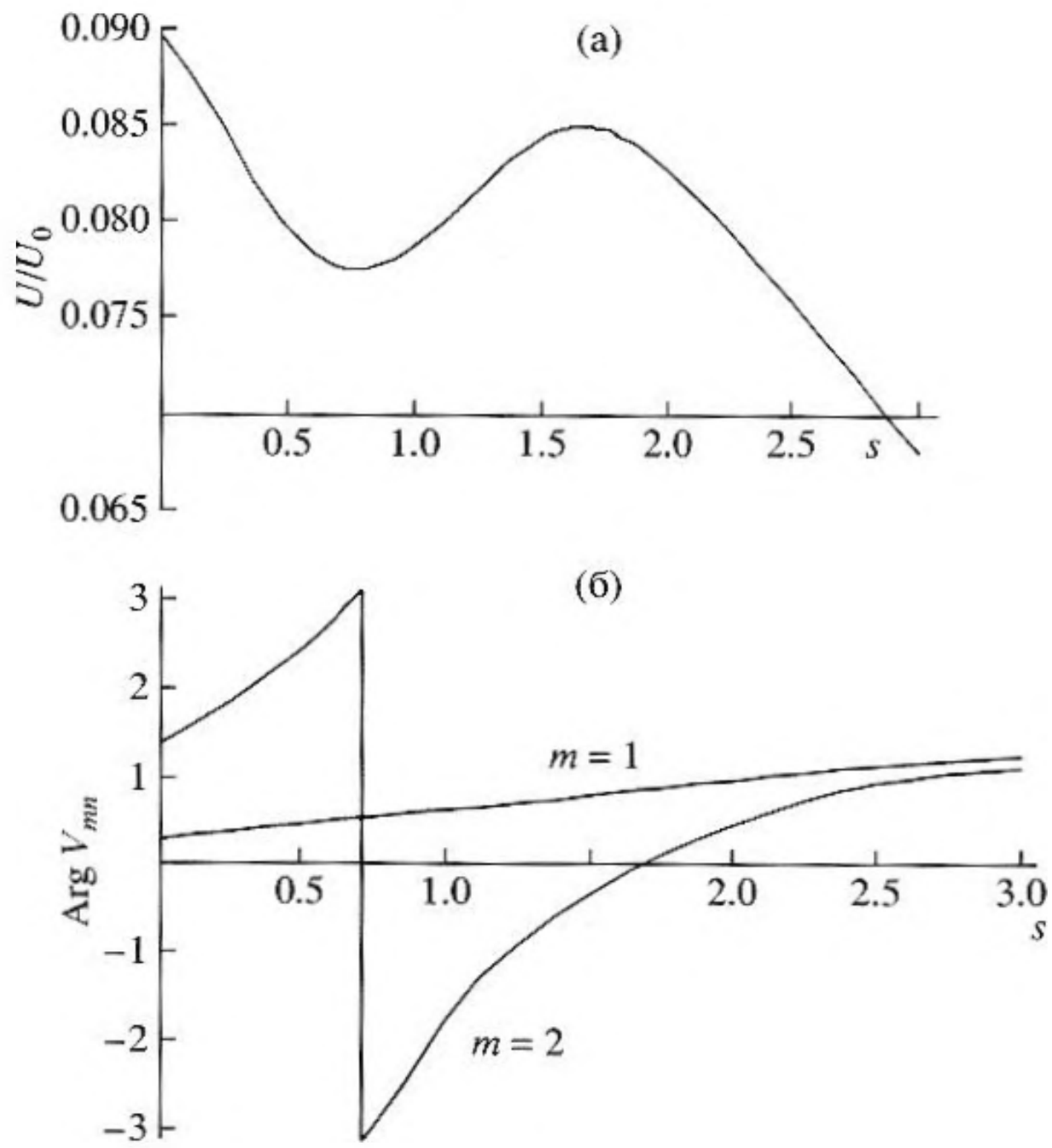

Рис. 1. Зависимости отношения модулей амплитуд электрического напряжения на приемной пьезопластине $|U|/|U_0|$ (а) и аргумента U_{mn} для собственных колебаний приемной пьезопластины с индексами $m = 1$ и $m = 2$ (б) от обобщенного расстояния s при $k_2a = 100$, $\gamma = 0.1$, $a_1/a = a_2/a = 1$.

$$L_{2,m} = \frac{a_2 J_1(\nu_{0m} a_2/a)}{a J_1(\nu_{0m})}. \quad (23)$$

Учитывая, что $h = k_t c_1 \sqrt{\rho_1/\varepsilon_1\varepsilon_0}$ и $D_{10} = \varepsilon_1\varepsilon_0 U_1/d$ [13], $k_1 d = \pi$ приходим к следующему выражению для U:

$$U = \frac{64 i k_t^2 U_1}{\gamma\pi} U_{mn}, \quad (24)$$

где отношение акустических сопротивлений жидкости и пьезопластины $\gamma = c_2^D k_2/c_1^D k_1$, k_t – коэффициент электромеханической связи, ε_1 – относительная диэлектрическая проницаемость при постоянной деформации, $\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ Ф/м, U_1 – амплитуда электрического напряжения на возбуждающей пьезопластине.

В формуле (24) число n определяет номер одной из частот спектра колебаний возбуждаемой пьезопластины, число m – номер частоты спектра колебаний приемной пьезопластины.

В зависимости от параметров k_2a, $s = \lambda z/a^2$, γ находились потери электрического сигнала на приемной пьезопластине, обусловленные дифракцией, $A = 20\lg(|U_0|/|U|)$, где U_0 – значение U при $s = 0$. Величина k_2/k_1 принималась равной 4, а отношение акустических сопротивлений среды и пьезопластины равным $\gamma = 0.1$.

На рис. 1а показан график зависимости отношения модулей амплитуд электрического напряжения на приемной пьезопластине $|U|/|U_0|$ от обобщенного расстояния s. На рис. 1б показаны графики зависимости аргумента U_{mn} от расстояния s для собственных колебаний приемной пьезопластины с индексами $m = 1$ и $m = 2$ (учет собственных колебаний пьезопластины с индексами $m \geq 3$ вследствие малости их амплитуды качественно не изменяет ситуацию). Из графиков видно, что при увеличении s собственные колебания приемной пьезопластины сначала складываются в противофазе, затем в фазе, после чего снова в противофазе. В соответствии с этим минимум на графике функции $|U|/|U_0|$ сменяется максимумом, тогда как для зависимости $A(s)$ будет наблюдаться прямо противоположная динамика (рис. 2).

На рис. 2 представлена зависимость дифракционных потерь A от обобщенного расстояния s при различных значениях отношения радиусов электродов к радиусу пьезопластин. Для объяснения

поведения построенных кривых учтем, что распределение амплитуды собственных колебаний по радиусу пьезопластины в формулах (4) и (7) задается функцией Бесселя нулевого порядка. В результате поверхность пьезопластины можно разбить на части, колеблющиеся с противоположными фазами. Данные части разделены узловыми линиями круговой формы. Число таких частей определяется индексами m или n, а радиус узловых линий соответствует корням функции Бесселя $J_0(\nu_{0m,n}r/a)$. В зависимости от радиусов электродов меняется среднее по радиусу для смещения частиц пьезопластины, а, следовательно, изменяется и величина вклада вносимого каждой модой в амплитуду результирующего колебания пьезопластины, определяемого формулой (24). Например, среднее по радиусу для собственного колебания приемной пьезопластины с индексом $m = 2$ имеет отрицательное значение при $\nu_{02}a_2/a < \nu_{11}$ (см. выражение (23)), где ν_{02} – второй корень функции Бесселя нулевого порядка, ν_{11} – первый корень функции Бесселя первого порядка. Если же $\nu_{02}a_2/a \geq \nu_{11}$, то вклад, вносимый данным собственным колебанием, положительный или равен нулю. Результаты проведенных расчетов показали, что в случае совпадения отношения радиусов электродов излучающей и приемной пьезопластин к радиусу самих пьезопластин дифракционные потери A растут (кривая *3* рис. 2), поскольку собственные колебания, вносящие наибольший вклад в амплитуду приемного сигнала, ослабляют друг друга. Напротив, дифракционные потери A убывают (кривая *2* рис. 2), если размеры излучающей пьезопластины и ее электродов совпадают, тогда, как радиус приемной пьезопластины превосходит радиус ее электродов. В этом случае происходит взаимное усиление собственных колебаний с малыми значениями индексов m и n.

Таким образом, в работе развит теоретический подход к решению граничной задачи о колебаниях круглого зажатого по краям пьезодиска, диаметр которого превосходит диаметр электродов. Исследован характер зависимости потерь ультразвукового сигнала, обусловленных дифракцией, от обобщенного расстояния между излучающей и приемной пьезопластинами. Рассмотрено влияние параметров измерительной системы на дифракцию ультразвукового поля, возбуждаемого колеблющейся пьезопластиной. Проанализированы графики зависимости потерь ультразвукового сигнала, обусловленных дифракцией, от обобщенного расстояния s при различных значениях отношения радиусов электродов к радиусу пьезопластин.

Полученные результаты могут быть использованы для уменьшения дифракционных потерь в

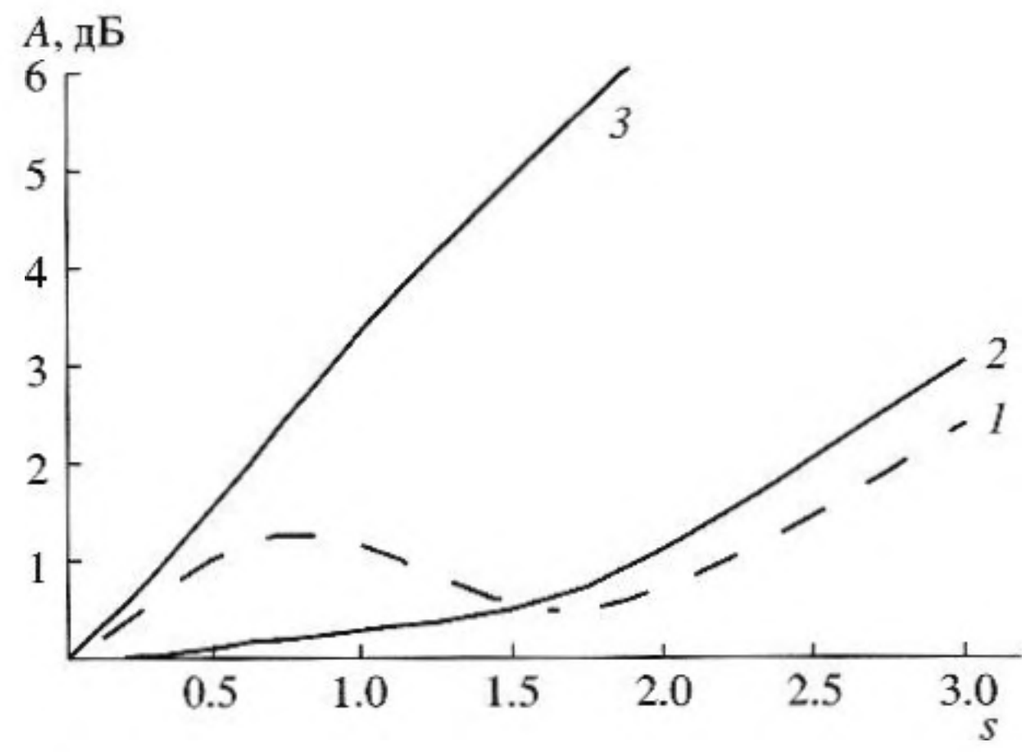

Рис. 2. Зависимость потерь электрического сигнала на приемной пьезопластине, обусловленных дифракцией, A от обобщенного расстояния s для различных значений отношения радиусов электродов к радиусу пьезопластин: $k_2a = 100$, $\gamma = 0.1$, $a_1/a = a_2/a = 1$ (*1*), $a_1/a = 1$, $a_2/a = 0.68$ (*2*), $a_1/a = a_2/a = 0/50$ (*3*).

прецизионных методах измерения коэффициента поглощения и скорости распространения ультразвуковых волн в маловязких жидкостях в диапазоне частот ~1 МГц за счет соответствующего выбора параметров измерительной системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Reewood M.* Dispersion effect in an ultrasonic wave quid. // Proc. Phys. Soc. 1957. V. 70. P. 721–729.
2. *Garome E.F., Witting J.M., Fleury P.A.* Experimental study of diffraction and wave quid effect on ultrasonic attenuation measurements. // J. Acoust. Soc. Amer. 1961. V. 30. № 10. P. 1417–1425.
3. *Tabuchi P., Tannaka Y., Okuda T.* Influence of diffraction effect on ultrasonic absorbtion in liquid. // Mem. Industrial Res. Osaka Univ. 1970. V. 27. P. 1–10.
4. *Tannaka Y.* Ultrasonic relaxation and molecular parameters of ethyl formate // Acustica. 1970. V. 23. № 6. P. 328–333.
5. *Brendel K., Ludwig C.* Measurement of ultrasonic diffraction loss for circular transducers. // Acustica. 1979. V. 32. № 2. P. 110–113.
6. *Bosselar L., Chivers R.C., Filmore P.R.* Effective area to be used in diffraction corrections // J. Acoust. Soc. Amer. 1980. V. 68. № 1. P. 80–84.
7. *Aindov J.D., Chivers R.C., Markiwicz A.* Quantitative investigation of disk ultrasonic sources // J. Acoust. Soc. Amer. 1985. V. 78. № 5. P. 1519–1529.
8. *Кононенко В.С., Хабибуллаев П.К.* Дифракционное поле защемленного по краю колеблющегося пьезодиска // ДАН. Россия. 1995. Т. 340. № 1. С. 39–41.
9. *Галанин В.В., Кононенко В.С.* Дифракционные эффекты в ультразвуковом поле, создаваемом

защемленным по краю колеблющимся пьезодиском. // Акуст. журн. 2002. Т. 48. № 5. С. 609–612.

10. *Laulagnet B.* Sound radiation by a simply supported unbaffled plate. // J. Acoust. Soc. Amer. 1998. V. 103. № 5. P. 2451–2462.

11. *Imamura T.* Specific acoustic impedance of the ultrasonic field by the circular flat transducers. // Bull. NRLM. 1998. V. 47. № 4. P. 45–51.

12. *Shuyu L.* Acoustic field of flexural circular plates for air-coupled ultrasonic transducers. // Acust. Acta acust. 2000. V. 86. № 2. P. 388–391.

13. *Берлинкур Д., Керран Д., Жаффе Г.* Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях. // Физическая акустика. Под ред. Мезона У.–М.: Мир. 1966. Т. 1. Ч.а. С. 204–326.

The Influence of the Electrode Diameter on the Diffraction Effects in the Ultrasonic Field Generated by an Oscillating Piezoelectric Disk

V. V. Galanin* and V. S. Kononenko**

**Volga State Academy of Telecommunication and Information Science, ul. L. Tolstogo 23, Samara, 443010 Russia*
e-mail: galanin_v@mail.ru
***Samara State Technical University, ul. Pervoma@iskaya 18, Samara, 443100 Russia*
e-mail: physics@sstu.samara.ru

Abstract—The problem of ultrasound radiation by a finite-size source is considered. A boundary-value problem is formulated and solved for ultrasonic waves generated by an oscillating piezoelectric disk fixed along the edge and characterized by an eigenfrequency spectrum and a corresponding oscillation amplitude distribution. The influence of the size of electrodes on the diffraction effects arising in the ultrasonic field of the piezoelectric disk is theoretically investigated.