АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2005, том 51, № 4, с. 500–510

УДК 550.344.56

ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ, ДИСПЕРСИОННЫХ И ДИССИПАТИВНЫХ СВОЙСТВ ВОЛН РЭЛЕЯ

© 2005 г. М. А. Кулеш, М. С. Диалло, М. Хольшнайдер

Университет г. Потсдам, факультет прикладной математики, Германия

E-mail: mkulesh@math.uni-potsdam.de

Поступила в редакцию 17.02.2004 г.

Работа посвящена численной обработке многокомпонентных сейсмограмм с использованием вейвлет-анализа. Целью такой обработки является идентификация упругих поверхностных волн Рэлея и определение их свойств. Предлагается новый метод для определения параметров эллиптичности волны в виде частотно-временного спектра, что дает значительные возможности по фильтрации сейсмических сигналов на предмет гашения или, наоборот, выделения рэлеевских составляющих. Предлагается также модель дисперсии и диссипации эллиптических волн, записанная относительно вейвлет-спектров комплексных (двухкомпонентных) сигналов. На основе предложенной модели сформулирована задача нелинейной минимизации, позволяющая с высокой точностью определить групповую и фазовую скорости, а также коэффициент затухания при распространении эллиптической волны Рэлея. Все рассматриваемые методы проиллюстрированы на тестовых сигналах.

ВВЕДЕНИЕ

Предметом исследования в данной работе являются упругие поверхностные волны Рэлея. Траектория колебаний элементов объема в процессе распространения рэлеевских волн имеет эллиптическую форму и лежит в одной плоскости с вектором направления распространения волны. В классическом упругом теле волны Рэлея не имеют дисперсии [1], в несимметричной среде Коссера они обладают дисперсией, обусловленной микровращениями [2], дисперсия волн Рэлея в геологических средах обусловлена вариациями упругих свойств пород с глубиной в земле [3, 4]. Более того, в последнем случае происходит также потеря колебательной энергии (диссипация), что отражается на изменении амплитуды колебаний.

Как правило, мы имеем возможность наблюдать волны Рэлея в твердых телах и геологических средах лишь опосредованно, интерпретируя данные виброизмерений, представленных в виде сейсмограмм. Однако на этих сейсмограммах присутствуют, как правило, не только волны Рэлея, что объясняет потребность в качественных процедурах фильтрации. Один из возможных методов фильтрации рэлеевских волн базируется на поляризационном анализе, целью которого является определение параметров, характеризующих эллиптичность сигнала [5, 6].

Для дальнейшей интерпретации необходимо уметь также определять по исходным сейсмограммам дисперсионные и диссипативные параметры среды, в которой распространяется волна. Эти данные могут быть получены на основании инверсии рэлеевских волн, обладающих дисперсией, при анализе однокомпонентных [7] или многокомпонентных [8] сигналов.

Большинство работ, посвященных экспериментальному исследованию рэлеевских волн (напр., [3], [5, 6]) базируются на фурье-анализе. Однако волны Рэлея являются относительно сложным объектом для изучения; их главная характерная черта – дисперсия – описывается не одной переменной, а функцией частоты. В связи с этим более интересным нам представляется подход спектрально-временного представления [4, 9], замечательный, в частности, тем, что он позволяет различать сигналы именно в соответствии с дисперсионными кривыми. Спектрально-временной подход, известный сегодня как вейвлет-анализ [10–11], получил мощное развитие и по праву стал одним из важнейших методов численного анализа сигналов.

Таким образом, целью данной работы является построение методов обработки многокомпонентных сейсмограмм для определения параметров, характеризующих эллиптичность (коэффициент эллиптичности, фазовый сдвиг, угол наклона эллипса), дисперсию (групповая и фазовая скорость) и диссипацию (функция затухания) волн Рэлея. В качестве основы для этих методов выбран аппарат вейвлет-анализа, а именно непрерывное прямое и обратное вейвлет-преобразование комплексных сигналов.

ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА КОМПЛЕКСНЫХ СИГНАЛОВ

Пусть исходный сигнал получен с многокомпонентного измерительного прибора – акселерометра, велосиметра или сейсмометра. Комбинируя различные компоненты, сконструируем комплексный сигнал $S(t)$. Для этого выберем декартовую систему координат, ось X которой направлена вдоль вектора фазовой скорости распространения волны V_p, а ось Y – нормаль к поверхности. Тогда:

$$S(t) = S_x(t) + iS_y(t), \tag{1.1}$$

где t – время [с], $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица, $S_x(t)$, $S_y(t)$ – две независимые компоненты сигнала, снимаемые с сейсмодатчика и имеющие соответствующие размерности.

Далее будем рассматривать пространство $L^2(\mathbb{R})$ комплексных функций $S(t)$, определенных на всей действительной оси $\mathbb{R}(-\infty, \infty)$ и обладающих конечной энергией (нормой) [11]:

$$S(t) \in L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |S(t)|^2 dt < \infty.$$

Прямое и обратное преобразование Фурье, которое является основой спектрального анализа, в данной работе будем использовать в виде:

$$\begin{aligned} \hat{S}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} S(t) e^{-i\omega t} dt, \\ S(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{S}(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \end{aligned} \tag{1.2}$$

где $\omega = 2\pi f$ – круговая частота, f – физическая частота [Гц], а крышечкой сверху обозначается комплексная функция фурье-образа.

В данной работе будем использовать также преобразование Гильберта $\mathcal{H}S(t)$ [12], которое позволяет разложить сигнал на прогрессивную $S^+(t)$ и регрессивную $S^-(t)$ составляющие. Для прогрессивной составляющей Фурье-коэффициенты отличны от нуля только для $f > 0$, а для регрессивной – для $f < 0$:

$$\begin{aligned} S(t) &= S^+(t) + S^-(t), \\ S^{\pm}(t) &= [S(t) \pm i\mathcal{H}S(t)]/2, \end{aligned} \tag{1.3}$$

где фурье-образ функции $\mathcal{H}\hat{S}(f)$ определяется соотношением

$$\mathcal{H}\hat{S}(f) = \begin{cases} -i\hat{S}(f), & f \geq 0, \\ i\hat{S}(f), & f < 0. \end{cases} \tag{1.4}$$

Для анализа временного распределения частот в сигнале будем использовать непрерывное вейвлет-преобразование [10–11]. Теория непрерывного вейвлет-преобразования комплексных сигналов хорошо развита в [10], здесь же мы приведем лишь основные соотношения. Прямое и обратное вейвлет-преобразование комплексного сигнала $S(t)$ имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_g S(t, a) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a} g^*\left(\frac{\tau - t}{a}\right) S(\tau) d\tau = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} \hat{g}^*(a\omega) \hat{S}(\omega) d\omega, \\ S(t) &= \frac{1}{C_{g,h}} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a^2} h\left(\frac{t-\tau}{a}\right) \mathcal{W}_g S(\tau, a) d\tau da, \\ C_{g,h} &= \int_0^{+\infty} (\hat{g}^*(\omega)\hat{h}(\omega) + \hat{g}^*(-\omega)\hat{h}(-\omega)) \frac{d\omega}{\omega}, \end{aligned} \tag{1.5}$$

где $g(\cdot)$, $h(\cdot) \in L^2(\mathbb{R})$ – вещественные или комплексные вейвлеты, $C_{g,h}$ – нормализующий коэффициент, звездочка сверху обозначает комплексное сопряжение, а $\mathcal{W}_g S(t, a)$ – комплексный вейвлет-образ, зависящий от безразмерного масштабного $a \in \mathbb{R}$ и размерного временного $t \in \mathbb{R}$ факторов. В отличие от большинства работ, где используется непрерывное вейвлет-преобразование комплексных сигналов, фактор a принимает здесь как положительные, так и отрицательные значения.

В нашем случае в качестве масштаба удобно выбирать физическую частоту, которая связана с безразмерным фактором a соотношением: $a = f_0/f$, где f_0 – характерная (средняя) частота вейвлета [Гц]. Тогда:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_g S(t, f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f}{f_0} g^*\left(\frac{f(\tau - t)}{f_0}\right) S(\tau) d\tau = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i \varphi t} \hat{g}^*\left(\frac{\varphi f_0}{f}\right) \hat{S}(\varphi) d\varphi, \\ S(t) &= \frac{1}{C_{g,h}} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(f(t-\tau)/f_0) \mathcal{W}_g S(\tau, f) d\tau \frac{df}{f_0}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

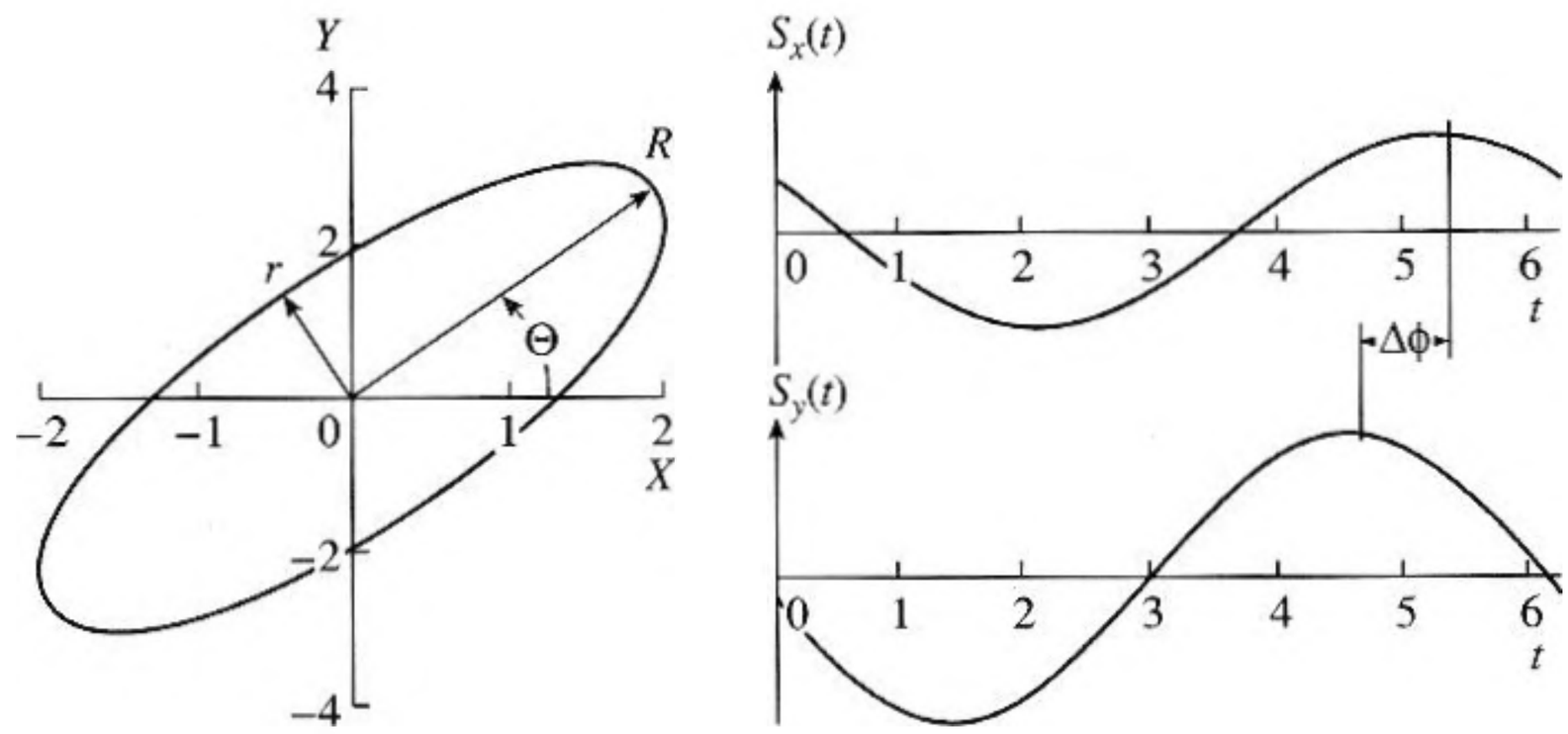

Рис. 1. Параметры, характеризующие эллиптический сигнал.

Таким образом, в отличие от фурье-преобразования (1.2), вейвлет-преобразование обеспечивает двумерную развертку исследуемого комплексного сигнала, при этом масштаб и время рассматриваются как независимые переменные. В результате появляется возможность анализировать свойства сигнала одновременно в физическом (время) и масштабном (частота) пространствах.

В качестве вейвлета для обратного преобразования может быть выбрана δ-функция, что дает нам очень эффективную реконструкционную формулу [10]:

$$S(t) = \frac{1}{C_{g,\delta}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathcal{W}_g S(t,f)}{f f_0}df.$$

Как правило, и для прямого, и для обратного преобразований выбирают одинаковый вейвлет, который называют анализирующим. Выбор анализирующего вейвлета определяется тем, какие характерные колебательные формы содержатся в сигнале. Например, для анализа прямоугольных колебаний больше подходят вещественный HAAR-вейвлет или похожий на него, но симметричный FHAT-вейвлет. Для анализа сейсмических сигналов более подходящими являются вещественные вейвлеты, построенные на основе производных от гауссиана различных порядков или комплексные вейвлеты, например, вейвлет Морле [10, 11]

$$g(t) = e^{2\pi i f_0 t}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}, \quad \hat{g}(\omega) = \sigma e^{-\frac{\sigma^2(\omega-2\pi f_0)^2}{2}}. \quad (1.7)$$

где σ – параметр вейвлета. Строго говоря, вейвлет Морле не удовлетворяет соотношению (1.5.3), так как приводит к сингулярности при частотах, близких к нулю. Это необходимо учитывать при практической реализации.

Вейвлет Морле является прогрессивным, т.е. он имеет нулевые коэффициенты Фурье при отрицательных частотах. Это позволяет при его использовании выделить по аналогии с (1.3) прогрессивную и регрессивную составляющие вейвлет-спектра:

$$\mathcal{W}_g S(t,f) = \mathcal{W}_g^+ S(t,f) + \mathcal{W}_g^- S(t,f), \quad (1.8)$$

где

$$\mathcal{W}_g^+ S(t,f) = \begin{cases}\mathcal{W}_g S(t,f), & f \ge 0\\ 0, & f < 0,\end{cases}$$

$$\mathcal{W}_g^- S(t,f) = \begin{cases}0, & f \ge 0\\ \mathcal{W}_g S(t,f), & f < 0.\end{cases}$$

При использовании непрогрессивных вейвлетов (напр., вещественных) такое разделение необходимо проводить с предварительным вычислением преобразования Гильберта исходного сигнала, что усложняет процедуру численного расчета.

Спектр $\mathcal{W}_g S(t,f)$ содержит информацию о частотно-временном распределении амплитуд $A(t,f)$ и фаз $\Phi(t,f)$ в сигнале:

$$\mathcal{W}_g S(t,f) = A(t,f)e^{i\Phi(t,f)},$$
$$A(t,f) = |\mathcal{W}_g S(t,f)|, \quad \Phi(t,f) = \arg \mathcal{W}_g S(t,f). \quad (1.9)$$

Это представление будем использовать в дальнейшем для раздельной визуализации модуля и фазы комплексного вейвлет-спектра.

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ВОЛН РЭЛЕЯ

В силу сравнительно устойчивой формы рэлеевской волны удобным инструментом для ее обработки является поляризационный анализ [5].

В самом общем виде свойства эллиптического сигнала характеризуются следующими параметрами, зависящими от времени (рис. 1):

1) $R \ge 0$ – большая полуось эллипса.

2) r – малая полуось, $0 \le r < R$.

3) $\rho = r/R$ – коэффициент эллиптичности.

4) $\Theta \in (-\pi/2, \pi/2]$ – угол наклона (поворота) эллипса. На протяжении некоторого времени рэлеевская волна сохраняет свою геометрию и строго вертикальную ориентацию, т.е $\Theta = \pi/2$, что и является критерием, позволяющим идентифицировать такую волну на сейсмограмме.

5) $\Delta\phi \in (-\pi, \pi]$ – фазовый сдвиг между компонентами $S_x(t)$ и $S_y(t)$.

Параметры эллиптичности во временном пространстве можно определить с использованием метода комплексного следа [6]. В его основе лежит преобразование вещественных компонент $S_x(t)$ и $S_y(t)$ сигнала (1.1) к комплексным при помощи преобразования Гильберта (1.3)–(1.4):

$$C_x(t) = [S_x(t) + i\mathcal{H}S_x(t)]/2,$$

$$C_y(t) = [S_y(t) + i\mathcal{H}S_y(t)]/2.$$

Для полученных таким образом комплексных сигналов $C_x(t)$ и $C_y(t)$ по отдельности рассматриваются вещественные и мнимые части и определяется фазовый сдвиг, на основе которого получают все остальные параметры эллиптичности:

$$\begin{gathered}\Delta\phi(t) = \arg[C_x^*(t)C_y(t)],\\ R^2(t) = [S_0(t) + \sqrt{S_1^2(t) + S_2^2(t)}]/2,\\ r^2(t) = [S_0(t) - \sqrt{S_1^2(t) + S_2^2(t)}]/2,\\ \Theta = \frac{1}{2}\arg[S_1(t) + iS_2(t)]\mathrm{mod}\pi,\end{gathered} \tag{2.1}$$

где

$$S_0(t) = |C_x(t)|^2 + |C_y(t)|^2,$$

$$S_1(t) = |C_x(t)|^2 - |C_y(t)|^2,$$

$$S_2(t) = 2|C_x(t)||C_y(t)|\cos(\Delta\phi(t)).$$

Здесь mod – операция деления по модулю.

Параметры эллиптичности в частотном пространстве. В сейсмологии широко используется также метод Накамура [13] (H/V метод), который позволяет определить коэффициент эллиптичности ρ как функцию частоты и базируется на вычислении отношения горизонтального и вертикального фурье-спектров

$$\rho(f) \simeq F_h(f)/F_v(f), \tag{2.2}$$

где $F_h(f)$ – сглаженная плотность энергетического спектра для горизонтального сигнала, а $F_v(f)$ – для вертикального. Данная плотность вычисляется на основе фурье-преобразования (1.2) с использованием специальных алгоритмов сглаживания [14] (осреднения фурье-коэффициентов по нескольким временным окнам).

Параметры эллиптичности в вейвлет-пространстве. Предлагаемый в данной работе новый метод определения параметров эллиптичности является обобщением двух предыдущих и дает возможность определить большую и малую полуоси, угол наклона и фазовый сдвиг как функции времени и частоты. Основой предлагаемого метода является описание эллипса на комплексной плоскости с использованием двух комплексных чисел A^+ и A^- и двух действительных ω^+ и ω^-: $C(\tau) = A^+e^{i\omega^+\tau} + A^-e^{-i\omega^-\tau}$.

Отсюда, исходя только из геометрических соображений, можно получить следующие соотношения:

$$\Delta\phi = \arg\left(\frac{A^+ + (A^-)^*}{A^+ - (A^-)^*}\right) + \frac{\pi}{2},$$

$$R = |A^+| + |A^-|, \quad r = \big||A^+| - |A^-|\big|,$$

$$\Theta = \frac{1}{2}\arg(A^+A^-)\mathrm{mod}\pi.$$

Отталкиваясь от свойства (1.8) вейвлет-преобразования, в случае, когда используется комплексный прогрессивный вейвлет, можем разложить вейвлет спектр на прогрессивную и регрессивную составляющие. Если ввести в рассмотрение мгновенную круговую частоту как производную аргумента комплексного спектра $\omega^\pm(t, f) = \partial \arg \mathcal{W}_g^\pm S(t,f)/\partial t$, то в окрестности момента времени t каждая из составляющих может быть разложена следующим образом:

$$\mathcal{W}_g S(t+\tau, f) \simeq \mathcal{W}_g^+ S(t, f)e^{i\omega^+(t,f)\tau} + \mathcal{W}_g^- S(t, f)e^{-i\omega^-(t,f)\tau}.$$

Отсюда можем получить частотно-временной спектр каждого параметра:

$$\begin{gathered}\Delta\phi(t, f) = \arg\left(\frac{\mathcal{W}_g^+ S(t, f) + (\mathcal{W}_g^- S(t, f))^*}{\mathcal{W}_g^+ S(t, f) - (\mathcal{W}_g^- S(t, f))^*}\right) + \frac{\pi}{2},\\ R(t, f) = |\mathcal{W}_g^+ S(t, f)| + |\mathcal{W}_g^- S(t, f)|,\\ r(t, f) = \big||\mathcal{W}_g^+ S(t, f)| - |\mathcal{W}_g^- S(t, f)|\big|,\\ \Theta(t, f) = \frac{1}{2}\arg[\mathcal{W}_g^+ S(t, f)\mathcal{W}_g^- S(t, f)]\mathrm{mod}\pi.\end{gathered} \tag{2.3}$$

На основе (2.3) можно обратно получить параметры как функции только времени или только частоты, и этот обратный переход, в отличие от прямых методов (2.1) и (2.2), дает широкие воз-

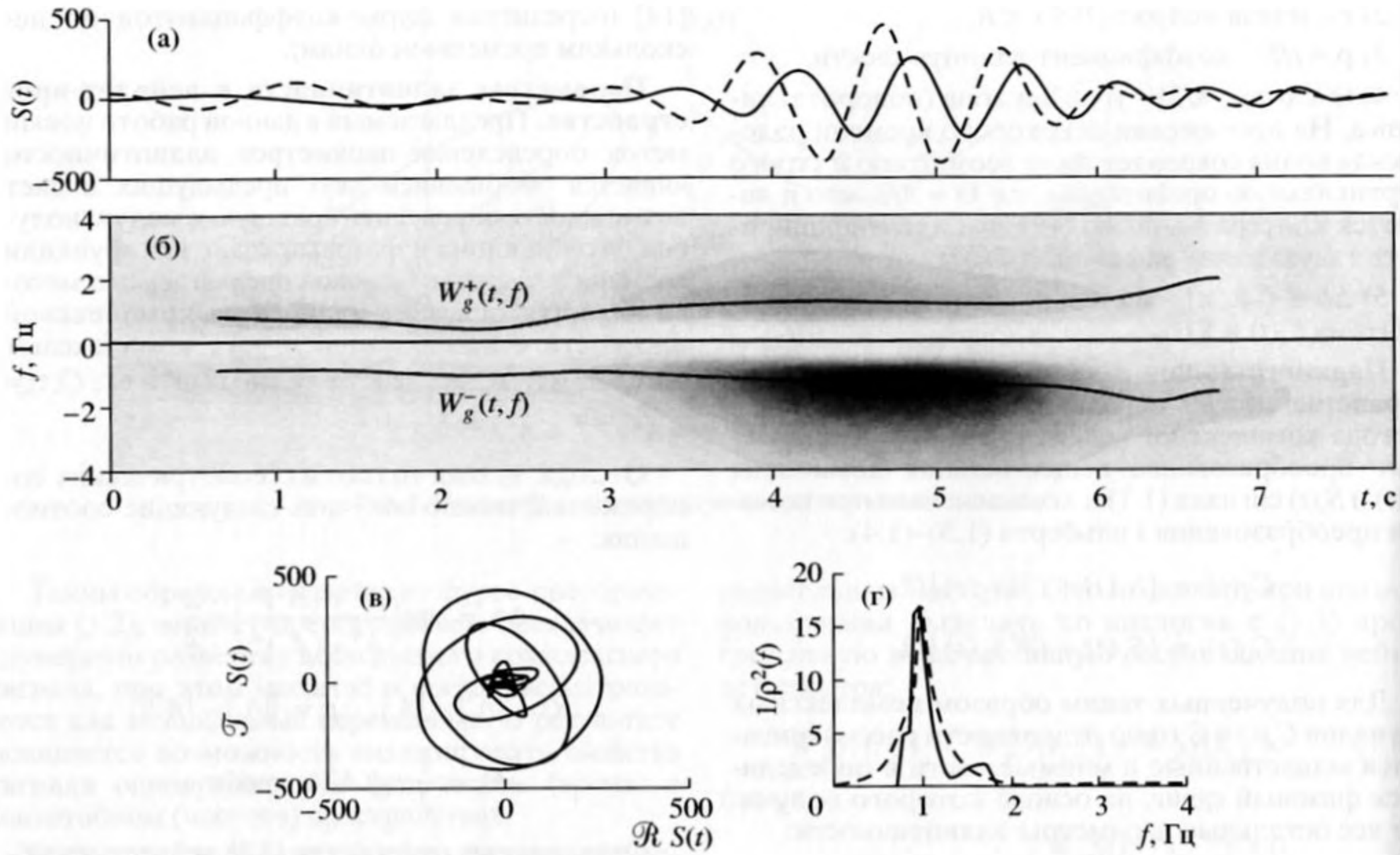

Рис. 2. Характерный вид эллиптического сигнала.

можности по частотно-временной фильтрации всех эллиптических свойств. Возможно несколько алгоритмов такого обратного перехода:

1) Первый возможный алгоритм базируется на расчете всех параметров в форме (2.3) и осреднении их по частоте, но только в тех областях вейвлет-спектра, где "эллиптичность", которая характеризуется параметром $r(t, f)$, выражена наиболее ярко.

2) Второй алгоритм состоит в следующем. На исходных вейвлет-спектрах $\mathcal{W}_g^+ S(t,f)$ и $\mathcal{W}_g^- S(t,f)$ выбираются так называемые скелетоны Γ^+ и Γ^-. Для момента времени t значение Γ^+ дает частоту, соответствующую локальному максимуму модуля прогрессивного вейвлет-спектра, а Γ^- – регрессивного. Скелетон фактически является крайним случаем области, описывающей наиболее характерное поведение сигнала. Если взять скелетон как функцию времени и заменить им частоту в (2.3), то мы получим тем самым временное осреднение параметров. Если же представить скелетон как функцию частоты и заменить им в (2.3) переменную времени, то это даст нам частотное осреднение.

Основной идеей в использовании таких осреднений является то, что можно из сложного сигнала извлечь для анализа только одну определенную моду, чего не позволяют сделать метод комплексного следа и H/V метод.

Рассмотрим пример, который является синтетическим сигналом, имеющим только одну частотную моду. На рис. 2а сплошной линией изображена действительная часть этого сигнала, а пунктирной – мнимая. На рис. 2б приведены изображения модулей прогрессивного и регрессивного вейвлет-спектров и сплошной линией – скелетоны Γ^+ и Γ^-, а на рис. 2в – изображение сигнала на комплексной плоскости.

С использованием скелетонов в виде $\Gamma_c^+(f)$ и $\Gamma_c^-(f)$ мы можем определить эллиптические параметры, зависящие от частоты. Рассматривая параметр $\rho(f)$, можем сравнить H/V метод (рис. 2г, пунктирная линия) и новый предлагаемый метод (рис. 2г, сплошная линия). Можно сделать вывод, что оба эти метода в принципе соответствуют друг другу.

На рис. 3а дано изображение значений большой и малой полуоси эллиптического сигнала на частотно-временной плоскости. Эллиптические

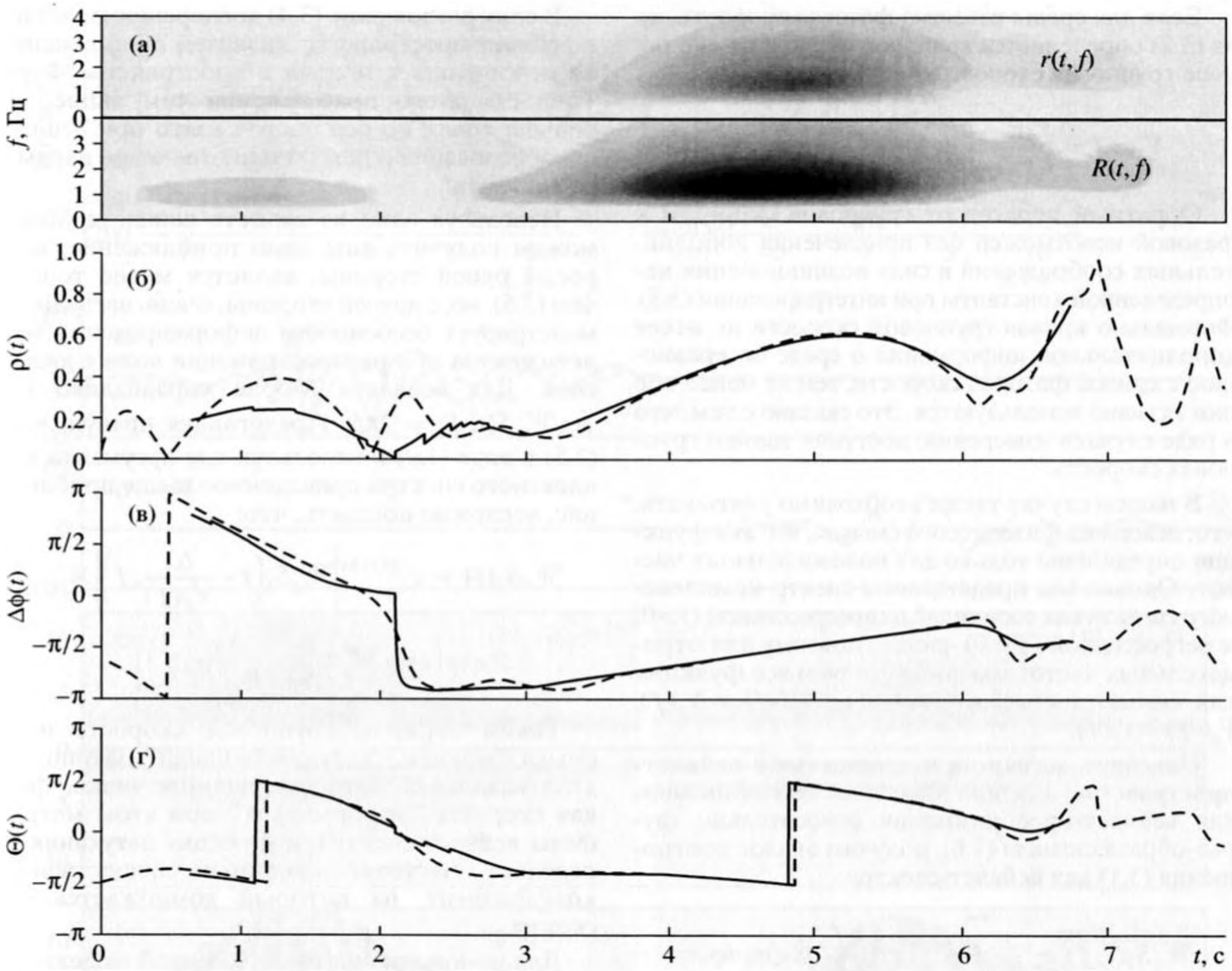

Рис. 3. Эллиптические параметры, определенные с использованием метода комплексного следа и нового предлагаемого метода.

параметры, определенные по методу комплексного следа (2.1), приведены на рис. 3б–3г пунктирной линией. Новые эллиптические параметры определяются в данном случае с использованием скелетонов в виде $\Gamma_c^+(t)$ и $\Gamma_c^-(t)$ и приведены на рис. 3б–3г сплошной линией. Видно, что метод комплексного следа и новый метод также соответствуют друг другу.

ДИСПЕРСИЯ И ДИССИПАЦИЯ ВОЛН РЭЛЕЯ

Будем считать, что среда стационарна, и рассмотрим два комплексных сигнала $S_1(t)$ и $S_2(t)$ вида (1.1), полученных с разных измерительных приборов с удалением Δx. В случае, когда сигналов не два, а больше, то все приведенные ниже соотношения сохраняют свою силу и используются для каждой пары сигналов из этого набора.

Описание дисперсии и диссипации в фурье-пространстве. В [3] предлагается модель, которая в случае изотропной среды позволяет связать фурье-спектры комплексных сигналов $S_1(t)$ и $S_2(t)$:

$$\hat{S}_2(f) = e^{-[ik(f)+\alpha(f)]\Delta x}\hat{S}_1(f), \tag{3.1}$$

где $\alpha(f)$ – зависящий от частоты параметр среды, определяющий диссипацию (функция затухания), а $k(f)$ – волновое число, описывающее дисперсию.

В качестве дисперсионных параметров выбирают, как правило, функции фазовой и групповой скорости, которые определяются самим волновым числом $k(f)$ и его производной [4]:

$$k(f) = \frac{2\pi f}{V_p(f)}, \quad k'(f) = \frac{2\pi}{V_g(f)}. \tag{3.2}$$

Если для среды известна фазовая скорость, то из (3.2) определяется волновое число и на его основе групповая скорость:

$$V_g(f) = \frac{2\pi}{k'(f)} = \frac{2\pi V_p^2(f)}{V_p(f) - fV_p'(f)}. \qquad (3.3)$$

Обратный переход от групповой скорости к фазовой невозможен без привлечения дополнительных соображений в силу возникновения неопределенной константы при интегрировании (3.3). Формально кривая групповой скорости не несет дополнительной информации о среде по сравнению с кривой фазовой скорости, тем не менее обе они активно используются. Это связано с тем, что в ряде случаев измерению доступна только групповая скорость.

В нашем случае также необходимо учитывать, что, исходя из физического смысла, все эти функции определены только для положительных частот. Однако мы представляем спектр комплексного сигнала как состоящий из прогрессивной ($f > 0$) и регрессивной ($f < 0$) частей, поэтому для отрицательных частот мы доопределяем все функции как симметричные: $\alpha(-f) = \alpha(f)$, $V_p(-f) = V_p(f)$, $V_g(-f) = V_g(f)$.

Описание дисперсии и диссипации в вейвлет-пространстве. Воспользовавшись соотношением для вейвлет-преобразования относительно фурье-образа сигнала (1.6), получим аналог соотношения (3.1) для вейвлет-спектра:

$$\mathcal{W}_g S_2(t, f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i\varphi t}\hat{g}^*\left(\frac{\varphi f_0}{f}\right)\hat{S}_2(\varphi)d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i\varphi t}\hat{g}^*\left(\frac{\varphi f_0}{f}\right)e^{-[ik(f)+\alpha(f)]\Delta x}\hat{S}_1(\varphi)d\varphi.$$

Для функции $k(\varphi)$ применим разложение в ряд Тейлора в окрестности точки f, ограничиваясь только первой производной:

$$k(\varphi) \simeq k(f) + (\varphi - f)k'(f). \qquad (3.4)$$

Аналогично поступим с функцией затухания и, преобразуя подынтегральное выражение, получим:

$$\mathcal{W}_g S_2(t, f) = e^{-i[k(f) - fk'(f)]\Delta x}e^{-\alpha(f)\Delta x}\times$$
$$\times \mathcal{W}_g S_1(t - k'(f)\Delta x/(2\pi), f), \qquad (3.5)$$

или относительно функций групповой и фазовой скорости

$$\mathcal{W}_g S_2(t) = e^{-2\pi if\left(\frac{1}{V_p(f)} - \frac{1}{V_g(f)}\right)\Delta x}\times$$
$$\times e^{-\alpha(f)\Delta x}\mathcal{W}_g S_1\left(t - \frac{\Delta x}{V_g(f)}, f\right). \qquad (3.6)$$

В силу разложения (3.4) дисперсионная модель в вейвлет-пространстве является приближенной по отношению к модели в пространстве Фурье. Точность этого приближения тем выше, чем больше точек по оси частот взято при вейвлет-преобразовании и чем больше значение параметра вейвлета.

Используя одно из свойств вейвлета Морле, можем получить еще одно приближение, которое, с одной стороны, является менее точным, чем (3.6), но, с другой стороны, очень наглядно демонстрирует особенности деформирования вейвлет-спектра при распространении волн с дисперсией. Для вейвлета Морле справедливо [10]: $\arg\mathcal{W}_g S(t, f) \simeq 2\pi ft$. Представляя правую часть (3.5) в виде (1.9) и используя для аргумента комплексного спектра приведенное выше приближение, несложно показать, что:

$$\mathcal{W}_g S_2(t) = e^{-\alpha(f)\Delta x}\left|\mathcal{W}_g S_1\left(t - \frac{\Delta x}{V_g(f)}, f\right)\right|\times$$
$$\times \exp\left[i\arg\mathcal{W}_g S_1\left(t - \frac{\Delta x}{V_p(f)}, f\right)\right]. \qquad (3.7)$$

Таким образом, групповая скорость имеет смысл функции, "деформирующей" матрицу модуля вейвлет-спектра сигнала-источника, фазовая скорость "деформирует" при этом матрицу фазы вейвлет-спектра, а функция затухания определяет частотно-зависимый вещественный коэффициент, на который домножается весь спектр.

Для демонстрации предложенной модели рассмотрим пример. В качестве возможной аппроксимации для функции фазовой скорости используем трехпараметрическую экспоненциальную аппроксимацию, а групповую скорость определим при этом из (3.3):

$$V_p(f) = V_1 + \Delta V e^{-\frac{f^2}{2\sigma^2}}. \qquad (3.8)$$

В качестве простейшей модели для функции затухания выберем линейную зависимость коэффициента затухания от частоты $\alpha(f) = \beta f$ с одним параметром β. Для параметров задачи используем следующие значения: $V_1 = 1300$ м/с, $\Delta V = 200$ м/с, $\sigma = 6$ Гц, $\Delta x = 3500$ м, $\beta = 3 \times 10^{-5}$ 1/(Гц с).

На рис. 4а приведены графики фазовой (сплошная линия) и групповой (пунктирная линия) скоростей для данных параметров. Рис. 4б демонстрирует изменение модулей фурье-коэффициентов из-за наличия затухания, сплошная линия соответствует спектру $\hat{S}_1(f)$, пунктирная – спектру $\hat{S}_2(f)$. На рис. 4в проиллюстрирован сигнал $S_1(t)$ (сплошная линия – действительная часть, пунктирная – мнимая), а на рис. 4г – сигнал $S_2(t)$,

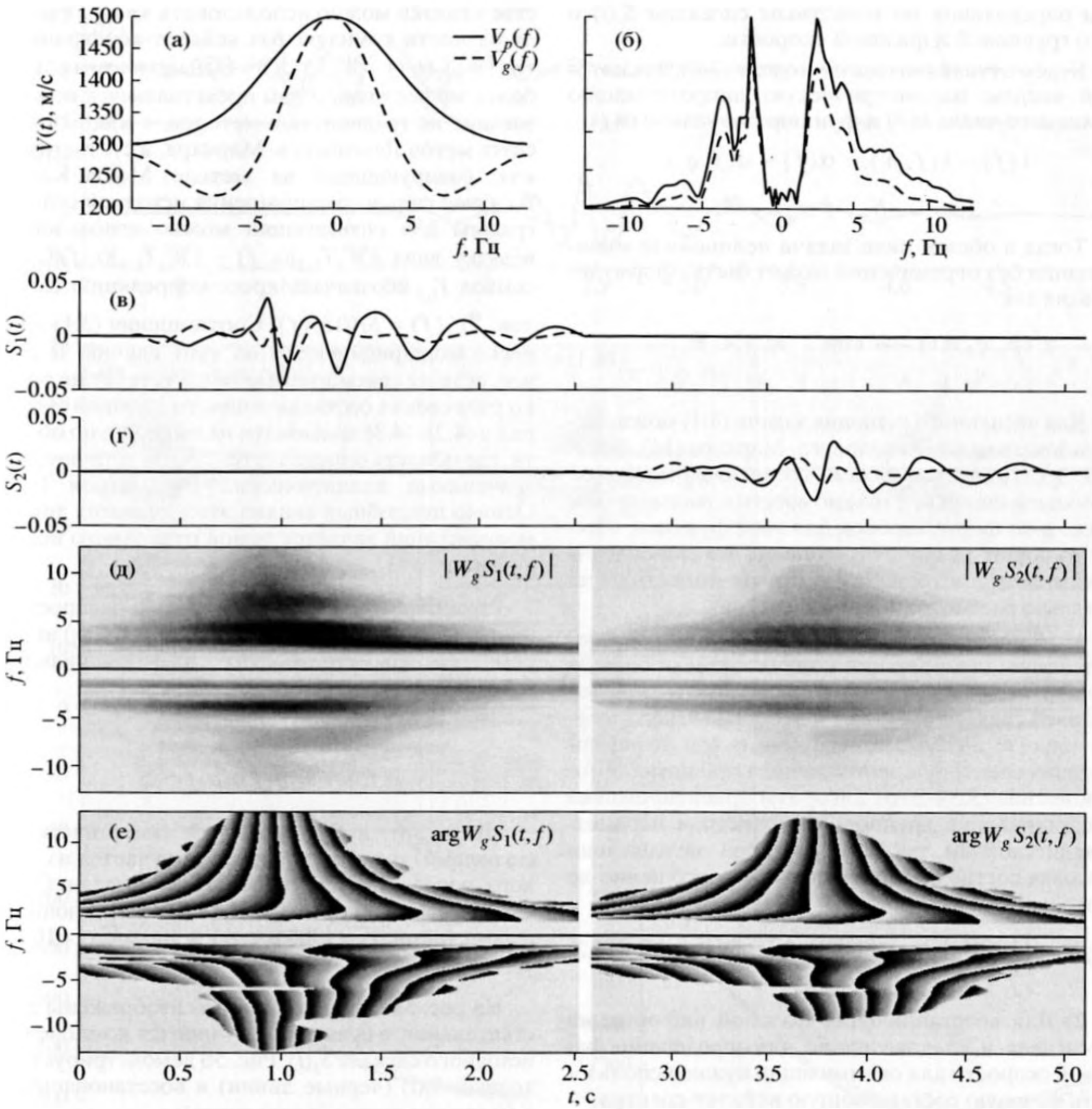

Рис. 4. Сравнение дисперсионных моделей в фурье- и вейвлет-пространствах.

полученный при помощи соотношений (3.6) (черные сплошная и пунктирная линии) и (3.1) (линии серого цвета). На рис. 4д изображены модули вейвлет-спектров сигналов $S_1(t)$ и $S_2(t)$, а на рис. 4е – соответствующие фазы. Геометрическое искажение спектра $\mathcal{W}_g S_2(t)$ относительно $\mathcal{W}_g S_1(t)$ обусловлено зависимостью от частоты фазовой и групповой скоростей и проиллюстрировано ранее в (3.7). Данный пример демонстрирует хорошее соответствие моделей, определенных в фурье-пространстве (3.1) и вейвлет-пространстве (3.6).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГРУППОВОЙ И ФАЗОВОЙ СКОРОСТИ

В качестве примера практического применения модели, приведенной в предыдущем разделе, сформулируем задачу нелинейной минимизации

для определения по известным сигналам $S_1(t)$ и $S_2(t)$ групповой и фазовой скорости.

Будем отталкиваться от модели (3.5), для которой введем параметрическую аппроксимацию волнового числа $k(f)$ и функции затухания $\alpha(f)$:

$$k(f) \simeq k(f, p_i), \quad \alpha(f) \simeq \alpha(f, q_j),$$
$$i = 1 \ldots N, \quad j = 1 \ldots M.$$

Тогда в общем виде задача нелинейной минимизации без ограничений может быть сформулирована так:

$$\chi^2(p_i, q_j, \Delta x) \longrightarrow \min, \quad p_i, g_j \in \mathbb{R}, \quad i = 1 \ldots N, \quad j = 1 \ldots M. \tag{4.1}$$

Для численного решения задачи (4.1) можно использовать метод Левенберга–Маркара [14]. Функция $\chi^2(\cdot)$ является в нем среднеквадратической функцией ошибки, и можно ввести в рассмотрение несколько формулировок для этой функции, обеспечивающих различную точность восстановления искомых параметров. В силу ограниченности места детально рассмотрим лишь две из них:

1) Наиболее простая с точки зрения реализации задача оптимизации получится, если определить функцию ошибки $\chi^2(\cdot)$ как разницу модулей вейвлет-спектра $|\mathcal{W}_g S_2(t, f)|$ второго сигнала и величины $|\mathcal{W}_g S_n(t, f)|$, полученной путем деформирования спектра первого сигнала при помощи соотношения (3.5). Этот алгоритм ориентирован на восстановление групповой скорости и параметров диссипации, так как при такой оптимизации фазовая составляющая в сигнале совершенно не учитывается:

$$\chi_1^2 = \iint_{t\,f} [|\mathcal{W}_g S_2(t, f)| - |\mathcal{W}_g S_n(t, f)|]^2 dt df. \tag{4.2}$$

2) Для восстановления фазовой информации из сигнала, и, следовательно, для определения фазовой скорости для оптимизации нужно использовать фазовую составляющую вейвлет-спектра:

$$\chi_2^2 = \iint_{t\,f} [\arg \mathcal{W}_g S_2(t, f) - \arg \mathcal{W}_g S_n(t, f)]^2 dt df. \tag{4.3}$$

При этом необходимо учитывать, что фазовая оптимизация более чувствительна к начальным условиям, поэтому в качестве начальных значений параметров p_i и q_i необходимо выбирать результаты оптимизации модуля (4.2). Кроме этого, значительную роль играет значение параметра вейвлета, при увеличении этого параметра точность восстановления фазовой скорости повышается.

При использовании методов, позволяющих оптимизировать комплексные функции, в качестве невязки можно использовать квадрат модуля разности комплексных вейвлет-коэффициентов $|\mathcal{W}_g S_2(t, f) - \mathcal{W}_g S_n(t, f)|^2$. Однако в этом случае более эффективным нам представляется использование не градиентных методов, к каким относится метод Левенберга–Маркара, а статистических, базирующихся на методе Монте-Карло. В случае сильного зашумления исходной сейсмограммы для оптимизации можно использовать невязку вида $|[\mathcal{W}_g T_{1,2}](t, f) - [\mathcal{W}_g T_{1,n}](t, f)|^2$, где символ $T_{i,j}$ обозначает кросс-корреляцию сигналов: $\hat{T}_{i,j}(f) = \hat{S}_i(f)\hat{S}_j(f)$. Соотношения (3.1)–(3.7) легко модифицируются на этот случай. В случае, если на сейсмограмме присутствует не только рэлеевская составляющая, то двойной интеграл в (4.2)–(4.3) заменяется на интеграл по области, где область определяется соответствующими значениями эллиптических параметров (2.3). Однако подробный анализ этих и многих других модификаций является темой отдельного исследования.

Рассмотрим пример. Пусть сигнал распространяется без затухания, и для функции $k(f, p_i)$ выберем трехпараметрическую экспоненциальную аппроксимацию:

$$k(f, p_i) = p_1 f + p_2 f e^{-\frac{f^2}{2p_3^2}}.$$

Пусть $S_1(t)$ и $S_2(t)$ являются синтетическими сигналами, где второй сигнал получается из первого посредством дисперсионной модели (3.1)–(3.3) с фазовой скоростью V_p (3.8) со следующими параметрами: $V_1 = 1300$ м/с, $\Delta V = 300$ м/с, $\sigma = 10$ Гц, $\Delta x = 2000$ м.

На рис. 5а сплошной линией изображены действительная, а пунктирной – мнимая компоненты исходного сигнала $S_1(t)$. Рис. 5б демонстрирует исходный $S_2(t)$ (черные линии) и восстановленный $S_n(t)$ (линии серого цвета) сигналы.

Рис. 5в дает представление о модулях исходных и восстановленного с применением процедуры (4.1)–(4.3) вейвлет-спектров, где $|\mathcal{W}_g S_n(t, f)|$ – модуль спектра восстановленного сигнала. На рис. 5г изображены фазы этих спектров.

На рис. 5д сплошной линией изображена теоретическая фазовая скорость, использованная для генерации исходных сигналов $S_1(t)$ и $S_2(t)$, пунктирной – восстановленная фазовая скорость для функции ошибки (4.2), а штрихпунктирной – для (4.3). На рис. 5е приведены аналогичные кривые для групповой скорости. Можно сделать вывод о вполне приемлемой точности определения

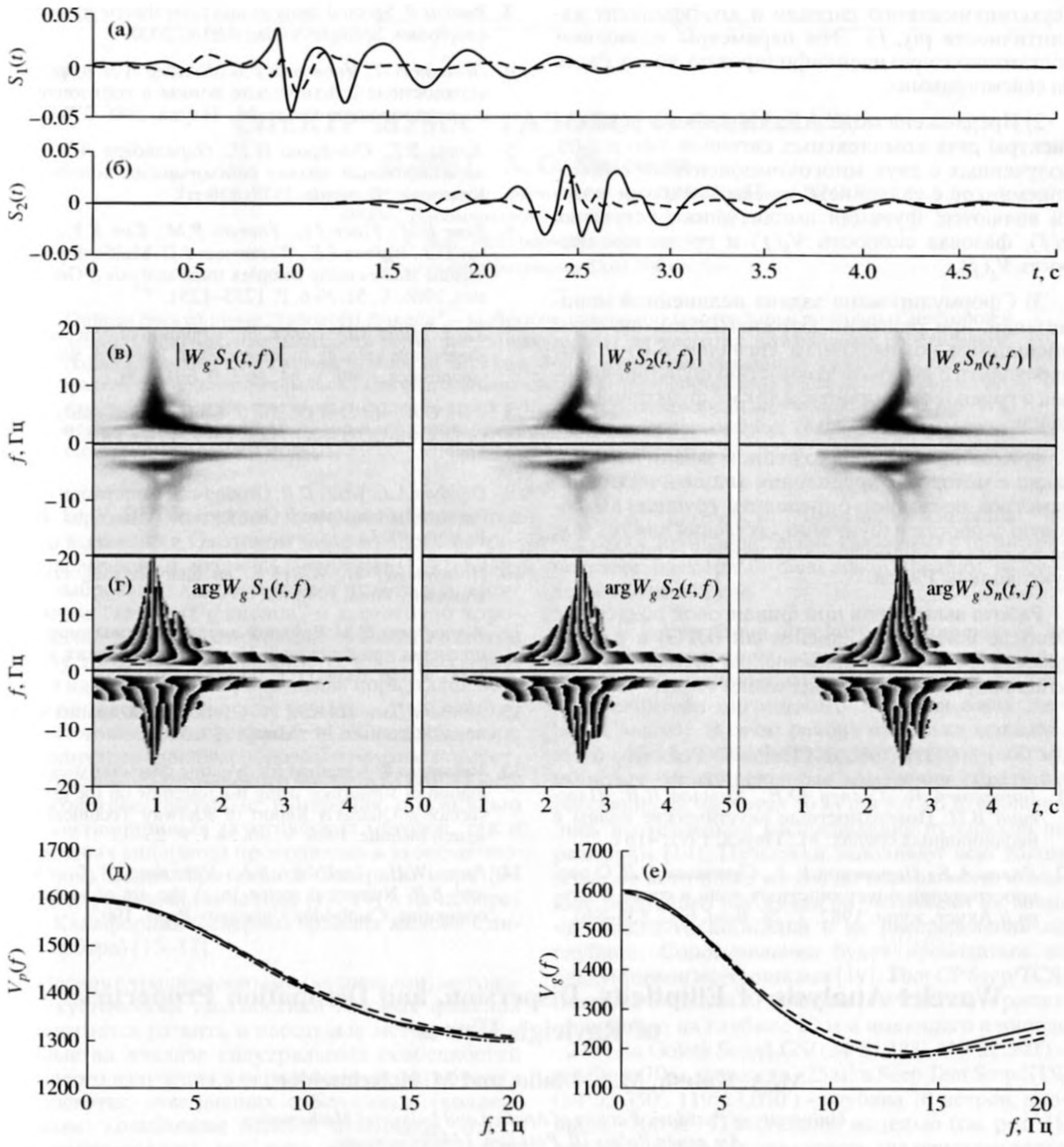

Рис. 5. Исходные сигналы, вейвлет-спектры исходных и восстановленного сигналов, исходные и восстановленные фазовая и групповая скорости.

скоростей, причем для (4.3) эта точность выше, чем для (4.2).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе получены следующие новые результаты:

1) Предложен новый метод, базирующийся на аппарате вейвлет-анализа и позволяющий определить в форме частотно-временных спектров следующие параметры эллиптичности поверхностных волн: большую $R(t, f)$, малую $r(t, f)$ полуось и угол наклона $\Theta(t, f)$ эллипса, фазовый сдвиг $\Delta\phi(t, f)$ между двумя компонентами $S_x(t)$ и $S_y(t)$

двухкомпонентного сигнала и коэффициент эллиптичности $\rho(t, f)$. Эти параметры позволяют достаточно точно идентифицировать волну Рэлея на сейсмограммах.

2) Предложена модель, связывающая вейвлет-спектры двух комплексных сигналов $S_1(t)$ и $S_2(t)$, полученных с двух многокомпонентных сейсмоприемников с удалением Δx. Параметрами модели являются: функция амплитудного затухания $\alpha(f)$, фазовая скорость $V_p(f)$ и групповая скорость $V_g(f)$.

3) Сформулирована задача нелинейной минимизации, при решении которой можно по двум имеющимся комплексным сигналам $S_1(t)$ и $S_2(t)$ определить с высокой точностью функции фазовой и групповой скорости, а также функцию затухания.

4) Комбинация предложенной задачи минимизации с методом определения эллиптических параметров позволяет определить групповую, фазовую скорости и функцию затухания для тех мод на исходных сейсмограммах, которые соответствуют волнам Рэлея.

Работа выполнена при финансовой поддержке Deutsche Forschung Gemeinschaft (DFG) в рамках проекта DFG-1114 “Mathematical Methods in time series analysis and image processing”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бирюков С.В., Гуляев Ю.В., Крылов В.В., Плесский В.П.* Поверхностные акустические волны в неоднородных средах. М.: Наука, 1991. 416 с.
2. *Лялин А.Е., Пирожков В.А., Степанов Р.Д.* О распространении поверхностных волн в среде Коссера // Акуст. журн. 1982. Т. 28. Вып. 6. С. 838–840.
3. *Buttkus B.* Spectral analysis and filter theorie in applied geophysics. Springer-Verlag Berlin. 2000.
4. *Левшин А.Л., Яновская Т.Б., Ландер А.В. и др.* Поверхностные сейсмические волны в горизонтально-неоднородной земле. М.: Наука, 1986. 278 с.
5. *Алказ В.Г., Онофраш Н.И., Перельберг А.И.* Поляризационный анализ сейсмических колебаний. Кишинев: Штиинца. 1977. 110 с.
6. *Rene R.M., Fitter J.L., Forsyth P.M., Kim K.Y., Murray D.J., Walters J.K., Westerman J.D.* Multicomponent seismic studies using complex trace analysis // Geophysics. 1986. V. 51. № 6. P. 1235–1251.
7. *Xia J., Miller R.D., Park C.B.* Estimation of near-surface shear-wave velocity by inversion of Rayleigh waves // Geophysics. 1999. V. 64. № 3. P. 691–700.
8. *Park C.B., Miller R.D., Xia J.* Multichannel analysis of surface waves // Geophysics. 1999. V. 64. № 3. P. 800–808.
9. *Deighan A.J., Watts D.R.* Ground-roll suppression using the wavelet transform // Geophysics. 1997. V. 62. № 6. P. 1896–1903.
10. *Holschneider M.* Wavelets: an analysis tool. Oxford University Press. 1995.
11. *Астафьева Н.М.* Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения // Успехи физических наук. 1996. Т. 166. Вып. 11. С. 1145–1170.
12. *Бендат Дж., Пирсол А.* Прикладной анализ случайных данных. М.: Мир. 1989. 540 с.
13. *Nakamura Y.* A method for dynamic characteristics estimation of subsurface using microtremor on the ground surface // Quarterly Report of Railway Technical Research Institute. 1989. V. 30. № 1. P. 25–33.
14. *Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., Flannery B.P.* Numerical recipe in c: the art of scientific computing. Cambridge University Press. 1992.

Wavelet Analysis of Ellipticity, Dispersion, and Dissipation Properties of Rayleigh Waves

M. A. Kulesh, M. S. Diallo, and M. Holschneider

University of Potsdam, Faculty of Applied and Industrial Mathematics, Am neuen Palais 10, Potsdam, 14469 Germany

e-mail: mkulesh@math.uni-potsdam.de

Abstract—The paper is devoted to digital processing of multicomponent seismograms using the wavelet analysis. The goal of this processing is to identify Rayleigh surface elastic waves and determine their properties. A new method for calculating the ellipticity parameters of a wave in the form of a time–frequency spectrum is proposed, which offers wide possibilities for filtering seismic signals in order to suppress or extract the Rayleigh components. A model of dispersion and dissipation of elliptic waves written in terms of wavelet spectra of complex (two-component) signals is also proposed. The model is used to formulate a nonlinear minimization problem that allows a high-accuracy calculation of the group and phase velocities and the attenuation factor for a propagating elliptic Rayleigh wave. All methods considered in the paper are illustrated with the use of test signals.