АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2005, том 51, № 5, с. 672–681

УДК 534.23

МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МНОЖЕСТВЕННОГО РАССЕЯНИЯ НА НЕСКОЛЬКИХ ТЕЛАХ В ОДНОРОДНОЙ БЕЗГРАНИЧНОЙ СРЕДЕ

© 2005 г. Б. П. Шарфарец

126128 Санкт-Петербург, ул. Кубинская 14–70
E-mail: sharg@mail.rcom.ru

Поступила в редакцию 26.05.04 г.

Развивается метод решения задачи множественного рассеяния на совокупности тел в однородном безграничном пространстве. Для этого рассматривается задача о множественном рассеянии двух тел, находящихся в первичном поле плоской волны. Предполагаются известными исходные невозмущенные амплитуды рассеяния каждого рассеивателя. Решение строится путем учета многократного перерассеяния плоских волн между рассеивателями. Получены интегральные уравнения, позволяющие рассчитать результирующие амплитуды рассеяния каждого из них и совокупную амплитуду рассеяния системы, состоящей из двух рассеивателей. Показано, что решение этой задачи позволяет решить задачу о поле рассеяния произвольного числа рассеивателей. Приведены выражения для амплитуды рассеяния в случае произвольного первичного поля. Продемонстрирована связь интегральных уравнений для задач о множественном рассеянии в однородном пространстве и о множественном рассеянии одиночного тела вблизи границы раздела. Приведены приближенные выражения для расчета амплитуды рассеяния при множественном рассеянии.

Задаче множественного рассеяния, когда в некотором первичном поле находится не менее двух рассеивателей, а их взаимным влиянием друг на друга (вторичным перерассеянием) пренебречь нельзя, посвящено большое число публикаций. Упомянем лишь некоторые из них [1–15]. Сюда же следует, очевидно, отнести и публикации, посвященные задачам рассеяния, вызванного наличием отражающих границ и неоднородностей среды. В этом случае для эффекта множественного рассеяния достаточно наличия одного рассеивателя и границы раздела или неоднородности среды. Здесь упомянем также лишь некоторые публикации [16–24].

В работах [1–15] рассматривается однородное двух- или трехмерное пространство с помещенными в поле некоторой первичной волны двумя и более рассеивателями. Решение ищется в виде суммы первичной волны и результирующих полей всех рассеивателей. При этом накладываются необходимые краевые условия, а также условия излучения Зоммерфельда на бесконечности. Все поля раскладываются в ряды по сферическим или цилиндрическим функциям (в зависимости от размерности задачи) и с привлечением неких методов, например метода Т-матриц [2, 6, 7, 10, 11, 13], либо теорем сложения для сферических и цилиндрических функций [4, 5, 8, 9], находятся неопределенные коэффициенты в разложениях полей рассеяния. После чего может быть определена амплитуда рассеяния каждого рассеивателя. При таком подходе автоматически учитывается эффект множественного рассеивания.

Эффект множественного рассеивания возникает и при наличии границ раздела. Так, в работе [20] рассматривается задача о поле рассеяния сферы, находящейся у акустически мягкой границы, которая сводится авторами к задаче о множественном рассеянии двух сфер в однородном пространстве [8].

В целом, несмотря на прозрачный формализм, описанный подход решения задачи множественного рассеяния на нескольких телах не лишен недостатков. Во-первых, необходимо рассчитывать в общем случае счетное множество искомых коэффициентов в разложениях полей. Во-вторых, эта процедура резко усложняется с ростом числа рассеивателей.

В настоящей работе для решения задачи множественного рассеяния на нескольких телах предлагается альтернативный подход, заключающийся в учете многократно переотраженных (перерассеянных) между телами плоских волн. Учет перерассеянных плоских волн осуществляется с помощью использования невозмущенных амплитуд рассеяния каждого из тел, что приводит к интегральным уравнениям, позволяющим вычислять возмущенные амплитуды рассеяния через невозмущенные. Ранее сходная методика была применена автором при решении задач расчета результирующего рассеяния протяженных излучателей и рассеивателей в условиях влияния границ раздела и слоистой неоднородности среды [25–27]. Единственное ограничение подхода заключается в том, что должны быть известны невозмущенные амплитуды рассеяния тел, однако

это требование не представляется чрезмерным, т.к. рассеиватель характеризуется прежде всего именно амплитудой рассеяния в условиях однородной безграничной среды при отсутствии посторонних тел.

Рассмотрим задачу в однородной трехмерной безграничной среде. Рассмотрение начнем с простого частного случая, когда единственный рассеиватель с центром в точке (x_0, y_0, z_0) находится в первичном поле звукопрозрачного направленного источника, находящегося в начале координат. Поле излучателя вычисляется из выражения [25]

$$u(\mathbf{x}) = \frac{i}{2\pi}\int\limits_{R^2}\frac{D(\mathbf{k}_m)}{\alpha}\exp(i\mathbf{k}_m\mathbf{x})dk_xdk_y, \quad m = 1, 2. \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{k}_1 = (k_x, k_y, \alpha)$ и $\mathbf{k}_2 = (k_x, k_y, -\alpha)$ – сопряженные волновые векторы; $\alpha = (k^2 - k_x^2 - k_y^2)^{1/2}$; k – волновое число; $\mathbf{x} = (x, y, z)$; $m = 1$ соответствует полю в верхнем полупространстве $z \geq 0$, $m = 2$ – в нижнем полупространстве $z \leq 0$; $D(\mathbf{k}_m)$ – диаграмма направленности (дн) источника, рассматриваемая на всей плоскости k_x, k_y и связанная с общепринятой дн $\overline{D}(\theta, \varphi)$, рассматриваемой в круге $k_x^2 + k_y^2 \leq k^2$ (области видимости), соотношениями (см., например [25])

$$\left.\begin{aligned}\overline{D}(\theta, \varphi) &= D(\mathbf{k}_1)\\ \overline{D}(\pi - \theta, \varphi) &= D(\mathbf{k}_2)\end{aligned}\right\} \quad \theta \in [0, \pi/2], \tag{2}$$

$$\varphi \in [0, 2\pi], \quad \alpha \in [k, 0].$$

Здесь θ, φ – сферические углы; $\alpha = k\cos\theta$; $k_x = \xi\cos\varphi$; $k_y = \xi\sin\varphi$; $\xi = k\sin\theta$; $\boldsymbol{\xi} = (k_x, k_y) = (\xi, \varphi)$ – горизонтальная проекция волнового вектора.

Рассеиватель будем характеризовать по аналогии с излучателем функцией, описывающей его направленные свойства. Эту функцию двух векторных аргументов $T_m^n(\mathbf{k}_l, \mathbf{k}_s)$, $n, m = 1, 2$, принято называть амплитудой рассеяния (АР), где $\mathbf{k}_l$, $\mathbf{k}_s$ – характеризуют волновой вектор соответственно падающей и рассеянной плоской волны. Физически эта функция описывает спектр плоских волн $T_m^n(\mathbf{k}_l, \mathbf{k}_s)\exp(i\mathbf{k}_s\mathbf{x})$ отклика рассеивателя с центром в начале координат на падение плоской волны $\exp(i\mathbf{k}_l\mathbf{x})$ единичной амплитуды и нулевой фазы в точке геометрического центра рассеивателя. Нижний индекс $m = 1, 2$ характеризует направление движения падающей плоской волны: $m = 1$ – волна движется в сторону возрастания z (т.е. снизу вверх), $m = 2$ – в сторону уменьшения z (сверху вниз). Индекс n характеризует направление рассеяния: $n = 1$ – рассматривается рассеяние вверх (значение $+\alpha$), $n = 2$ – рассеяние вниз ($-\alpha$). Рассматриваются области определения как внутри, так и вне области видимости. Отметим, что в случае, когда на рассеиватель с центром в точке $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ падает плоская волна $A\exp(i\mathbf{kx})$, где $A = \text{const}$, рассеиватель возбуждает спектр плоских волн $A\exp(i\mathbf{k}_l\mathbf{x})T_m^n(\mathbf{k}_l, \mathbf{k}_s)\exp(i\mathbf{k}_s(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))$.

В случае, когда центр рассеивателя находится в точке $\mathbf{x}_0$ и его АР известна, поле рассеяния u_s описывается выражением типа (1) [25]

$$u_s(\mathbf{x}, \mathbf{k}_l) = \frac{i}{2\pi}\int\limits_{R^2}\frac{T_m^n(\mathbf{k}_l, \mathbf{k}_s)}{\alpha_s}\times \times\exp(i\mathbf{k}_s(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))dk_{sx}dk_{sy}. \tag{3}$$

Последнее выражение можно использовать для математического определения АР, а именно: АР рассеивателя с центром в точке $\mathbf{x}_0$ при падении на него плоской волны $\exp(i\mathbf{k}_l(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))$ единичной амплитуды и нулевой фазы в центре рассеивателя $\mathbf{x}_0$ есть соответствующий спектр рассеянных плоских волн нулевой фазы относительно центра в представлении поля рассеяния в виде (3). Как будет видно из выражений (5)–(7), АР в сферической системе координат представляет собой амплитуду переноса нулевого приближения в геометрооптическом представлении поля рассеяния (3).

В случае, когда первичное поле типа (1) создается направленным источником (т.е. представляет собой совокупность плоских волн) с центром в начале координат, а рассеиватель находится в точке (x_0, y_0, z_0), то результирующая АР $\overline{T}_n(\mathbf{k}_s, \mathbf{x}_0)$ может быть найдена с помощью техники, изложенной в [25], и имеет вид

$$\overline{T}_n(\mathbf{k}_s, \mathbf{x}_0) = \frac{i}{2\pi}\int\limits_{R^2}\frac{D(\mathbf{k}_l)T_m^n(\mathbf{k}_l, \mathbf{k}_s)}{\alpha_l}\times \times\exp(i\mathbf{k}_l\mathbf{x}_0)dk_{lx}dk_{ly}, \quad n = 1, 2. \tag{4}$$

Асимптотическая оценка интеграла (4) аналогично тому, как это делалось в [25], дает следующее представление

$$\overline{T}'(R_0, \theta_0, \varphi_0, \theta_s, \varphi_s) = = \frac{\exp(ikR_0)}{R_0}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{A_l(\theta_0, \varphi_0, \theta_s, \varphi_s)}{(kR_0)^l}, \tag{5}$$

$$A_{l+1}(\theta_0, \varphi_0, \theta_s, \varphi_s) = = L[A_l(\theta_0, \varphi_0, \theta_s, \varphi_s)](\theta_0, \varphi_0, l), \tag{6}$$

$$A_0(\theta_0, \varphi_0, \theta_s, \varphi_s) = = \overline{D}(\theta_0, \varphi_0)T(\theta_0, \varphi_0, \theta_s, \varphi_s). \tag{7}$$

Здесь L – оператор, определяемый выражением

$$L[\Psi](\theta, \varphi, l) = \left(\frac{\Delta_{\theta,\varphi} + l(l+1)}{2i(l+1)}\right)\Psi(\theta, \varphi); \qquad (8)$$

$\overline{T}'$ и T' – результирующая и обычная (невозмущенная) АР соответственно в сферической системе координат; $(R_0, \theta_0, \varphi_0)$ – сферические координаты точки (x_0, y_0, z_0), $(R_s, \theta_s, \varphi_s)$ – сферические координаты относительно точки (x_0, y_0, z_0) (центра рассеивателя); $\Delta_{\theta,\varphi}$ – оператор Бельтрами на сфере (угловая часть лапласиана).

Представления (5)–(8) позволяют легко проанализировать ошибки при вычислениях реальной АР в виде конечной суммы. Так, в зоне Фраунгофера можно ограничиться нулевым приближением

$$\overline{T}'(R_0, \theta_0, \varphi_0, \theta_s, \varphi_s) = \\ = \frac{\exp(ikR_0)}{R_0}\overline{D}(\theta_0, \varphi_0)T'(\theta_0, \varphi_0, \theta_s, \varphi_s) + O\left(\frac{1}{kR_0^2}\right), \qquad (9)$$

что соответствует представлению о том, что поле источника в точке рассеивателя представляет собой плоскую волну с весом $\frac{\overline{D}(\theta_0, \varphi_0)}{R_0}\exp(ikR_0)$.

Суммарное поле рассеивателя с АР вида (4) необходимо рассчитывать с помощью выражения (3) после соответствующей замены АР $T_m^n(\mathbf{k}_l, \mathbf{k}_s)$ на АР (4) с привязкой начала координат к центру рассеивателя, после чего может быть получено геометрооптическое представление вида (5)–(7). То же относится и к нулевому приближению (9), для которого поле рассеяния в виде (5)–(7) равно

$$u_s(R_s, \theta_s, \varphi_s) = \frac{\exp(ikR_0)}{R_0} \times \\ \times \frac{\exp(ikR_s)}{R_s}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{A_l(\theta_s, \varphi_s)}{(kR_s)^l}, \qquad (10)$$

$$A_{l+1}(\theta_s, \varphi_s) = L[A_l(\theta_s, \varphi_s)](\theta_s, \varphi_s, l), \qquad (11)$$

$$A_0(\theta_s, \varphi_s) = \overline{D}(\theta_0, \varphi_0)T'(\theta_0, \varphi_0, \theta_s, \varphi_s). \qquad (12)$$

Если теперь уже в (10)–(12) ограничиться нулевым приближением, то получим лучевую версию рассеяния: луч, вышедший из направленного источника в сторону рассеивателя под углами θ_0, φ_0 в системе координат источника, взвешивается его диаграммой направленности $\overline{D}(\theta_0, \varphi_0)$, достигает рассеивателя в точке $(R_0, \theta_0, \varphi_0)$, отражается под углами θ_s, φ_s относительно рассеивателя, одновременно взвешиваясь АР и, достигая точки $(R_s, \theta_s, \varphi_s)$ в системе координат рассеивателя, приобретает амплитуду, равную члену ряда (10) с индексом $l = 0$.

Рассмотрим далее случай, когда в однородном пространстве расположено два рассеивателя S_1 и S_2 с соответствующими исходными (невозмущенными) АР (когда их влияние друг на друга исключено) ${}^1T_m^n(\mathbf{k}_l, \mathbf{k}_s)$ и ${}^2T_m^n(\mathbf{k}_l, \mathbf{k}_s)$. Пусть центр первого расположен в точке $\left(0, 0, -\frac{z_0}{2}\right)$, второго – в точке $\left(0, 0, \frac{z_0}{2}\right)$. Будем рассматривать суммарное поле рассеяния в случае падения на указанную пару рассеивателей плоской волны $\exp(i\mathbf{k}_l\mathbf{x})$, распространяющейся для определенности в сторону возрастания z, т.е. снизу вверх. Поле ищется суммированием многократно рассеянных плоских волн (принцип суперпозиции уместен, т.к. каждой падающей плоской волне соответствует своя совокупность рассеянных волн, которые вместе с падающей обеспечивают выполнение граничных условий на рассеивателе, и так для всех пар падающих плоских волн и соответствующих им рассеянных волн). Отметим, кроме того, что построенное таким образом решение является единственным в силу единственности составляющих его слагаемых, начиная с первичных полей рассеяния, что определяется выбором соответствующих условий излучения Зоммерфельда.

Обозначим результирующие АР (т.е. после всех переотражений) соответственно ${}^1\overline{T}_1^n(\mathbf{k}_l, \mathbf{k}_s)$ и ${}^2\overline{T}_1^n(\mathbf{k}_l, \mathbf{k}_s)$. Рассмотрим, например, процесс формирования результирующей АР S_1 в верхней полусфере, т.е. ${}^1\overline{T}_1^1(\mathbf{k}_l, \mathbf{k}_s)$. Происходит следующее. Плоская волна $\exp(i\mathbf{k}_l\mathbf{x})$, распространившись мимо рассеивателей S_1 и S_2, вызовет на них первичные поля рассеяния, соответственно с АР ${}^1T_1^n(\mathbf{k}_l, \mathbf{k}_s)\exp\left(-i\alpha_l\frac{z_0}{2}\right)$ и ${}^2T_1^n(\mathbf{k}_l, \mathbf{k}_s)\exp\left(i\alpha_l\frac{z_0}{2}\right)$, которые и окажут влияние на формирование интересующей нас результирующей АР ${}^1\overline{T}_1^1(\mathbf{k}_l, \mathbf{k}_s)$ (множители $\exp\left(\pm i\alpha_l\frac{z_0}{2}\right)$ отвечают фазе падающей плоской волны соответственно на S_2 и S_1). Поясним это на примере первичного рассеянного поля с АР ${}^1T_1^1(\mathbf{k}_l, \mathbf{k}_s)\exp\left(-i\alpha_l\frac{z_0}{2}\right)$. Это поле, порожденное плоской волной на S_1, распространяется вверх, достигает S_2, переотражается от него, идет далее вниз, переотражается от S_1, порождая первую добавку к АР, снова идет вверх и т.д. до бесконечности. В итоге формируется составляющая ${}^1_1\overline{T}_1^1(\mathbf{k}_l, \mathbf{k}_s)$ результирующей

АР ${}^1\bar{T}_1^1(\mathbf{k}_l, \mathbf{k}_s)$, обусловленная первичным рассеянным полем на S_1 с АР ${}^1T_1^1(\mathbf{k}_l, \mathbf{k}_s)\exp\left(-i\alpha_l\frac{z_0}{2}\right)$. Аналогично формируется составляющая ${}^1_2\bar{T}_1^1(\mathbf{k}_l, \mathbf{k}_s)$ результирующей АР ${}^1\bar{T}_1^1(\mathbf{k}_l, \mathbf{k}_s)$, вызванная первичным рассеянным на S_2 полем ${}^2T_1^2(\mathbf{k}_l, \mathbf{k}_s)\exp\left(i\alpha_l\frac{z_0}{2}\right)$: первичное поле ${}^2T_1^2(\mathbf{k}_l, \mathbf{k}_s)\exp\left(i\alpha_l\frac{z_0}{2}\right)$ на S_2 распространится вниз, переотразится от S_1, вызвав свою первую добавку к ${}^1_2\bar{T}_1^1(\mathbf{k}_l, \mathbf{k}_s)$, затем пойдет вверх, снова переотразится от S_2 и т.д. до бесконечности. Таким образом, необходимо вычислить сумму

$$ {}^1\bar{T}_1^1(\mathbf{k}_l, \mathbf{k}_s) = {}^1_1\bar{T}_1^1(\mathbf{k}_l, \mathbf{k}_s) + {}^1_2\bar{T}_1^1(\mathbf{k}_l, \mathbf{k}_s). \tag{13} $$

Используя выражение (4) для расчетов вторичных АР и действуя совершенно идентично тому, как это проделывалось в случае, когда роль второго рассеивателя играла граница раздела, АР которой служил коэффициент отражения [25], получим следующие представления

$$ \begin{aligned} \frac{{}^1_1\bar{T}_1^1(\mathbf{k}_l, \mathbf{k}_s)}{\exp(-i\alpha_l z_0/2)} &= \sum_{n=0}^{\infty}(A_1^1)^n[{}^1T_1^1](\mathbf{k}_l, \mathbf{k}_s) = \\ &= (I - A_1^1)^{-1}[{}^1T_1^1](\mathbf{k}_l, \mathbf{k}_s), \end{aligned} \tag{14} $$

$$ \begin{aligned} {}^1_2\bar{T}_1^1(\mathbf{k}_l, \mathbf{k}_s) &= \sum_{n=0}^{\infty}(A_1^1)^n[{}^1\hat{T}_1^1](\mathbf{k}_l, \mathbf{k}_s) = \\ &= (I - A_1^1)^{-1}[{}^1\hat{T}_1^1](\mathbf{k}_l, \mathbf{k}_s), \end{aligned} \tag{15} $$

где ${}^1\hat{T}_1^1(\mathbf{k}_l, \mathbf{k}_s)$ определяется выражением

$$ \begin{aligned} {}^1\hat{T}_1^1(\mathbf{k}_l, \mathbf{k}_s) &= \exp\left(i\alpha_l\frac{z_0}{2}\right)\frac{i}{2\pi}\times \\ &\times\int_{R^2}\frac{[{}^2T_1^1(\mathbf{k}_l, \mathbf{k}_n)][{}^1T_2^1(\mathbf{k}_n, \mathbf{k}_s)]}{\alpha_n}\exp(i\alpha_n z_0)dk_{nx}dk_{ny}, \end{aligned} \tag{16} $$

а оператор A_1^1 определяется следующим образом

$$ \begin{aligned} A_1^1[T](\mathbf{k}_l, \mathbf{k}_s) &= \left(\frac{i}{2\pi}\right)^2\times \\ &\times\int_{R^2}\left(\int_{R^2}\frac{{}^2T_1^2(\mathbf{k}_n, \mathbf{k}_m)T(\mathbf{k}_l, \mathbf{k}_n)}{\alpha_n}\exp(i\alpha_n z_0)dk_{nx}dk_{ny}\right)\times \\ &\times\frac{{}^1T_2^1(\mathbf{k}_m, \mathbf{k}_s)}{\alpha_m}\exp(i\alpha_m z_0)dk_{mx}dk_{my}. \end{aligned} \tag{17} $$

Как видно из (17), оператор A_1^1 вычисляет добавку к АР ${}^1\bar{T}_1^1(\mathbf{k}_l, \mathbf{k}_s)$ за один цикл: рассеянная на S_1 волна достигает S_2, переотражается обратно, достигает S_1 и вызывает очередное приращение АР ${}^1\bar{T}_1^1(\mathbf{k}_l, \mathbf{k}_s)$. Заметим, что учет конечного числа членов рядов (14), (15) может быть использован для приближенного вычисления составляющих АР.

Формально ряды Неймана (14), (15) сходятся, когда норма оператора (17) меньше единицы. Однако из физических соображений ясно, что соответствующие составляющие результирующей АР по построению единственного решения представляют собой именно ряды типа (14), (15), т.к. эти ряды лишь отражают физику происходящих процессов и представляют собой решение, альтернативное описанному в работах [1–15]. Справедливым это должно остаться и в условиях наличия резонансных явлений при одиночном и множественном рассеянии [9, 13].

Для сходящихся рядов (14), (15) можно обратить оператор $(I - A_1^1)^{-1}$ стандартным образом, после чего получаем интегральные уравнения для определения составляющих результирующей АР ${}^1\bar{T}_1^1(\mathbf{k}_l, \mathbf{k}_s)$

$$ (I - A_1^1)[{}^1_1\bar{T}_1^1](\mathbf{k}_l, \mathbf{k}_s) = {}^1T_1^1(\mathbf{k}_l, \mathbf{k}_s)\exp\left(-i\alpha_l\frac{z_0}{2}\right), \tag{18} $$

$$ (I - A_1^1)[{}^1_2\bar{T}_1^1](\mathbf{k}_l, \mathbf{k}_s) = {}^1\hat{T}_1^1(\mathbf{k}_l, \mathbf{k}_s), \tag{19} $$

где оператор A_1^1 определяется из (17).

Отметим, что после определения величины результирующей АР ${}^1\bar{T}_1^1(\mathbf{k}_l, \mathbf{k}_s)$ рассеивателя S_1 легко получить результирующую АР ${}^2\bar{T}_1^1(\mathbf{k}_l, \mathbf{k}_s)$ рассеивателя S_2. Для этого, как легко заметить, к первичной составляющей ${}^2T_1^1(\mathbf{k}_l, \mathbf{k}_s)\exp\left(i\alpha_l\frac{z_0}{2}\right)$, вызванной падением первичной плоской волны, необходимо добавить составляющую, вызванную рассеянием на S_2 суммарного поля рассеяния рассеивателя S_1 с результирующей АР ${}^1\bar{T}_1^1(\mathbf{k}_l, \mathbf{k}_s)$. Или в окончательном виде

$$ \begin{aligned} {}^2\bar{T}_1^1(\mathbf{k}_l, \mathbf{k}_s) &= {}^2T_1^1(\mathbf{k}_l, \mathbf{k}_s)\exp\left(i\alpha_l\frac{z_0}{2}\right) + \\ &+\frac{1}{2\pi}\int_{R^2}\frac{{}^2T_1^1(\mathbf{k}_m, \mathbf{k}_s)\,{}^1\bar{T}_1^1(\mathbf{k}_l, \mathbf{k}_n)}{\alpha_n}\exp(i\alpha_n z_0)dk_{nx}dk_{ny}. \end{aligned} \tag{20} $$

Поступая совершенно аналогично, найдем соответствующие интегральные уравнения для

${}^{2}_{1}\overline{T}^{2}_{1}(\mathbf{k}_l, \mathbf{k}_s)$ и ${}^{2}_{2}\overline{T}^{2}_{1}(\mathbf{k}_l, \mathbf{k}_s)$, являющихся составляющими результирующей АР

$$ {}^{2}\overline{T}^{2}_{1}(\mathbf{k}_l, \mathbf{k}_s) = {}^{2}_{1}\overline{T}^{2}_{1}(\mathbf{k}_l, \mathbf{k}_s) + {}^{2}_{2}\overline{T}^{2}_{1}(\mathbf{k}_l, \mathbf{k}_s) \quad (21) $$

рассеивателя S_2 в нижнем полупространстве

$$ (I - A^2_2)[{}^{2}_{1}\overline{T}^{2}_{1}](\mathbf{k}_l, \mathbf{k}_s) = {}^{2}T^{2}_{1}(\mathbf{k}_l, \mathbf{k}_s)\exp\left(i\alpha_l\frac{z_0}{2}\right), \quad (22) $$

$$ (I - A^2_2)[{}^{2}_{2}\overline{T}^{2}_{1}](\mathbf{k}_l, \mathbf{k}_s) = {}^{2}\hat{T}^{2}_{1}(\mathbf{k}_l, \mathbf{k}_s), \quad (23) $$

где ${}^{2}\hat{T}^{2}_{1}(\mathbf{k}_l, \mathbf{k}_s)$ определяется выражением

$$ {}^{2}\hat{T}^{2}_{1}(\mathbf{k}_l, \mathbf{k}_s) = \exp\left(-i\alpha_l\frac{z_0}{2}\right)\frac{i}{2\pi}\times $$

$$ \times\int\limits_{R^2}\frac{[{}^{2}T^{2}_{1}(\mathbf{k}_n, \mathbf{k}_s)][{}^{1}T^{1}_{1}(\mathbf{k}_l, \mathbf{k}_n)]}{\alpha_n}\exp(i\alpha_n z_0)dk_{nx}dk_{ny}, $$

а оператор $A^2_2[T](\mathbf{k}_l, \mathbf{k}_s)$ равен

$$ A^2_2[T](\mathbf{k}_l, \mathbf{k}_s) = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^2\times $$

$$ \times\int\limits_{R^2}\left(\int\limits_{R^2}\frac{{}^{1}T^{1}_{2}(\mathbf{k}_n, \mathbf{k}_m)T(\mathbf{k}_l, \mathbf{k}_n)}{\alpha_n}\exp(i\alpha_n z_0)dk_{nx}dk_{ny}\right)\times \quad (24) $$

$$ \times\frac{{}^{2}T^{2}_{1}(\mathbf{k}_m, \mathbf{k}_s)}{\alpha_m}\exp(i\alpha_m z_0)dk_{mx}dk_{my}. $$

Результирующая АР рассеивателя S_1 в нижнем полупространстве определяется из выражения

$$ {}^{1}\overline{T}^{2}_{1}(\mathbf{k}_l, \mathbf{k}_s) = {}^{1}T^{2}_{1}(\mathbf{k}_l, \mathbf{k}_s)\exp\left(-i\alpha_l\frac{z_0}{2}\right) + $$

$$ + \frac{i}{2\pi}\int\limits_{R^2}\frac{[{}^{1}T^{2}_{2}(\mathbf{k}_n, \mathbf{k}_s)][{}^{2}\overline{T}^{2}_{1}(\mathbf{k}_l, \mathbf{k}_n)]}{\alpha_n}\exp(i\alpha_n z_0)dk_{nx}dk_{ny}. \quad (25) $$

Пусть теперь первичная волна распространяется сверху вниз. Тогда останутся верными все выражения (13)–(25), если в них произвести следующие изменения. Первичные поля будут соответственно ${}^{1}T^{n}_{2}(\mathbf{k}_l, \mathbf{k}_s)\exp\left(i\alpha_l\frac{z_0}{2}\right)$ и ${}^{2}T^{n}_{2}(\mathbf{k}_l, \mathbf{k}_s)\exp\left(-i\alpha_l\frac{z_0}{2}\right)$. Далее в выражениях (13)–(25) во всех функциях АР, содержащих аргумент $\mathbf{k}_l$, необходимо правый нижний индекс в обозначении функции поменять с 1 на 2, а во всех экспонентах, содержащих α_l, поменять знак на противоположный. Все остальные обозначения и выражения останутся без изменений, при этом выражения (22), (23) примут соответственно вид

$$ (I - A^2_2)[{}^{2}_{1}\overline{T}^{2}_{2}](\mathbf{k}_l, \mathbf{k}_s) = {}^{2}T^{2}_{2}(\mathbf{k}_l, \mathbf{k}_s)\exp\left(-i\alpha_l\frac{z_0}{2}\right), \quad (22a) $$

$$ (I - A^2_2)[{}^{2}_{2}\overline{T}^{2}_{2}](\mathbf{k}_l, \mathbf{k}_s) = {}^{2}\hat{T}^{2}_{2}(\mathbf{k}_l, \mathbf{k}_s). \quad (23a) $$

Таким образом получены все выражения для определения результирующих АР двух рассеивателей ${}^{1}\overline{T}^{n}_{l}(\mathbf{k}_l, \mathbf{k}_s)$ и ${}^{2}\overline{T}^{n}_{l}(\mathbf{k}_l, \mathbf{k}_s)$, $l, n = 1, 2$. Такая информация является безусловно полезной хотя бы для того, чтобы судить о степени возмущения исходных АР.

Однако в тех случаях, когда возмущением АР пренебречь нельзя, практически более существенной является, по-видимому, информация о совокупной АР системы, состоящей из рассматриваемых двух рассеивателей. Последнюю легко получить, пользуясь выражением (3) и принципом суперпозиции. Окончательно имеем для совокупной АР $\overline{T}^{n}_{l}(\mathbf{k}_l, \mathbf{k}_s)$

$$ \left.\begin{aligned} \overline{T}^{1}_{l}(\mathbf{k}_l, \mathbf{k}_s) &= {}^{1}\overline{T}^{1}_{l}(\mathbf{k}_l, \mathbf{k}_s)\exp\left(i\alpha_s\frac{z_0}{2}\right) + \\ &\quad + {}^{2}\overline{T}^{1}_{l}(\mathbf{k}_l, \mathbf{k}_s)\exp\left(-i\alpha_s\frac{z_0}{2}\right) \\ \overline{T}^{2}_{l}(\mathbf{k}_l, \mathbf{k}_s) &= {}^{1}\overline{T}^{2}_{l}(\mathbf{k}_l, \mathbf{k}_s)\exp\left(-i\alpha_s\frac{z_0}{2}\right) + \\ &\quad + {}^{2}\overline{T}^{2}_{l}(\mathbf{k}_l, \mathbf{k}_s)\exp\left(i\alpha_s\frac{z_0}{2}\right) \end{aligned}\right\}, \quad l = 1, 2. \quad (26) $$

Подставляя (26) в выражение (4) либо в (5)–(7), можно вычислить совокупную АР при облучении системы рассеивателей направленным источником с полем (1). При этом очевидно, что центр системы рассеивателей находится посредине между центрами обоих рассеивателей.

Умение вычислять совокупную АР $\overline{T}^{n}_{l}(\mathbf{k}_l, \mathbf{k}_s)$ системы, состоящей из двух рассеивателей, позволяет последовательно решить задачу о N рассеивателях. А именно: сначала рассматривается система из двух рассеивателей, находится их совокупная АР, и оба рассеивателя заменяются одним, фиктивным, который обладает их совокупной АР с центром, лежащим посредине между центрами исходных рассеивателей. Затем рассматривается система рассеивателей, состоящая из третьего рассеивателя и описанного фиктивного, находится их совокупная АР и т.д., пока не будут исчерпаны все рассеиватели и не найдена единая совокупная АР всех N рассеивателей. Правомерность описанной итерационной процедуры следует из принципа суперпозиции.

Рассмотрим далее некоторые частные случаи. Представляет интерес получить из вышеприведенных выражений полученные ранее в [25, 26] результаты для случая, когда одним из рассеивателей является отражающая плоскость (плоская граница раздела), для которой в приложении 1 получено выражение для АР. Подставляя выражение (П1) для АР $T_1^2(\mathbf{k}_l, \mathbf{k}_s)$ отражающей плоскости в выражения (16)–(20), получим приведенные в [25, 26] интегральные уравнения для случая рассеивателя у плоской отражающей границы.

Рассмотрим далее случай, когда в поле плоской первичной волны по-прежнему находятся два рассеивателя. При этом ограничимся ситуацией, когда можно принять допущение, что рассеиватели находятся относительно друг друга в зоне Фраунгофера. Тогда можно воспользоваться выражением (9) для расчета АР рассеивателя, находящегося в первичном поле рассеяния другого рассеивателя и далее вычислить результирующие АР. Для получения выражений в общем виде примем, что центры рассеивателей находятся соответственно в точках $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ относительно начала координат.

Плоская первичная волна $\exp(i\mathbf{k}_1\mathbf{x})$, идущая снизу вверх, вызовет на рассеивателях S_1 и S_2 два невозмущенных рассеянных поля с АР соответственно ${}^1T'(\theta_l, \varphi_l, \theta_{1s}, \varphi_{1s})\exp(i\mathbf{k}_1\mathbf{r}_1)$ и ${}^2T'(\theta_l, \varphi_l, \theta_{2s}, \varphi_{2s})\exp(i\mathbf{k}_1\mathbf{r}_2)$ (АР представлены в сферических координатах, θ_{1s}, φ_{1s}, θ_{2s}, φ_{2s} – сферические углы относительно центров рассеивателей). Как показано выше, каждое из этих первичных рассеянных полей будет принимать участие в формировании результирующих рассеянных полей обоих рассеивателей. Получим приближение, например, для ${}^1\bar{T}'(\theta_l, \varphi_l, \theta_{1s}, \varphi_{1s})$, $\theta_{1s} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Как нетрудно увидеть, вычисление последней АР распадается в этом случае на вычисление двух геометрических прогрессий для составляющих ${}^1\bar{T}' = {}_1^1\bar{T}' + {}_2^1\bar{T}'$

$$
\begin{gathered}
{}_m^1T'(\theta_l, \varphi_l, \theta_{1s}, \varphi_{1s}) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{0l}q^m, \quad l = 1, 2, \\
a_{01} = {}^1T'(\theta_l, \varphi_l, \theta_{1s}, \varphi_{1s})\exp(i\mathbf{k}_1\mathbf{r}_1);
\end{gathered} \tag{27}
$$

$$
\begin{gathered}
a_{02} = \exp(i\mathbf{k}_1\mathbf{r}_2)[{}^2T'(\theta_1, \varphi_l, \theta_{(2-1)s}, \varphi_{(2-1)s})]\times \\
\times[{}^1T'(\theta_{1l} = \theta_{(2-1)s}, \varphi_{1l} = \varphi_{(2-1)s}, \theta_{1s}, \varphi_{1s})]\times \\
\times\frac{\exp(ik|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|};
\end{gathered} \tag{28}
$$

$$
\begin{gathered}
q = \left(\frac{\exp(ik|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}\right)^2\times \\
\times[{}^1T'(\theta_{1l} = \theta_{(2-1)s}, \varphi_{1l} = \varphi_{(2-1)s}, \theta_{1s}, \varphi_{1s})]\times \\
\times[{}^2T'(\theta_{2l} = \theta_{(1-2)s}, \varphi_{2l} = \varphi_{(1-2)s}, \\
\theta_{2s} = \theta_{(2-1)s}, \varphi_{2s} = \varphi_{(2-1)s})].
\end{gathered} \tag{29}
$$

Здесь $(\theta_{(1-2)s}, \varphi_{(1-2)s})$ и $(\theta_{(2-1)s}, \varphi_{(2-1)s})$ – угловые координаты центра второго рассеивателя относительно центра первого рассеивателя и центра первого рассеивателя относительно центра второго соответственно. Полагая справедливым условие $|q| < 1$, получим для результирующей АР

$$
{}^1\bar{T}'(\theta_l, \varphi_l, \theta_{1s}, \varphi_{1s}) = \frac{a_{01} + a_{02}}{1 - q}, \quad \theta_{1s} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]. \tag{30}
$$

Используя (20), получаем для $\theta_{2s} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$$
\begin{gathered}
{}^2\bar{T}'(\theta_l, \varphi_l, \theta_{2s}, \varphi_{2s}) = {}^2T'(\theta_l, \varphi_l, \theta_{2s}, \varphi_{2s})\exp(i\mathbf{k}_1\mathbf{r}_2) + \\
+[{}^2T'(\theta_{2l} = \theta_{(1-2)s}, \varphi_{2l} = \varphi_{(1-2)s}, \theta_{2s}, \varphi_{2s})]\times \\
\times[{}^1\bar{T}'(\theta_l, \varphi_l, \theta_{1s} = \theta_{(1-2)s}, \varphi_{1s} = \varphi_{(1-2)s})]\times \\
\times\frac{\exp(ik|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}.
\end{gathered} \tag{31}
$$

В выражениях (30), (31) $\varphi_{1s}, \varphi_{2s} \in [0, 2\pi]$. Аналогично находятся результирующие АР в оставшейся области определения $\theta_s \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, $\varphi_s \in [0, 2\pi]$:

$$
{}^2\bar{T}'(\theta_l, \varphi_l, \theta_{2s}, \varphi_{2s}) = \frac{\tilde{a}_{01} + \tilde{a}_{02}}{1 - \tilde{q}}, \tag{32}
$$

$$
\begin{gathered}
{}^1\bar{T}'(\theta_l, \varphi_l, \theta_{1s}, \varphi_{1s}) = {}^1T'(\theta_l, \varphi_l, \theta_{1s}, \varphi_{1s})\exp(i\mathbf{k}_1\mathbf{r}_1) + \\
+[{}^1T'(\theta_{1l} = \theta_{(2-1)s}, \varphi_{1l} = \varphi_{(2-1)s}, \theta_{1s}, \varphi_s)]\times \\
\times[{}^2\bar{T}'(\theta_l, \varphi_l, \theta_{2s} = \theta_{(2-1)s}, \varphi_{2s} = \varphi_{(2-1)s})]\times \\
\times\frac{\exp(ik|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}.
\end{gathered} \tag{33}
$$

Здесь

$$
\begin{gathered}
\tilde{q} = \left(\frac{\exp(ik|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}\right)^2[{}^1T'(\theta_{1l} = \theta_{(2-1)s}, \\
\varphi_{1l} = \varphi_{(2-1)s}, \theta_{1s} = \theta_{(1-2)s}, \varphi_{1s} = \varphi_{(1-2)s})]\times \\
\times[{}^2T'(\theta_{2l} = \theta_{(1-2)l}, \varphi_{2l} = \varphi_{(1-2)l}, \theta_{2s}, \varphi_{2s})];
\end{gathered} \tag{34}
$$

$$\tilde{a}_{01} = {}^2T'(\theta_l, \varphi_l, \theta_{2s}, \varphi_{2s})\exp(i\mathbf{k}_1\mathbf{r}_2); \quad (35)$$

$$\tilde{a}_{02} = \exp(i\mathbf{k}_1\mathbf{r}_1)\times$$
$$\times[{}^2T'(\theta_{2l} = \theta_{(1-2)s}, \varphi_{2l} = \varphi_{(1-2)s}, \theta_{2s}, \varphi_{2s})]\times$$
$$\times[{}^1T'(\theta_l, \varphi_l, \theta_{1s} = \theta_{(1-2)s}, \varphi_{1s} = \varphi_{(1-2)s})]\times \quad (36)$$
$$\times\frac{\exp(ik|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}.$$

Отметим, что в (30), (32) первые слагаемые в числителях представляют собой соответствующие невозмущенные АР, взвешенные фазовыми множителями. Выражения для случая, когда плоская первичная волна набегает на рассеиватели сверху вниз, получаются из (27)–(36), если во всех экспонентах, содержащих $\mathbf{k}_1$, сделать замену на $\mathbf{k}_2$.

Пусть точка C – центр отрезка, соединяющего центры рассеивателей, R_1, R_2, R_C – расстояния, отсчитываемые соответственно из центров первого и второго рассеивателей, а также из точки C в точку наблюдения. Тогда, при условии $R_1, R_2, R_C \gg |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$, имеем $\theta_{1s} \approx \theta_{2s} \approx \theta_s$, $\varphi_{1s} \approx \varphi_{2s} \approx \varphi_s$, и поле рассеяния m-го рассеивателя равно

$$u_{ms} \approx ({}^m\bar{T}(\theta_i, \varphi_i, \theta_s, \varphi_s)\exp(-ik\hat{\mathbf{R}}_C\bar{\mathbf{r}}_m)\times$$
$$\times\frac{\exp(ikR_C)}{R_C}, \quad m = 1, 2. \quad (37)$$

Здесь R_C, θ_s, φ_s – сферические координаты точки наблюдения относительно точки C; $\mathbf{R}_C$ и $\hat{\mathbf{R}}_C = \dfrac{\mathbf{R}_C}{R_C}$ соответственно вектор, соединяющий точку C с точкой наблюдения, и единичный вектор, коллинеарный ему; $\bar{\mathbf{r}}_1 = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)/2$, $\bar{\mathbf{r}}_2 = (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)/2$. Суммируя поля (37), получаем для АР совокупного рассеивателя с центром в точке C, состоящего из двух рассмотренных рассеивателей (что согласуется с (26)),

$$\bar{T}'(\theta_i, \varphi_i, \theta_s, \varphi_s) = {}^1\bar{T}'(\theta_i, \varphi_i, \theta_s, \varphi_s)\times$$
$$\times\exp(-ik\hat{\mathbf{R}}_C\bar{\mathbf{r}}_1) + {}^2\bar{T}'(\theta_i, \varphi_i, \theta_s, \varphi_s)\exp(-ik\hat{\mathbf{R}}_C\bar{\mathbf{r}}_2). \quad (38)$$

Очевидно, что после нахождения АР (38) легко реализуется процедура по учету третьего рассеивателя (и далее до исчерпания всех рассеивателей). Первые два при этом характеризуются АР (38) и центром в точке C и т.д.

Таким образом, в работе получены точные выражения (интегральные уравнения), позволяющие в общем виде рассчитывать результирующие АР двух рассеивателей в условиях, когда они находятся в поле первичной волны и в возмущающем поле друг друга при условии, что известны невозмущенные АР рассеивателей. Это в свою очередь позволяет организовать процедуру учета множественного рассеяния на трех и более телах. Кроме того, получены нулевые геометрооптические приближения результирующих АР для случая, когда рассеиватели находятся в зоне Фраунгофера относительно друг друга. Приведенные выражения позволяют достаточно просто решать аналогичные задачи учета влияния границ раздела и неоднородностей на результирующие АР.

Изложенный метод, дающий те же, но лишь в других терминах, решения задачи множественного рассеяния, что и методы, изложенные в [1–15], еще раз подчеркивает, что АР является отнюдь не только и не столько характеристикой дальнего поля, а заключает в себе исчерпывающую информацию о поле в любой точке вне рассеивателей. Кроме того, изложенный метод позволяет при наличии банка данных невозмущенных АР рассеивателей легко конструировать решение задач множественного рассеяния с произвольной конфигурацией рассеивателей в отличие от альтернативного подхода, где решение каждый раз нужно строить заново.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1. АМПЛИТУДА РАССЕЯНИЯ ПЛОСКОЙ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА

Пусть в однородном пространстве плоскость $z = 0$ служит границей раздела однородного нижнего полупространства $z \le 0$ и верхнего слоисто-неоднородного полупространства $z \ge 0$. При падении плоской волны $\exp(i(k_{lx}x + k_{ly}y + \alpha_l z))$ из нижнего полупространства на границу раздела в нем образуется отраженная от этой границы плоская волна $V(\alpha_l)\exp(i(k_{lx}x + k_{ly}y - \alpha_l z))$, где $V(\alpha_l)$ – коэффициент отражения от границы. Для вычисления АР отражающей плоскости формально воспользуемся выражением (3). Учитывая, что рассеянное поле в этом случае равно

$$u_s(\mathbf{x}, \mathbf{k}_l) = V(\alpha_l)\exp(i(k_{lx}x + k_{ly}y - \alpha_l z)),$$

перепишем (3) в виде

$$V(\alpha_l)\exp(i(k_{lx}x + k_{ly}y - \alpha_l z)) =$$
$$= \frac{i}{2\pi}\int\limits_{R^2}\frac{T_1^2(\mathbf{k}_l, \mathbf{k}_s)}{\alpha_s}\exp(i(k_{sx}x + k_{sy}y - \alpha_s z))dk_{sx}dk_{sy}.$$

Анализ последнего выражения показывает, что АР отражающей плоскости равна

$$T_1^2(\mathbf{k}_l, \mathbf{k}_s) = \frac{2\pi}{i}V(\alpha_l)\alpha_l\delta(k_{lx}-k_{sx})\delta(k_{ly}-k_{sy}) = \\ = \frac{2\pi}{i}V(\alpha_s)\alpha_s\delta(k_{lx}-k_{sx})\delta(k_{ly}-k_{sy}). \quad (\text{П}1)$$

Здесь использовано фильтрующее свойство δ-функций.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2. АМПЛИТУДЫ РАССЕЯНИЯ ТРЕХ БЛИЗЛЕЖАЩИХ СФЕР С ОДНОРОДНЫМ УСЛОВИЕМ ДИРИХЛЕ НА ГРАНИЦАХ

Пусть задано три идентичных сферических рассеивателя S_m, $m = 1, 2, 3$, с однородными условиями Дирихле на поверхности (абсолютно мягкие границы) радиусом R_0. Центры сфер находятся соответственно в точках $\left(0, 0, -\frac{z_0}{2}\right)$, $\left(0, 0, \frac{z_0}{2}\right)$ и $(x = z_0, 0, 0)$. Невозмущенная АР подобной сферы в низкочастотном приближении с точностью до $O(k^3)$ приведена в работе [28, с. 86]:

$$T(\theta_l, \varphi_l, \theta_s, \varphi_s) = \\ = A + B(\cos\theta_l\cos\theta_s + \sin\theta_l\sin\theta_s\cos(\varphi_l - \varphi_s)), \quad (\text{П}.2)$$

$$A = -R_0 + \frac{2}{3}k^2R_0^3 + ikR_0^2; \quad B = -k^2R_0^3.$$

При переходе в интегралах типа (17) к сферической системе координат $dk_xdk_y = \xi d\xi d\varphi = k^2\sin\theta\cos\theta d\theta d\varphi = k\alpha\sin\theta d\theta d\varphi$, пределы интегрирования меняются следующим образом: $k_x, k_y \in R^2 \Rightarrow \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2} - i\infty\right)$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. Элементарные вычисления дают [25]:

$$\left.\begin{aligned} T_1'^2(\theta_l, \varphi_l, \theta_s, \varphi_s) = T_2'^1(\theta_l, \varphi_l, \theta_s, \varphi_s) = \\ = A + B(-\cos\theta_l\cos\theta_s + \sin\theta_l\sin\theta_s\cos(\varphi_l - \varphi_s)) \\ T_1'^1(\theta_l, \varphi_l, \theta_s, \varphi_s) = T_2'^2(\theta_l, \varphi_l, \theta_s, \varphi_s) = \\ = A + B(\cos\theta_l\cos\theta_s + \sin\theta_l\sin\theta_s\cos(\varphi_l - \varphi_s)) \end{aligned}\right\}, \quad (\text{П}.3)$$

$$\varphi_l, \varphi_s \in [0, 2\pi]; \quad \theta_l, \theta_s \in \left[0, \frac{\pi}{2} - j\infty\right).$$

Здесь θ_l, φ_l, θ_s, φ_s – сферические координаты векторов $\mathbf{k}_l$ и $\mathbf{k}_s$ соответственно на сфере радиусом k в пространстве (k_x, k_y, k_z) при изменении $\xi \in [0, \infty)$. После подстановки (П.3) в интегралы типа (16), (17) и далее могут быть точно вычислены результирующие АР для сфер. При использовании приближенных выражений (27)–(36) при вычислении АР в них необходимо подставлять значения невозмущенных выражений для АР.

Проведем вычисления для трех сфер при падении плоской волны с углами $\theta_l = \pi/2$, $\varphi_l = 0$. Оценим величину совокупной АР $\bar{T}'$, например, в направлении $\theta_s = \pi/2$, $\varphi_s = 0$, совпадающем с направлением падения первичной волны. Это интересно еще и потому, что справедливо соотношение [28, с. 69] $Q = \frac{4\pi}{k}\operatorname{Im}\bar{T}'(\theta_l, \varphi_l, \theta_s = \theta_l, \varphi_s = \varphi_l)$, где Q – полное поперечное сечение рассеяния. Вначале из (30), (27)–(29) и (П.2) вычислим совокупную АР ${}^{1,2}T\left(\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, 0\right)$ рассеивателей S_1 и S_2 для прямого рассеяния и ${}^{1,2}T\left(\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{\pi}{2}, 0\right)$ – для обратного рассеяния

$$\begin{aligned} {}^{1,2}T'\left(\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, 0\right) &= 2\frac{A + B + A^2\beta}{1 - \beta^2A(A - B)}, \\ {}^{1,2}T'\left(\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{\pi}{2}, 0\right) &= 2\frac{A - B + A^2\beta}{1 - \beta^2A(A - B)}, \end{aligned} \quad (\text{П}4)$$

где $\beta = \frac{\exp(ikz_0)}{z_0}$. Примем (П.4) за невозмущенные значения АР совокупного рассеивателя с центром в начале координат, заменяющего два первых рассеивателя. Далее, вновь используя (30) и (27)–(29), а также (П.4) и (П.2) для расчетов невозмущенных АР совокупного и третьего рассеивателей, вычислим результирующую АР ${}^{1,2}\bar{T}'\left(\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, 0\right)$ для совокупного рассеивателя

$${}^{1,2}\bar{T}'\left(\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, 0\right) = \frac{{}^{1,2}T'\left(\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, 0\right) + \exp(ikz_0)\beta(A - B)\left[{}^{1,2}T'\left(\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{\pi}{2}, 0\right)\right]}{1 - \beta^2(A - B)\left[{}^{1,2}T'\left(\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{\pi}{2}, 0\right)\right]} \quad (\text{П}.5)$$

и с помощью (32), (34)–(36), (П.4) и (П.2) вычислим результирующую АР рассеивателя S_3

$$
{}^{3}\bar{T}'\left(\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, 0\right) = \tag{П.6}
$$

$$
= \frac{\exp(ikz_0)(A+B) + \beta(A+B)\left[{}^{1,2}T'\left(\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, 0\right)\right]}{1 - \beta^2(A+B)\left[{}^{1,2}T'\left(\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{\pi}{2}, 0\right)\right]}.
$$

После этого значение совокупной АР всей системы рассеивателей относительно точки $\left(x = \frac{z_0}{2}, 0, 0\right)$ находится из (38)

$$
\bar{T}'(\theta_i, \varphi_i, \theta_s, \varphi_s) = {}^{1,2}\bar{T}'\left(\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, 0\right)\exp\left(ik\frac{z_0}{2}\right) + \tag{П.7}
$$

$$
+ {}^{3}\bar{T}'\left(\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, 0\right)\exp\left(-ik\frac{z_0}{2}\right).
$$

Отметим, что выражения (П.5)–(П.7) при $z_0 \longrightarrow \infty$ сводятся к соответствующим выражениям, полученным без учета множественного рассеяния.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Tversky V.* Multiple scattering of radiation by an arbitrary configuration of parallel cylinders // J. Acoust. Soc. Amer. 1952. V. 24. № 1. P. 42–46.
2. *Waterman P.C., Truell R.* Multiple scattering of waves // J. Math. Phys. 1961. № 2. P. 512–537.
3. *Иванов Е.А.* Дифракция на двух телах. Минск: Наука и техника. 1968.
4. *Марневская Л.А.* Дифракция плоской скалярной волны на двух сферах // Акуст. журн. 1969. Т. 14. № 3. С. 356–360.
5. *Марневская Л.А.* Рассеяние плоской волны на двух акустически-жестких сферах // Акуст. журн. 1970. Т. 15. № 4. С. 499–502.
6. *Peterson B., Strom S.* Matrics formulation of acoustic scattering from an arbitrary number of scatterers // J. Acoust. Soc. Amer. 1974. V. 56. № 6. P. 771.
7. *Varadan V.K.* Multiple Scattering of Acoustic, Electromagnetic and Elastic Waves // Acoustic, Electromagnetic and Elastic Wave Scattering-Focus on the T-Matrics Approach. Pergamon Press. 1980. P. 103–134.
8. *Gaunaurd J.C., Huang H., Strifors H.* Acoustic scattering by a pair of spheres // J. Acoust. Soc. Amer. 1995. V. 98. № 1. P. 495–507.
9. *Huang H., Gaunaurd J.C.* Acoustic scattering of a plane wave by two spherical elastic shells // J. Acoust. Soc. Amer. 1995. V. 98. № 4. P. 2149–2156.
10. *Koc S., Chew W.S.* Calculation of acoustical scattering from a cluster of scatterers // J. Acoust. Soc. Amer. 1998. V. 103. № 2. P. 721–734.
11. *Gumerov N.A., Duraiswami R.* Computation of scattering from N spheres using multipole reexpansion // J. Acoust. Soc. Amer. 2002. V. 112. № 6. P. 2688–2701.
12. *Sherer S.* Scattering of sound from axisymetric sources by multiple circular cylinders // J. Acoust. Soc. Amer. 2004. V. 115. № 2. P. 488–496.
13. *Le Bas P.-Y., Luppe F., Conoir J.-M., Franklin H.* N-shell cluster in water: Multiple scattering of resonances // J. Acoust. Soc. Amer. 2004. V. 115. № 4. P. 1460–1467.
14. *Буров В.А., Вечерин С.Н., Румянцева О.Д.* Статистическая оценка пространственного спектра вторичных источников // Акуст. журн. 2004. Т. 50. № 1. С. 9–19.
15. *Андреева И.Б., Тарасов Л.Л.* Рассеяние акустических волн на мелких ракообразных // Акуст. журн. 2003. Т. 49. № 2. С. 125–128.
16. *Клещев А.А.* Рассеяние звука сфероидальными телами, находящимися у границы раздела сред // Акуст. журн. 1977. Т. 23. № 3. С. 404–410.
17. *Кравцов Ю.А., Кузькин В.М., Петников В.Г.* Дифракция волн на регулярных рассеивателях в многомодовых волноводах // Акуст. журн. 1984. Т. 30. № 2. С. 339–343.
18. *Rao S.M., Sridhara B.S.* Acoustic scattering from arbitrary shaped multiple bodies in half-space: Method of moments solution // J. Acoust. Soc. Amer. 1992. V. 91. № 1. P. 652–657.
19. *Белов В.Е., Горский С.М., Зиновьев А.Ю., Хилько А.И.* Применение метода интегральных уравнений к задаче о дифракции акустических волн на упругих телах в слое жидкости // Акуст. журн. 1994. Т. 40. № 4. С. 548–560.
20. *Gaunaurd J.C., Huang H.* Acoustic scattering by a spherical body near a plane boundary // J. Acoust. Soc. Amer. 1994. V. 96. № 6. P. 2526–2536.
21. *Bishop G.C., Smith J.* Scattering from rigid and soft targets near a planar boundary: Numerical results // J. Acoust. Soc. Amer. 1999. V. 105. № 1. P. 130–143.
22. *Кузькин В.М.* Рассеяние звука на теле в плоскослоистом волноводе // Акуст. журн. 2003. Т. 49. № 1. С. 68–74.
23. *Григорьев В.А., Кацнельсон Б.Г., Переселков С.А., Петников В.Г.* Рассеяние звука пространственно локализованными неоднородностями в мелководных волноводах в присутствии внутренней волны // Акуст. журн. 2003. Т. 49. № 1. С. 36.
24. *Ghosh Roy D.N., Orris G.J.* Born scattering in a acoustical waveguide // J. Acoust. Soc. Amer. 2003. V. 114. № 2. P. 626–633.
25. *Зацерковный А.В., Сергеев В.С., Шарфарец Б.П.* Использование амплитуды рассеяния для решения

задач дифракции волн в полупространстве // Акуст. журн. 2001. Т. 47. № 5. С. 650–656.

26. *Шарфарец Б.П.* Поле сферического излучателя звука в идеальном волноводе // Акуст. журн. 2002. Т. 48. № 4. С. 547–551.

27. *Шарфарец Б.П.* Метод расчета поля непрозрачного источника и поля рассеяния неоднородного включения в плоскослоистой среде // Акуст. журн. 2004. Т. 50. № 1. С. 123–128.

28. *Морс Ф.М., Фешбах Г.* Методы теоретической физики. Т. 2. М.: 1960. 896 с.

Method for Solving the Problems of Multiple Scattering by Several Bodies in a Homogeneous Unbounded Medium

B. P. Sharfarets

Ul. Kubinskaya 14–70, St. Petersburg, 125128 Russia

e-mail: sharg@mail.rcom.ru

Abstract—A method is developed for solving the problems of multiple scattering by an aggregate of bodies in a homogeneous unbounded medium. For this purpose, the problem on the multiple scattering produced by two bodies in the field of a plane wave is first considered under the assumption that the initial unperturbed scattering amplitudes of both scatterers are known. The solution is constructed by considering plane waves multiply rescattered by the scatterers. Integral equations are obtained that allow one to calculate the resulting scattering amplitude of each scatterer and the combined scattering amplitude of the system of two scatterers. It is shown that the knowledge of the solution to this problem is sufficient to solve the problem on the scattering field of a system consisting of an arbitrary number of scatterers. Expressions for the scattering amplitude in the case of an arbitrary primary field are presented. The relationship between the integral equations describing the multiple scattering in a homogeneous space and the multiple scattering by a single scatterer located near an interface is demonstrated. Approximate expressions are given for calculating the scattering amplitude in the case of multiple scattering.