АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2005, том 51, № 6, с. 822–828

УДК 534.222

РАСПРОСТРАНЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗВУКОВОЙ ВОЛНЫ В НЕКОНСОЛИДИРОВАННОЙ ГРАНУЛИРОВАННОЙ СРЕДЕ

© 2005 г. К. А. Наугольных[1], И. Б. Есипов[2]

[1]Университет Колорадо,Технологическая лаборатория исследования окружающей среды/ЗелТех
80303 Боулдер, Бродвей, 325, Колорадо, США
E-mail: Konstantin.Naugolnykh@noaa.gov
[2]Акустический институт им. Н.Н. Андреева РАН
117036 Москва, ул. Шверника 4
E-mail: ibesipov@akin.ru

Поступила в редакцию 11.03.05 г.

Рассматривается распространение звуковой волны высокой интенсивности в неконсолидированной среде. Диссипативные эффекты учитываются на основе теории Букингема для релаксационного поглощения звука в водонасыщенных осадках. Получено нелинейное уравнение для среды с релаксацией и проанализированы его решения. Вторая гармоника в такой среде спадает также как линейная звуковая волна той же частоты. Стационарный профиль ударной волны имеет особую форму, обусловленную релаксационными эффектами.

ВВЕДЕНИЕ

Изменение формы звуковых волн высокой интенсивности определяется, в основном, нелинейными и диссипативными эффектами. Если исходная синусоидальная волна достаточно интенсивна, то происходит постепенное увеличение крутизны ее фронта, что приводит к появлению разрывов на каждом периоде волны. С другой стороны, влияние диссипативных процессов стремится сгладить волновой профиль, уменьшая градиенты скорости и температуры. Таким образом, в процессе распространения интенсивной волны ее профиль формируется в результате баланса нелинейных и диссипативных эффектов. Распространение волн в нелинейной среде при наличии вязкости и теплопроводности, приводящих к затуханию, квадратично зависящему от частоты, уже рассматривалось как теоретически, так и экспериментально (см., например, [1]). Позднее Букингем [2] развил теорию распространения звука в среде с памятью, когда уменьшение уровня напряжения в среде определяется его значением в данный момент времени в соответствии с уравнением релаксации. Такая среда может рассматриваться как модель водонасыщенных морских осадков [3]. Волновое уравнение в этом случае содержит новый диссипативный член, описывающий внутренние потери, возникающие при контакте между гранулами. Согласно этой теории, коэффициент затухания звука будет зависеть от частоты в первой степени. Такую же линейную зависимость от частоты обычно имеет коэффициент поглощения звука в морских осадках [4, 5]. Степенной закон для частотной зависимости затухания имеет место также во многих биологических тканях [6]. Баланс нелинейности и диссипации в такой среде имеет характерные особенности, которые наблюдались в эксперименте, обсуждаемом в [7]. Некоторые из этих особенностей рассматриваются в настоящей статье.

ЭВОЛЮЦИОННОЕ УРАВНЕНИЕ

Единая теория распространения звука в насыщенных морских осадках развивается на основе линейного волнового уравнения, которое включает в себя новый диссипативный член, описывающий внутренние потери, возникающие в результате контактов между гранулами. Неконсолидированные осадки рассматриваются как двухфазная среда, состоящая из минеральных частиц и воды, но не имеющая жесткой структуры. Наш анализ основывается на решении одномерного линейного волнового уравнения, в котором диссипация, обусловленная контактами между гранулами, определяется коэффициентом потерь, учитывающим гистерезисные свойства, или память гранулированных сред. Эффект памяти в волновом уравнении учитывается через напряжение трения, которое определяется временно́й сверткой колебательной скорости с функцией памяти материала $h(t)$ [2]:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \frac{b}{\rho_0 c_0^2}\frac{\partial^3}{\partial t\partial x^2}[h(t)\otimes\varphi(t)] = 0, \quad (1)$$

где c_0 – скорость распространения звука в среде в отсутствие потерь, обусловленных взаимодействием между гранулами. Потери могут быть выражены через объемные свойства двух частей среды – минеральных гранул и морской воды [2], а ρ_0 – равновесной плотностью среды. Функция отклика материала $h(t)$ может быть выбрана в виде:

$$h(t) = u(t)t_0^{-1}\left(1 + \frac{t}{t_0}\right)^{-n}. \quad (2)$$

Здесь $u(t)$ – единичная функция, обеспечивающая причинность отклика среды, а t_0 и n – материальные параметры, в частности, t_0 имеет смысл времени релаксации. Коэффициент диссипации $b = 4/3\eta_f + \zeta_f$, и η_f, ζ_f описывают трение между гранулами среды, а член $h(t) \otimes \varphi(t)$ обозначает свертку во времени. Диссипативный член в уравнении (1), аналогичный члену в уравнении гидродинамики, имеет производную $\partial^2/\partial x^2$, которая действует не на колебательную скорость, а на результат свертки этой скорости с функцией импульсного отклика материала среды $h(t)$. Если $h(t)$ является дельта-функцией Дирака, то результат такой свертки сводится к колебательной скорости частиц.

Рассмотрим распространение волны в одном направлении, что позволяет преобразовать уравнение (1) в уравнение первого порядка.

Оператор волнового уравнения может быть представлен как произведение двух операторов

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c_0}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c_0}\frac{\partial}{\partial t}\right)\varphi. \quad (3)$$

При распространении волны в положительном направлении x в идеальной среде получаем

$$-\frac{1}{c_0}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad (4)$$

так, что для среды с малой диссипацией можно использовать соотношение

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{1}{c_0}\frac{\partial\varphi}{\partial t} \approx 2\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad (5)$$

и после интегрирования уравнения (1) по x, получаем

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{1}{c_0}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{b}{2\rho_0 c_0^2}\frac{\partial^2}{\partial t\partial x}[h(t) \otimes \varphi(t)] = 0. \quad (6)$$

Заменяя переменные

$$x \longrightarrow x', \quad t - x/c_0 = \tau,$$
$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial\tau}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = -c_0^{-1}\frac{\partial}{\partial\tau} + \frac{\partial}{\partial x'}, \quad (7)$$

приходим к выражению:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x'} = \frac{b}{2\rho_0 c_0^3}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}[h(\tau) \otimes \varphi(\tau)] = 0. \quad (8)$$

Учет нелинейных эффектов приводит к появлению дополнительного члена в эволюционном уравнении (8) [1]

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x'} - \frac{\epsilon}{2c_0^3}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right)^2 - \frac{b}{2\rho_0 c_0^3}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}[h(\tau) \otimes \varphi(\tau)] = 0. \quad (9)$$

Преобразуя нелинейный член с помощью соотношения

$$-\frac{1}{c_0}\frac{\partial}{\partial\tau} = \frac{\partial}{\partial x'}, \quad (10)$$

мы получаем

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x'} - \frac{\epsilon}{2c_0}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x'}\right)^2 - \frac{b}{2\rho_0 c_0^3}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}[h(\tau) \otimes \varphi(\tau)] = 0. \quad (11)$$

Для того чтобы получить уравнение для колебательной скорости v, сделаем подстановку $v = \partial\varphi/\partial x'$, продифференцируем нелинейный член по x', а затем вернемся обратно к производной $\partial/\partial\tau$:

$$\frac{\partial v}{\partial x'} - \frac{\epsilon}{2c_0^2}\frac{\partial v^2}{\partial\tau} - \frac{b}{2\rho_0 c_0^3}\frac{\partial^3}{\partial\tau^2\partial x'}[h(\tau) \otimes \varphi(\tau)] = 0, \quad (12)$$

или

$$\frac{\partial v}{\partial x'} - \frac{\epsilon}{c_0^2}v\frac{\partial v}{\partial\tau} = \frac{b}{2\rho_0 c_0^3}\frac{\partial^3}{\partial\tau^2\partial x'}[h(\tau) \otimes \varphi(\tau)] \quad (13)$$

– эволюционному уравнению для нелинейной волны в релаксирующей среде.

Стационарная волна, в частности, стационарный профиль ударной волны, подчиняется уравнению

$$-\frac{\epsilon}{2c_0^2}\frac{\partial v^2}{\partial\tau} - \frac{b}{2\rho_0 c_0^3}\frac{\partial^3}{\partial\tau^2\partial x'}[h(\tau) \otimes \varphi(\tau)] = 0, \quad (14)$$

что соответствует балансу нелинейных и диссипативных процессов.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ

Рассмотрим теперь распространение плоской линейной волны в неконсолидированной гранулированной среде. Наличие в среде релаксацион-

ных процессов приводит к особенностям в затухании распространяющейся звуковой волны из-за возникновения необратимых эффектов. Эволюционное уравнение может быть использовано для того, чтобы достаточно просто определить затухание звуковой волны подобно тому, как это было сделано Букингемом [2] на основе волнового уравнения. Подходящее волновое уравнение могло бы быть представлено в виде

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{1}{c_0}\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{b}{2\rho_0c_0^2}\frac{\partial^2}{\partial t\partial x}[h(t)\otimes\varphi(t)] = -S\delta(t)\delta(x), \tag{15}$$

где S – производительность импульсного источника. Стандартный метод решения линейного неоднородного уравнения основан на применении преобразования Фурье. Преобразование Фурье этого уравнения по времени имеет вид

$$\left[1+i\omega\frac{b}{2\rho_0c_0^2}H(i\omega)\right]\frac{\partial\Phi}{\partial x}-ik_0\Phi(i\omega) = S\delta(x),\quad k_0=\frac{\omega}{c_0}, \tag{16}$$

где $\Phi(i\omega)$ и $H(i\omega)$ – трансформанты Фурье соответственно для φ, и $h(t)$. При этом свертка сводится к произведению $H(i\omega)\frac{\partial\Phi}{\partial x}$. Второе преобразование Фурье по x приводит к алгебраическому уравнению

$$\left\{-ik_0-\left[1+i\omega\frac{b}{2\rho_0c_0^2}H(i\omega)\right]is\right\}\Phi_s = -S, \tag{17}$$

где Φ_s – трансформанта Фурье по x функции Φ, так что $\Phi(i\omega,x)=\int\Phi_se^{-isx}ds$. Отсюда следует, что

$$\Phi_s = \frac{S}{is\left[1+\frac{i\omega b}{2\rho_0c_0^2}H(i\omega)\right]+ik_0} = \frac{S}{isq+ik_0} = \frac{S}{iq\left(s+\frac{k_0}{q}\right)}. \tag{18}$$

Здесь

$$q = 1+\frac{i\omega b}{2\rho_0c_0^2}H(i\omega), \tag{19}$$

и

$$H(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}h(t)\exp(-i\omega t)dt = t_0^{n-1}\int_0^{\infty}t^{-n}\exp(-i\omega t)dt = \frac{\Gamma(1-n)}{(i\omega t_0)^{1-n}}, \tag{20}$$

где $\Gamma(1-n)$ – гамма-функция.

Подставляя теперь выражение (20) в (19), мы можем представить функцию q в виде

$$q = 1+(i\omega t_0)^n\chi_f,\quad \chi_f = \frac{b\Gamma(1-n)}{2\rho_0c_0^2t_0}. \tag{21}$$

Обратное преобразование по волновому числу s приводит к уравнению

$$\Phi(i\omega,x) = \frac{S}{2\pi iq}\int_{-\infty}^{\infty}\left(s+\frac{k_0}{q}\right)^{-1}\exp(isx)ds = \frac{S}{2\pi iq}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{isx}ds}{\left(s+\frac{k_0}{q}\right)} = \frac{S}{q}\exp\left(-\frac{ik_0}{q}x\right). \tag{22}$$

Здесь мы использовали значение вычета $s_0=-k_0/q$ и уравнение $\oint f(z)dz = 2\pi ia(z_0)$, где $a(z_0)$ – коэффициент при члене $(1/z-z_0)$ при разложении в ряд Лорана. Затем, после подстановки уравнения (21), мы получаем

$$\Phi(i\omega,x) = \frac{S}{1+(i\omega t_0)^n\chi_f}\exp\left(-i\frac{\omega|x|}{c_0(1+(i\omega t_0)^n\chi_f)}\right) \tag{23}$$

$$\Phi(i\omega,x) = \frac{S}{1+(i\omega t_0)^n\chi_f}\exp\left\{-\frac{i\omega|x|}{c_0\mathrm{Re}(1+(i\omega t_0)^n\chi_f)}-\frac{i\omega|x|}{c_p}\left[-\frac{c_p}{c_0}\mathrm{Im}\frac{1}{1+(i\omega t_0)^n\chi_f}\right]\right\}. \tag{24}$$

Полученный результат удобно представить в виде комплексного волнового числа. Действительно, вводя

$$c_p = c_0\mathrm{Re}(1+(i\omega t_0)^n\chi_f),\quad \text{и } \beta = -\frac{c_p}{c_0}\mathrm{Im}\frac{1}{1+(i\omega t_0)^n\chi_f}, \tag{25}$$

полученный результат можно представлен в виде

$$k = \frac{\omega}{c_p}(1 - j\beta). \quad (26)$$

Тогда можно использовать следующее представление:

$$\Phi(i\omega, x) = e^{-i\omega x/c_p} e^{-\beta\omega x/c_p}. \quad (27)$$

В частном случае при $n \ll 1$ выражения β и c_p – можно упростить. Следуя [2], получаем

$$c_p \approx c_0\sqrt{1 + \chi_f}\left[1 + \frac{2\beta_p}{\pi}\ln(|\omega|t_0)\right], \quad (28)$$

и

$$\beta \approx \beta_p \operatorname{sign}(\omega), \quad (29)$$

где

$$\beta_p = \frac{n\pi\chi_f}{4(1 + \chi_f)}. \quad (30)$$

В большинстве случаев дисперсия слаба, то

$$c_p \approx c_0\sqrt{1 + \chi_f}. \quad (31)$$

Так как тангенс потерь β_p и фазовая скорость c_p не зависят от частоты, то коэффициент затухания является линейной функцией частоты ω

$$\alpha_p = \frac{\omega\beta_p}{c_p} = \frac{\omega n\pi\chi_f}{4(1 + \chi_f)^{3.2}}, \quad (32)$$

где дисперсия определяется выражением (31).

Эти результаты релаксационной теории согласуются с наблюдаемыми геоакустическими свойствами многих неконсолидированных морских осадков. В частности, коэффициент затухания звуковой волны, распространяющейся в такой среде, пропорционален первой степени частоты. В качестве примера приведем уже опубликованные наши данные [7]. Затухание звука в водонасыщенных неконсолидированных морских осадках было измерено с помощью широкополосного звукового импульса, возбуждаемого лазерным излучением. Сигнал регистрировался до и после его распространения через образец кобальтомарганцевого коркового отложения (КМК). Измеренная спектральная переходная функция показана на рис. 1, кривые *а*, *б*. Образец коркового отложения, который использовался в эксперименте, имел зернистую структуру с диаметром гранул $d = (1–5) \times 10^2$ мкм; для такой среды коэффициент $\beta = 0.015$ [2] так что согласно уравнению (30) $\alpha_p = 10^{-7}\omega$ см$^{-1}$. Соответствующая теоретическая переходная функция представлена на рис. 1, кривая *в*. Сравнение экспериментальных и теоретических кривых указывает на то, что затухание звука в неконсолидированной водонасыщенной среде линейно зависит от частоты , что соответствует теории релаксационного механизма затухания [2].

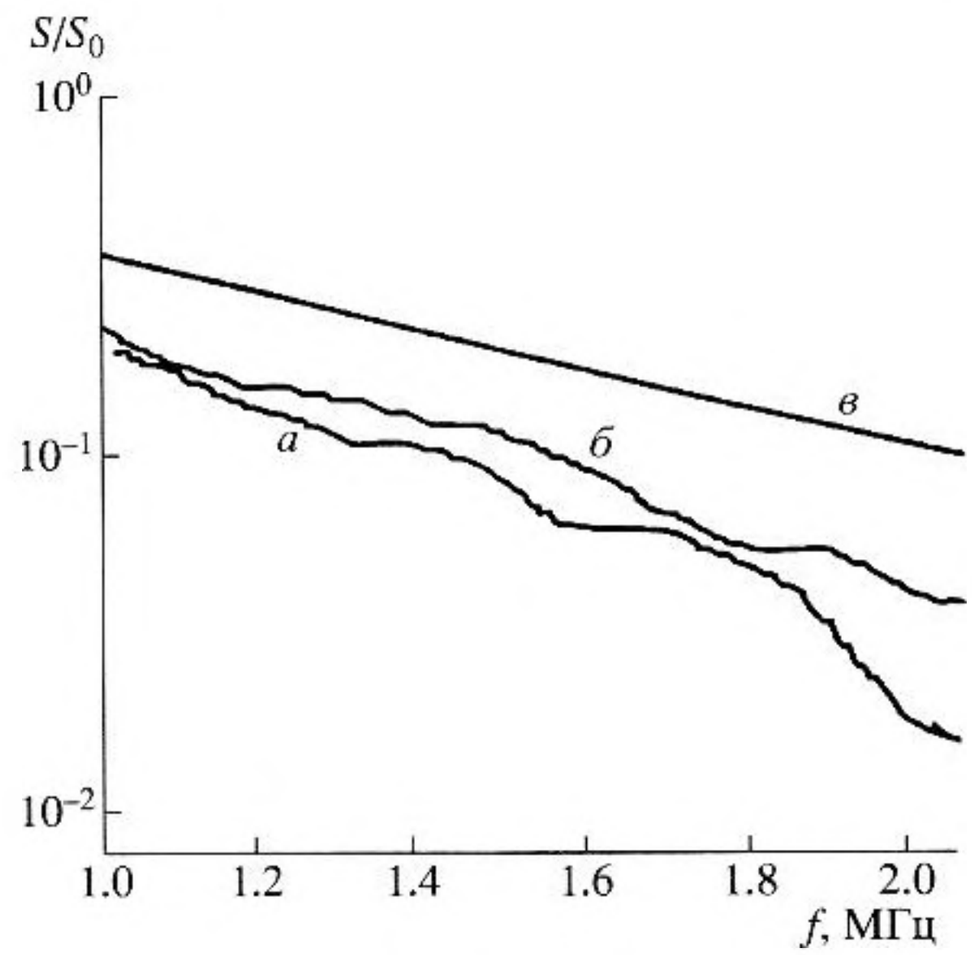

Рис. 1. Спектральные переходные характеристики образца коркового отложения: (*а*) звуковой импульс малой амплитуды, (*б*) звуковой импульс большой интенсивности, (*в*) теория.

НЕЛИНЕЙНАЯ ВОЛНА В СРЕДЕ С РЕЛАКСАЦИЕЙ

Эволюция первоначально синусоидальной волны при ее распространении может быть представлена как изменение ее спектрального состава. Рост высокочастотных гармоник при распространении плоской синусоидальной волны в вязкой, теплопроводящей среде уже рассматривался во многих работах [8]. Генерация гармоник при распространении волны высокой интенсивности в среде с релаксацией, являющейся моделью неконсолидированной среды, может быть рассмотрено методом последовательных приближений для эволюционного уравнения (13). Решение этого уравнения будем искать в виде суммы

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 \ldots \quad (33)$$

Граничное условие может быть выбрано в виде

$$\varphi_1 = \varphi e^{i\omega_1 t}, \quad \varphi_2 = 0, \quad x = 0. \quad (34)$$

Тогда уравнение первого порядка (линейное), согласно (9), имеет вид

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x'} - \frac{b}{2\rho_0 c_0^3}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}[h(\tau) \otimes \varphi(\tau)] = 0. \quad (35)$$

Его решение можно представить в виде

$$\varphi_1 = \varphi_{10} e^{-\alpha_p x'} e^{i\omega_1 \tau}. \quad (36)$$

Уравнение второго порядка имеет вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x'} - \frac{b}{2\rho_0 c_0^3}\frac{\partial^2}{\partial \tau^2}[h(\tau) \otimes \varphi(\tau)] = \frac{\epsilon}{2c_0^3}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau}\right)^2 = \quad (37)$$
$$= N\varphi_{10}^2 e^{-i2\omega_1 x'/c_p} e^{-2\alpha_p x'} e^{i2\omega_1 \tau},$$

$$N = \frac{\epsilon}{2c_0^3}. \quad (38)$$

Преобразование Фурье по t и x' дает

$$\left\{-ik_0 - \left[1 + i\omega\frac{b}{2\rho_0 c_0^2}H(i\omega)\right]is\right\}\Phi_s = -NS_tS_x, \quad (39)$$

где Φ_s – преобразование Фурье для φ по x', S_tS_x – Фурье-трансформанты $(\partial\varphi_{11}/\partial\tau)^2$. Здесь мы учли, что согласно выражению (7), переменная τ зависит как от времени t, так и от пространственной переменной x. После применения обратного преобразования по x', уравнение для $\varphi_2(i\omega\tau)$ принимает вид

$$\varphi_2(i\omega\tau) = \varphi_{20} e^{-i2\omega x' x/c_p} e^{-2\alpha_p x'} e^{i2\omega_1 \tau}. \quad (40)$$

Отсюда следует, что вторая гармоника волны, распространяющейся в релаксирующей среде, затухает так же, как линейная волна малой интенсивности той же частоты в отличие от обычного затухания, обусловленного вязкими эффектами, и, следовательно, растет с частотой линейно, а не квадратично [8].

ВОЛНОВОЙ ПРОФИЛЬ СТАЦИОНАРНОЙ СЛАБОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ

Важной характеристикой среды является профиль стационарной, слабой ударной волны, который свидетельствует о балансе нелинейных и диссипативных эффектов. Сравнение профиля стационарной, слабой ударной волны с начальным профилем возмущения в рассматриваемой задаче позволяет предсказать эволюцию начального профиля и выбрать подходящее приближение. Действительно, если начальный профиль гладкий и масштаб его толщины превышает пространственный масштаб толщины стационарной волны, то под влиянием нелинейных эффектов в процессе распространения он становится круче. В этом случае диссипативными эффектами можно пренебречь. С другой стороны, первоначально тонкий профиль по сравнению со стационарным фронтом при распространении будет сглаживаться под действием диссипативных эффектов, и в этом случае можно пренебречь нелинейностью.

Рассмотрим сначала профиль слабой ударной волны в обычной вязкой среде. Если $h(\tau) = \delta(\tau)$, то диссипативный член в уравнении (14) имеет вид

$$\frac{b}{2\rho_0 c_0^3}\frac{\partial^3}{\partial\tau\partial x'}[h(\tau) \otimes \varphi(\tau)] = \quad (41)$$
$$= \frac{b}{2\rho_0 c_0^3}\frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} \sim \frac{b}{2\rho_0 c_0^3}\frac{v}{\tau^2},$$

что позволяет оценить соотношение нелинейных и диссипативных эффектов следующим образом, используя уравнение (14):

$$\frac{\epsilon v^2}{2c_0^2\tau} \sim \frac{b}{2\rho_0 c_0^3}\frac{v}{\tau^2}. \quad (42)$$

Для длительности фронта ударной волны τ_f получаем оценку

$$\tau_f \sim \frac{b}{2\epsilon v \rho_0 c_0} \simeq \frac{\mu}{\epsilon v c_0}, \quad \mu = \frac{b}{\rho_0}, \quad (43)$$

где μ – кинематическая вязкость и l_f – толщина ударного фронта, которая согласно Лайтхиллу [9] равна

$$l_f = c_0\tau_f = \frac{\mu}{\epsilon v}. \quad (44)$$

Для того чтобы получить решение для профиля ударной волны, введем в уравнение (14) безразмерные переменные

$$V(x') = v/v_0, \quad \zeta = \tau/t_0, \quad \xi = t/t_0, \quad (45)$$

где t_0 и v_0 – новые масштабы времени и скорости.

Эти масштабы выбраны таким образом, чтобы безразмерный множитель $\epsilon v_0 \rho_0 c_0 t_0/b$ был равен единице. После однократного интегрирования окончательное выражение принимает вид

$$-\frac{\partial V^2}{\partial \zeta} = \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}\int_0^\infty \left(\frac{1}{\xi}\right)^n V(c_0\xi - \zeta)d\xi. \quad (46)$$

Рассмотрим сначала предельный случай без релаксации, когда

$$h(\tau) = \delta(\tau). \quad (47)$$

В этом случае интеграл принимает вид

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{\xi}\right)^n V(\xi - \zeta)d\xi = \quad (48)$$
$$= \int_0^\infty \delta(\xi)V(c_0\xi - \zeta)d\xi = V(\zeta),$$

и мы получаем уравнение

$$-\frac{\partial V^2}{\partial \zeta} = \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}V(\zeta), \quad (49)$$

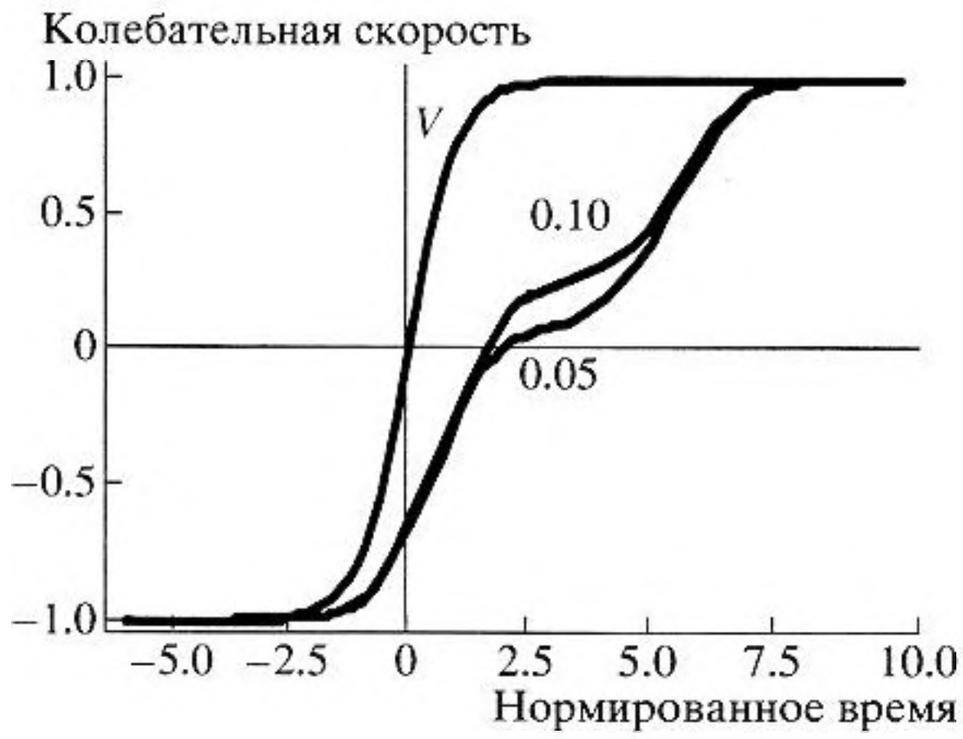

Рис. 2. Стационарные профили ударной волны. Кривая V соответствует воде, кривые, отмеченные как 0.1 и 0.05, соответствуют неконсолидированной среде с индексом памяти $n = 0.1$ и $n = 0.05$.

первый интеграл которого равен

$$V^2 = -\frac{\partial V}{\partial \zeta} + 1, \tag{50}$$

где постоянная интегрирования принята за единицу. Это уравнение имеет решение $V = \mathrm{th}\,\zeta$. Действительно

$$-\frac{\partial V}{\partial \zeta} = -\frac{\partial \mathrm{th}\,\zeta}{\partial \zeta} = -\frac{1}{\mathrm{ch}^2\zeta} = \mathrm{th}^2\zeta - 1. \tag{51}$$

Подставляя этот результат в предыдущее выражение, мы убеждаемся, что $\mathrm{th}\,\zeta$ действительно есть решение.

Таким образом, для среды без релаксации стационарный профиль слабой ударной волны определяется гиперболическим тангенсом. Для среды с релаксацией уравнение (46) решается численно в некотором диапазоне значений τ и индекса памяти n. Чем меньше n, тем дольше память материала. Для морских осадков предыдущие эксперименты дают широкий спектр значений для индекса памяти n в диапазоне 0.05–0.30 [4, 5].

Профили ударной волны в неконсолидированной среде с индексами памяти $n = 0.1$ и $n = 0.05$ получены при численном решении уравнения (46) и представлены на рис. 2. На этом же рисунке для сравнения представлен профиль ударной волны (кривая V) в воде, где диссипация определяется вязкостью и теплопроводностью. Видно, что эффекты релаксации приводят к изменению структуры профиля, а дисперсия вызывает его сдвиг.

Заметим, что безразмерный аргумент $\zeta = \tau/t_0$ представляет собой нормированное время релаксации τ, в результате чего размерная толщина ударного фронта оказалась пропорциональна времени релаксации материала. Структура профиля волны изменяется при изменении постоянной n.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Развита нелинейная теория распространения звука высокой интенсивности в неконсолидированных гранулированных материалах, основанная на релаксационной теории Букингема [2] для распространения звука в среде с учетом взаимодействия между гранулами. Получено нелинейное эволюционное уравнение и выведено модельное уравнение для случая плоской волны. Рассмотрена генерация гармоник при распространении плоской волны и обсуждаются особенности этого процесса в среде с релаксацией. В результате численного решения эволюционного уравнения получена структура стационарного профиля слабой ударной волны в неконсолидированных материалах.

Авторы благодарны профессору С.А. Рыбаку за плодотворное обсуждение и полезные замечания.

Настоящая работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 05-02-17500.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Naugolnykh K., Ostrovsky L.* Nonlinear Wave Processes in Acoustics // Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
2. *Buckingham M.J.* Theory of acoustic attenuation, dispersion, and pulse propagation in unconsolidated granular materials including marine sediments // J. Acoust. Soc. Am. 1997. V. 102(5). P. 2579–2596 .
3. *Buckingham M.J.* Wave propagation, stress relaxation, and grain-tograin shearing in saturated, unconsolidated marine sediments // J. Acoust. Soc. Am. 2000. V. 108(6). P. 2796–2815.
4. *Hamilton E.L.* Compressional wave attenuation in marine sediments // Geophysicas. 1972. V. 37. P. 620–646.
5. *Richardson M.D.* Spatial variability of surficial shallow water sediments, in "Ocean-Seismo Acoustics", edited by T. Akai and J.M. Berkson (Plenum, New York, 1986), P. 527–536.
6. *Kasheeva S., Sapozhnikov O.A., Khokhlova V.A., Averkov M.A., Crum L.A.* Nonlinear Distortion and Attenuation of Intense Acoustic Waves in Lossy media Obeying a Frequency Power Law // Acoustical Physics. 2000. V. 46(2). P. 170–177.
7. *Naugolnykh K.A., Egerev S.V., Esipov I.B., Matveev K.A.* Nonlinear propagation of laser-generated sound pulses in a granular medium // J. Acoust. Soc. Am. 1999. V. 106(6). P. 3135–3142.
8. *Naugolnykh K.A.* Absorption of finite-amplitude waves, In "High Intensity Ultrasonic Fields", edited by L. Rosenberg. (Plenum, New York, 1971).
9. *Lighthill M.J.* Viscosity effects in sound waves of finite amplitude, in Survweys in Mechanics, ed. G.K. Batchelor and R.M. Davies, (Cambridge University Press, Cambridge, 1956).

The Propagation of a Nonlinear Sound Wave in an Unconsolidated Granular Medium

K. A. Naugolnykh[1] and I. B. Esipov[2]

[1] *University of Colorado, Cires, Environmental Technology Laboratory (Zeltech), USA*
E-mail: Konstantin.Naugolnykh@noaa.gov
[2] *Andreev Acoustics Institute, Moscow, Russia*
E-mail: ibesipov@akin.ru

Abstract—The propagation of a high-intensity sound wave in an unconsolidated medium is considered. Dissipation effects are taken into account on the basis of Buckingham's theory of a relaxation mechanism of sound attenuation in a saturated sediment. The nonlinear evolution equation for the relaxing medium is obtained, and the solutions of this equation are analyzed. The second-harmonic generation in such a medium decays, as does the linear sound wave of the same frequency. The stationary weak shock profile has a specific form due to the relaxation effects.