

УДК 539.3

БЛОКИРОВАНИЕ БЕГУЩИХ ВОЛН И ЛОКАЛИЗАЦИЯ ЭНЕРГИИ УПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ ПРИ ДИФРАКЦИИ НА ТРЕЩИНЕ

© 2006 г. Е. В. Глушков, Н. В. Глушкова, М. В. Голуб

Кубанский государственный университет

350040 Краснодар, ул. Ставропольская 149

E-mail: evg@math.kubsu.ru

Поступила в редакцию 15.03.05 г.

На основе разработанных полуаналитических методов решения задач дифракции упругих волн на горизонтальной полосовой трещине исследуется прохождение и отражение рэлеевских волн в полуплоскости и нормальных мод в слое с целью определения параметров блокирования и исследования его механизма. Показано, что резонансное блокирование сопровождается локализацией энергии в окрестности трещины. Для трещины в полуплоскости выявлена возможность нерезонансного блокирования. Проводится анализ коэффициентов прохождения и отражения в зависимости от частоты, размеров и расположения трещины. Приводятся численные примеры структуры линий тока и распределения плотности энергии при резонансном и нерезонансном блокировании, а также коэффициенты интенсивности напряжений на краях трещины.

PACS: 43.20.Gp, 43.20.Mv, 46.40.Cd, 46.40.Ff

ВВЕДЕНИЕ

При дифракции бегущих волн на поверхностных и внутренних препятствиях возможен захват и локализация энергии. Это явление, сопровождающееся резонансным ростом амплитуды колебаний частиц в окрестности препятствия, известно под названиями ловушечных (trapped) мод [1, 2], резонанса неоднородных волн [3], собственных решений, соответствующих изолированным вещественным точкам спектра [4], вирусов вибропрочности [5] и др. Для практических приложений большое значение имеет анализ дифракции на дефектах в виде трещин. Такие задачи возникают при неразрушающем (волновом) контроле отслоений пленочных и нано-покрытий, дефектов сварных соединений и зон разрушения слоистых композитов. Интерес здесь представляют как разработка методов локализации и идентификации дефектов по характеристикам отраженных и прошедших сигналов, так и вопросы прочности и разрушения при резонансных колебаниях.

Характерной особенностью резонансной локализации энергии является резкое экранирование прохождения нормальных мод (каналовых и поверхностных рэлеевских волн) на определенных частотах. При этом считалось, что полное блокирование (обращение коэффициента прохождения κ^+ в нуль) указывает на выход спектральной точки ω_n на вещественную ось, то есть является признаком вещественной резонансной частоты. Однако проведенные недавно исследования механизма блокирования рэлеевской волны приповерхностной трещиной [6] показали,

что наряду с резонансным захватом энергии на частотах ω , близких к почти вещественным резонансным полюсам ω_n ($\omega = \text{Re } \omega_n$, $|\text{Im } \omega_n| \ll 1$), возможно полное блокирование ($\kappa^+ = 0$) за счет взаимного гашения исходной набегающей рэлеевской волны $\mathbf{u}_{0,R}$ и рэлеевской волны $\mathbf{u}_{2,R}$, возникающей при вторичном переотражении между трещиной и поверхностью. (Здесь и далее по возможности сохраняются обозначения [6].) При этом во втором случае нет близких к вещественной оси резонансных полюсов ω_n и не наблюдается признаков локализации волнового процесса, например, резкого роста амплитуды колебаний поверхности полуплоскости над трещиной.

Цель настоящей работы – продолжить исследование механизмов локализации и блокирования как в полуплоскости (рэлеевская волна), так и в волноводе конечной толщины (нормальные моды). Используемый ранее подход, основанный на сведении задачи дифракции к граничному интегральному уравнению [7], позволяет рассматривать трещину, произвольно ориентированную относительно поверхности и границ слоев. Однако ввиду малой изученности рассматриваемых эффектов и для сопоставимости с имеющимися результатами, в данной работе рассмотрение ограничивается горизонтальными трещинами, параллельными поверхности. При этом самостоятельный интерес представляет разработка полуаналитического метода решения интегральных уравнений для интерфейсных трещин (отслоений), расположенных в слоистом волноводе в зоне соединения разномодульных материалов.

В настоящей работе дается общая постановка задачи для слоистого волновода и для полуплоскости и, в продолжение [6], приводятся результаты анализа структуры энергетических потоков, формирующихся при двух вариантах блокирования рэлеевской волны горизонтальной трещиной в полуплоскости. Далее приводится краткое описание общей схемы решения задачи о дифракции упругих волн (нормальных мод) на интерфейсной трещине и результаты численного анализа, иллюстрирующие характерные особенности дифракции нормальных мод на горизонтальной трещине в упругом слое.

УПРУГИЙ ВОЛНОВОД С ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ТРЕЩИНОЙ

В плоской постановке рассматриваются установившиеся гармонические колебания $\mathbf{u}(\mathbf{x})\exp(-i\omega t)$ ($\mathbf{u} = (u_x, u_z)$) упругого изотропного двуслойного волновода, занимающего в декартовой системе координат $\mathbf{x} = (x, z)$ полосовую область $|x| \leq \infty$, $-H \leq z \leq 0$, разделенную горизонтальной границей $z = -h$ ($h < H$) на два слоя $S_1: -h \leq z \leq 0$ и $S_2: -H \leq z \leq -h$. Перемещения \mathbf{u} в каждом из слоев удовлетворяют уравнениям Ляме

$$(\lambda + \mu)\operatorname{div} \mathbf{u} + \mu \Delta \mathbf{u} + \rho \omega^2 \mathbf{u} = 0 \quad (2.1)$$

с различными в общем случае значениями упругих констант λ, μ и плотности ρ при $z > -h$ и $z < -h$. Трещина моделируется бесконечно тонким разрезом по отрезку $|x| \leq a, z = -h$, на берегах которого задано условие отсутствия напряжений $\boldsymbol{\tau} = (\tau_{xz}, \sigma_{zz})$:

$$\boldsymbol{\tau}|_{z=-h} = 0, \quad |x| < a, \quad (2.2)$$

а поле смещений терпит разрыв с неизвестным скачком

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}(\mathbf{x})|_{z=-h-0} - \mathbf{u}(\mathbf{x})|_{z=-h+0}. \quad (2.3)$$

На остальной части границы $z = -h$ напряжения и смещения непрерывны:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}|_{z=-h-0} &= \boldsymbol{\tau}|_{z=-h+0}, & |x| > a, \\ \mathbf{v} &= 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Ввиду линейности задачи гармонический множитель $\exp(-i\omega t)$, как обычно, здесь и далее опущен.

Для определенности рассмотрим свободный волновод, на внешних границах которого $z = 0$ и $z = -H$ заданы условия отсутствия напряжений везде за исключением ограниченной области ширины $2b$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}|_{z=0} &= \begin{cases} \mathbf{q}_0(x), & |x - x_0| \leq b \\ 0, & |x - x_0| > b \end{cases} \\ \boldsymbol{\tau}|_{z=-H} &= 0, \end{aligned} \quad (2.5)$$

расположенной левее трещины ($x_0 + b < -a$). Функция $\mathbf{q}_0(x)$ (заданная поверхностная нагрузка) моделирует действие источника колебаний.

Постановку задачи замыкают условия излучения на бесконечности, вытекающие из принципа предельного поглощения [8].

При равенстве упругих модулей и плотности в верхнем и нижнем слое рассматриваемая задача вырождается в задачу для горизонтальной трещины в однородном слое. При этом, если $H = \infty$, то приходим к случаю трещины в полуплоскости, рассмотренном в [6].

Поле смещений \mathbf{u} в волноводе с дефектом складывается из возбуждаемого заданным источником волнового поля \mathbf{u}_0 и поля дифрагированных волн \mathbf{u}_c : $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_c$. С помощью преобразования Фурье \mathcal{F} по горизонтальной координате x эти поля можно выразить в виде контурных интегралов через заданную нагрузку \mathbf{q}_0 и неизвестный скачок смещений \mathbf{v} соответственно:

$$\mathbf{u}_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} K(\alpha, z) \mathbf{Q}_0(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha \equiv \mathcal{F}^{-1}[\mathbf{U}_0], \quad (2.6)$$

$$\mathbf{u}_c = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} N(\alpha, z) \mathbf{V}(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha \equiv \mathcal{F}^{-1}[\mathbf{U}_c].$$

Здесь $\mathbf{U}_0 = K\mathbf{Q}_0$, $\mathbf{U}_c = N\mathbf{V}$ – Фурье-символы вектор-функций $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_c$, то есть

$$\mathbf{U}_0(\alpha, z) = \mathcal{F}[\mathbf{u}_0] \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{u}_0(x, z) e^{i\alpha x} dx$$

и $\mathbf{U}_c = \mathcal{F}[\mathbf{u}_c]$. Аналогично $\mathbf{Q}_0 = \mathcal{F}[\mathbf{q}_0]$, $\mathbf{V} = \mathcal{F}[\mathbf{v}]$ – символы \mathbf{q}_0 и \mathbf{v} , а K, N символы матриц Грина (2×2) для поля поверхностной нагрузки и для поля скачка \mathbf{v} в рассматриваемом волноводе. Контур Γ идет вдоль вещественной оси $\operatorname{Im} \alpha = 0$, отклоняясь от нее в комплексную плоскость α только при обходе вещественных полюсов элементов матриц K и N . Направление обхода диктуется принципом предельного поглощения [8]. Для определенности считаем, что из счетного набора полюсов $\pm \zeta_k$, $k = 1, 2, \dots$ полюса ζ_k расположены выше контура Γ , а $-\zeta_k$ – ниже, причем первые N_1 – вещественные, а остальные – комплексные, упорядоченные по возрастанию $\operatorname{Im} \zeta_k$. Подробное описание используемой техники вывода интегральных представлений см., например, в [9, 10].

При $H < \infty$ компоненты K и N – мероморфные функции (без точек ветвления), поэтому вне области приложения нагрузки (для \mathbf{u}_0) и вне трещи-

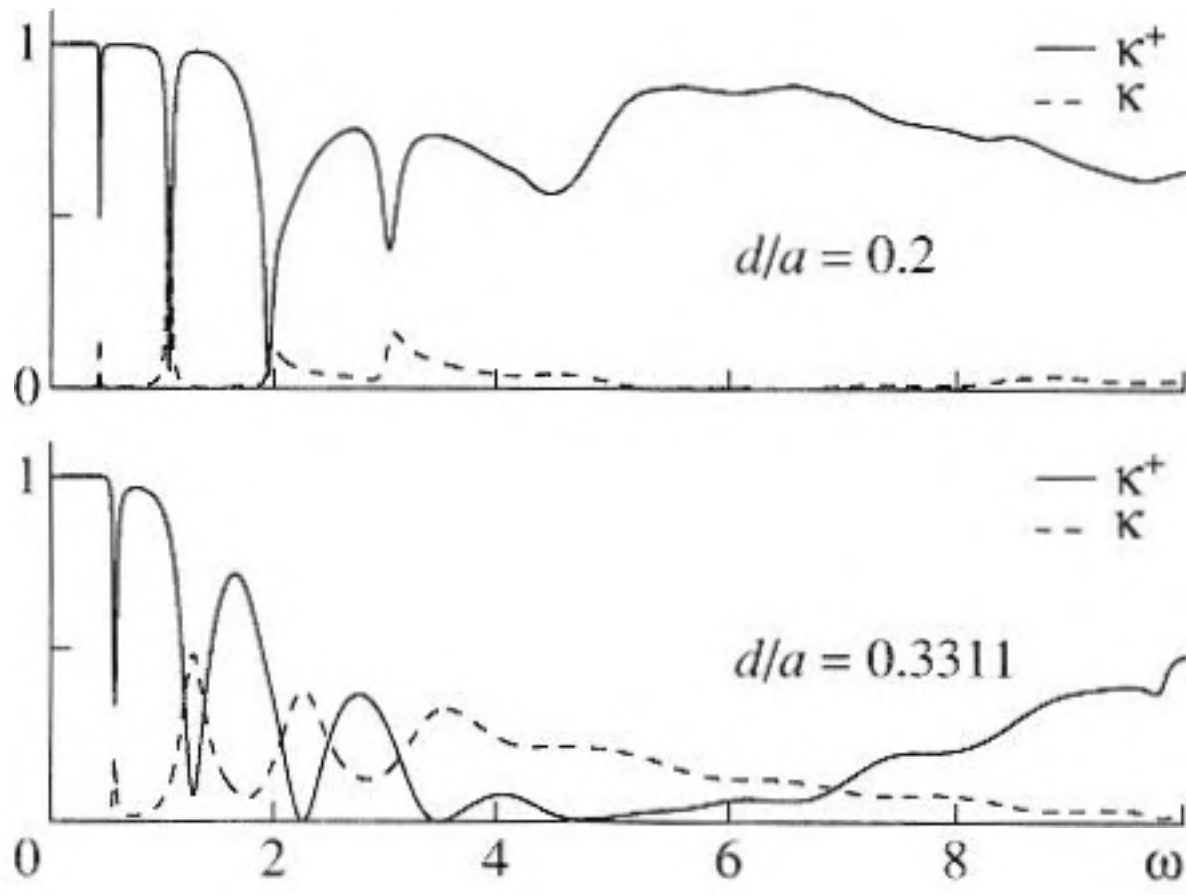


Рис. 1. Частотные зависимости коэффициентов прохождения и отражения при различном заглублении горизонтальной трещины в полуплоскости.

ны (для \mathbf{u}_c) интегралы (2.6) можно заменить рядами по вычетам:

$$\mathbf{u}_0(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{a}_k^{\pm}(z) \exp(\pm i \zeta_k x), \quad |x - x_0| > b, \quad (2.7)$$

$$\mathbf{u}_c(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{a}_{c,k}^{\pm}(z) \exp(\pm i \zeta_k x), \quad |x| > a, \quad (2.8)$$

$\mathbf{a}_k^{\pm} = \mp i \operatorname{res} K(\alpha, z)|_{\alpha = \mp \zeta_k} \mathbf{Q}_0(\mp \zeta_k)$, $\mathbf{a}_{c,k}^{\pm} = \mp i \operatorname{res} N(\alpha, z)|_{\alpha = \mp \zeta_k} \mathbf{V}(\mp \zeta_k)$; в первом случае верхний знак берется для $x > x_0 + b$, нижний – для $x < x_0 - b$, во втором соответственно для $x > a$ и $x < -a$.

Первые N_1 слагаемых, соответствующих вещественным полюсам, описывают бегущие волны (нормальные моды), уходящие на бесконечность без затухания вправо и влево от источника (\mathbf{q}_0 или \mathbf{v}). Их профили (собственные формы) подобны: $\mathbf{a}_{c,k}^{\pm}(z) = r_k^{\pm} \mathbf{a}_k^{\pm}(z)$ для $z \in [-H, 0]$, $r_k^{\pm} = \text{const}$. Комплексным полюсам соответствуют неоднородные волны с экспоненциальным затуханием порядка $O(\exp(-|\operatorname{Im} \zeta_k| |x|))$, $|x| \rightarrow \infty$.

В рассмотренном в [6] случае однородного полупространства ($H = \infty$) единственный вещественный полюс $\zeta = \zeta_1$ дает в (2.7) набегающую на трещину волну Релея $\mathbf{u}_{0,R}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}_0^+(z) \exp(i \zeta_1 x)$ ($\mathbf{a}_0^{\pm} \equiv \mathbf{a}_1^{\pm}$), а в (2.8) – прошедшую и отраженную поверхностные волны $\mathbf{u}_{2,R}^{\pm}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}_2^{\pm}(z) \exp(\pm i \zeta_1 x)$ ($\mathbf{a}_2^{\pm} \equiv \mathbf{a}_{c,1}^{\pm}$). Как для однородного, так и для многослойного полупространства компоненты матриц K и N при $H = \infty$ имеют точки ветвления, поэтому к сумме вычетов (2.7)–(2.8) добавляются интегралы по разрезам, описывающие объемные волны $\mathbf{u}_{0,v}$,

$\mathbf{u}_{c,v}$. Их асимптотика в дальней зоне строится по методу стационарной фазы [9].

Коэффициенты прохождения κ^+ и отражения κ^- поверхностных волн вводятся соотношениями $\kappa^{\pm} = E^{\pm}/E_0$, в которых E_0 – осредненная за период колебаний $T = 2\pi/\omega$ энергия волны, набегающей на трещину (например, релеевской $\mathbf{u}_{0,R}^+$), а $E^{\pm} = \int_{-H}^0 e_x(x, z) dz$, $x = \pm \text{const}$ – энергия прошедших и отраженных поверхностных волн (или нормальных мод) в дальней зоне $|x| \gg 1$, e_x – горизонтальная составляющая вектора плотности энергии (вектора Умова–Пойнтинга) $\mathbf{e} = (e_x, e_z)$ [9]. Отметим, что используемые для характеристик энергии гармонических колебаний осредненные за период величины являются осредненной мощностью, однако нередко эти величины называют энергией (плотность энергии, линии тока энергии и т.д.).

Для полупространства вводится также коэффициент трансформации энергии поверхностных волн в объемные: $\kappa_v = E_v/E_0$, где E_v – энергия объемных волн, определяемая интегрированием плотности потока энергии через нижнюю полуокружность $x = R \cos \varphi$, $z = R \sin \varphi$, $-\pi \leq \varphi \leq 0$ при $R \rightarrow \infty$.

При анализе дифракции не отдельных мод, а поля источника \mathbf{u}_0 в целом, вводятся также коэффициенты распределения энергии $\mu^{\pm} = E^{\pm}/E_0$ и $\mu_v = E_v/E_0$, в которых уже $E_0 = -\frac{\omega}{2} \operatorname{Im} \int_{\Gamma} K(\alpha, 0) \mathbf{Q}_0^2(\alpha) d\alpha$ – энергия, поступающая в волновод от поверхностной нагрузки \mathbf{q}_0 .

Как для энергии отдельных мод, так и для энергии источника выполняется условие баланса $E_0 = E^+ + E^- + E_v$ ($E_v \equiv 0$ при $H < \infty$), которое эквивалентно соотношениям

$$\kappa^+ + \kappa^- + \kappa_v = 1 \quad \text{и} \quad \mu^+ + \mu^- + \mu_v = 1 \quad (2.9)$$

($\kappa_v, \mu_v \equiv 0$ при $H < \infty$).

ГОРИЗОНТАЛЬНАЯ ТРЕЩИНА В ОДНОРОДНОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

На рис. 1 приводится взятый из [6] пример зависимости коэффициентов прохождения и отражения релеевской волны κ^{\pm} от безразмерной круговой частоты $\omega = 2\pi f a / v_s$ для двух значений $d/a = 0.2$ и $d/a = 0.3311$ (f – размерная частота, a – полуширина трещины, v_s – скорость S -волн, $d = h$ – глубина расположения трещины; коэффициент Пуассона $\nu = 1/3$). Узкие глубокие провалы на графиках $\kappa^+(\omega)$, указывают на резкое экранирование релеевской волны на частотах, близких к почти вещественным резонансным полюсам ω_n , в

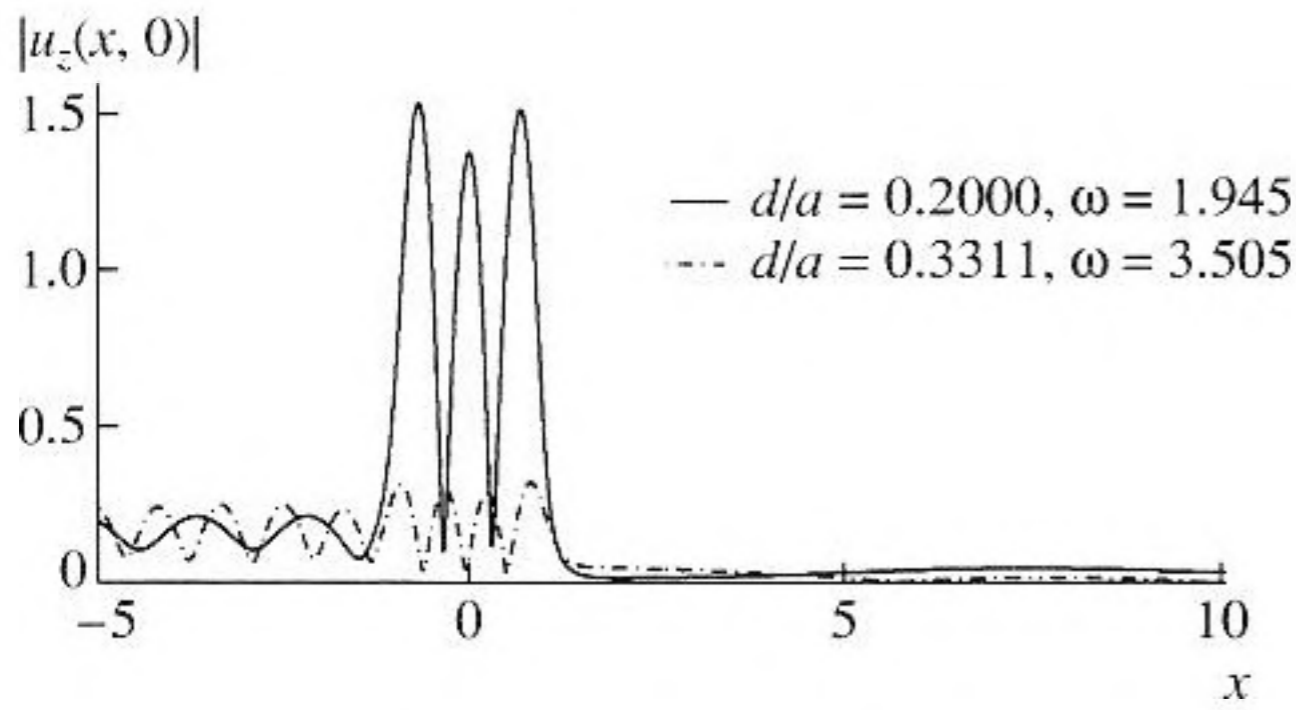


Рис. 2. Амплитуда вертикальных перемещений поверхности при резонансном блокировании и противофазном гашении рэлеевской волны.

то время как широкие и глубокие понижения на второй кривой не соотносятся с точками спектра ω_n .

В первом случае имеют место захват и резонансная локализация энергии рэлеевской волны в узкой зоне между трещиной и поверхностью. А во втором, как показано в [6], экранирование происходит за счет взаимного гашения справа от трещины набегающей волны $\mathbf{u}_{0,R}^+$ и переотра-

женной $\mathbf{u}_{2,R}^+$. При этом в первом случае экранирование не бывает полным ($\kappa^+ \neq 0$), так как точки спектра ω_n , приближаясь к вещественной оси, не выходят на нее. А во втором было найдено несколько пар значений $(\omega, d/a)$, при которых происходит полное противофазное гашение рэлеевской волны ($\kappa^+ \equiv 0$). Рис. 2–4 иллюстрируют характерные особенности волновых и энергетических процессов, происходящих в первом и втором случаях.

Для трещины единичной полуширины a на рис. 2 приведены графики амплитуды вертикальных смещений поверхности полуплоскости $|u_z(x, 0)|$, показывающие их в зоне набегающей волны $x < -1$ (левее трещины), над трещиной $-1 < x < 1$ и в экранируемой зоне $x > 1$ (правее трещины) для резонансного случая ($d/a = 0.2, \omega = 1.945$ – сплошная линия) и для случая противофазного гашения ($d/a = 0.3311, \omega = 3.505$ – пунктир). В обоих случаях правее трещины амплитуда поверхностных смещений резко уменьшается. Главное отличие – резкий рост смещений поверхности над трещиной в резонансном случае, указывающий на локализацию волнового процесса в этой зоне.

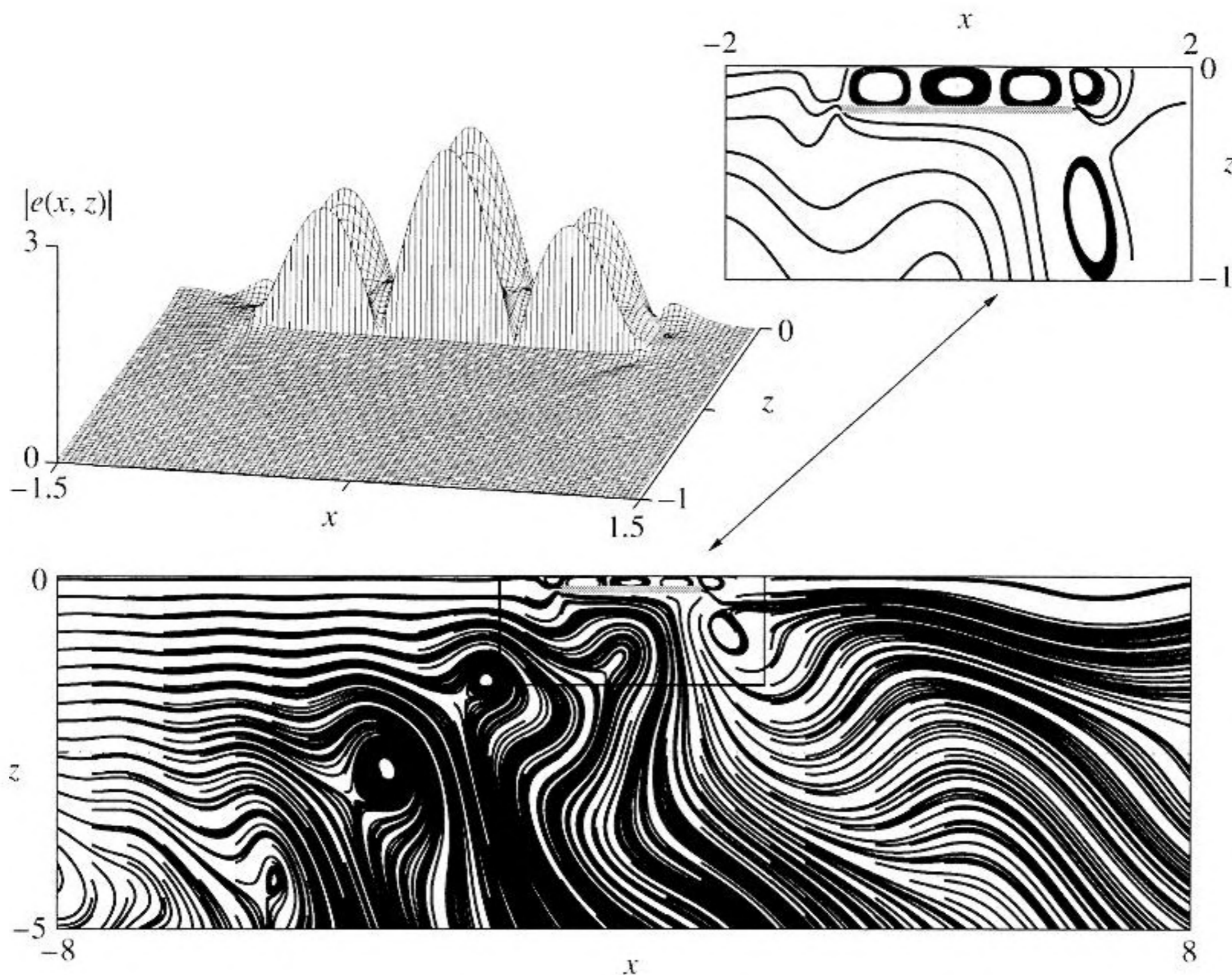


Рис. 3. Линии тока энергии и пространственное распределение модуля плотности энергии при резонансном блокировании рэлеевской волны ($d/a = 0.2, \omega = 1.945$).

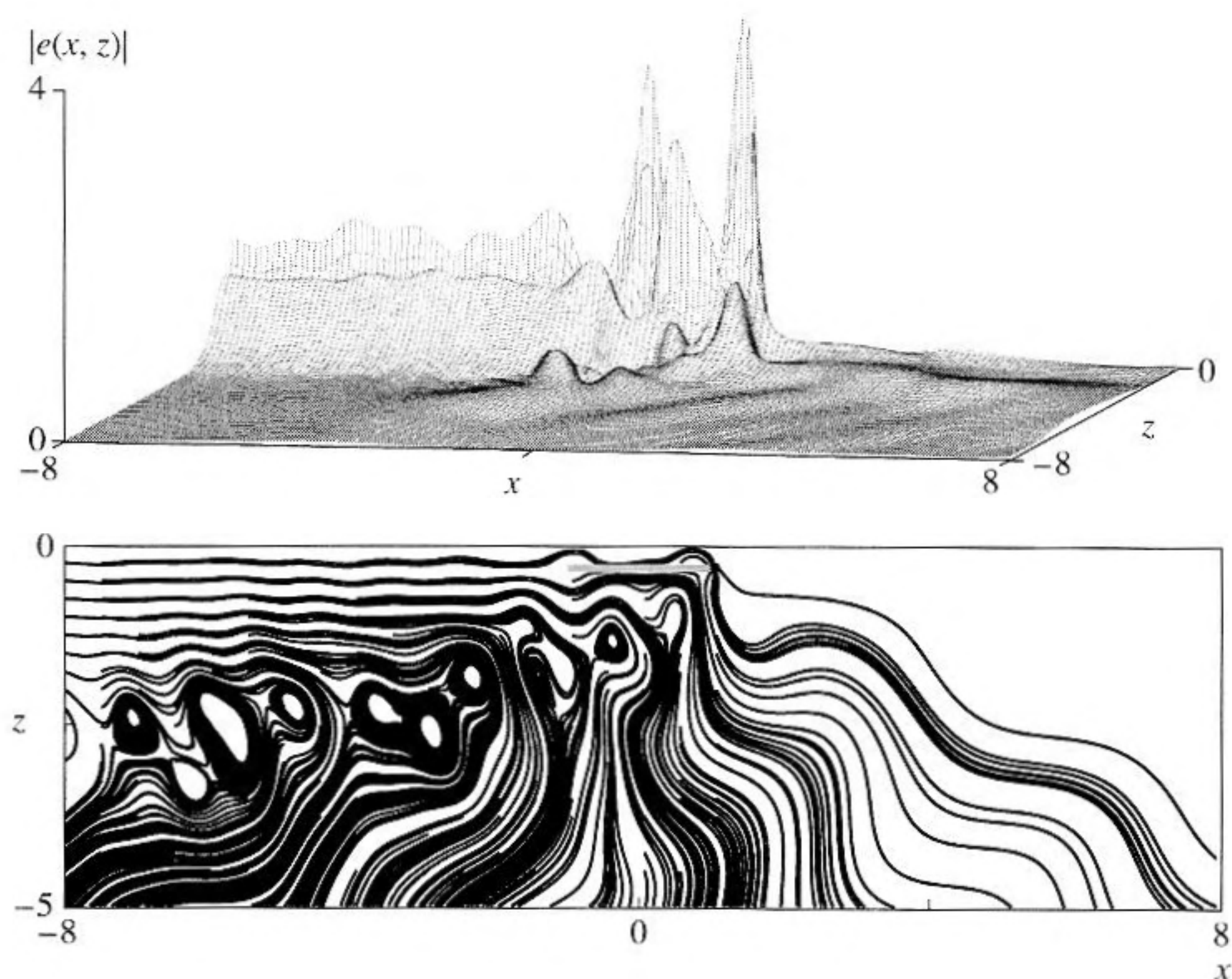


Рис. 4. То же, что и на рис. 3, но при нерезонансном гашении рэлеевской волны ($d/a = 0.3311$, $\omega = 3.505$).

Более наглядно характер локализации или ее отсутствие во втором случае видны на рис. 3–4, показывающих структуру линий тока энергии и пространственное распределение плотности потока энергии $|e(x)|$. Линии тока строятся по заданному векторному полю как линии, касательные в каждой точке $x = (x, z)$ к вектору плотности энергии $e(x)$. Отметим, что линии тока показывают только траектории осредненного за период колебаний переноса энергии при гармонических колебаниях. Их густота или разреженность не связаны с мощностью потока, которая характеризуется только модулем вектора плотности энергии $e(x)$. Распределение $|e|$ показано отдельно на каждом из рис. 3–4 в виде поверхности над плоскостью (x, z) . Общим в структуре линий тока энергии в обоих случаях блокирования является их разворот вниз, указывающий на трансформацию значительной части энергии рэлеевской волны в объемные волны: при резонансном блокировании $\kappa_v > 0.4$, а при противофазном гашении $\kappa_v > 0.6$.

Качественным отличием резонансного случая является формирование между трещиной и поверхностью энергетических вихрей, в которых значительное количество энергии циркулирует по замкнутым траекториям (см. врезку на рис. 3). Проявлением такой локализации энергии и является резкий рост смещений поверхности над трещиной с тремя пиками, соответствующими трем

главным вихрям (рис. 2). Плотность энергии $|e|$ в зоне набегания исходной волны (левее трещины) в обоих случаях примерно одинакова, но между трещиной и поверхностью она в резонансном случае на порядок больше. Поэтому в масштабе рис. 3 уровень $|e|$ вне зоны локализации практически не отличим от нулевого. Следует отметить, что данный резкий рост мощности энергетических вихрей не нарушает энергетического баланса, так как вклад вихревых зон в перенос энергии на бесконечность равен нулю.

ДИФРАКЦИЯ НА ТРЕЩИНЕ В ВОЛНОВОДЕ КОНЕЧНОЙ ТОЛЩИНЫ

В случае трещины в упругом слое волновые процессы существенно усложняются из-за перерождения между границами слоев. Для их анализа на основе представлений (2.6)–(2.8) в первую очередь необходимо получить вид матриц K и N . С этой целью удобно воспользоваться представлением

$$U_h(\alpha, z) = [K_h(\alpha, z)Q^+(\alpha) + M_h(\alpha, z)Q^-(\alpha)]/\Delta_h(\alpha), \quad (4.1) \\ -h \leq z \leq 0.$$

Здесь U_h – Фурье-символ волнового поля, возбуждаемого в однородном слое $-h \leq z \leq 0$ нагрузками q^+ , q^- , приложенными соответственно к верхней ($z = 0$) и нижней ($z = -h$) граням слоя; $Q^\pm = \mathcal{F}[q^\pm]$; K_h/Δ_h , M_h/Δ_h – символы матриц Грина для этих нагрузок. Их компоненты могут быть выписаны в явном виде:

$$\begin{aligned}
 K_{h,11} &= -\sigma_2[\alpha^2\gamma^2(\sigma_{12}s_2 + \gamma^2s_1) - \alpha^2\gamma^2cs_{21} + \\
 &\quad + \alpha^4\sigma_{12}sc_{21} - \gamma^2\alpha^2\sigma_{12}cs_{12} + \gamma^6sc_{12}], \\
 K_{h,12} &= -i\alpha[-\sigma_{12}\gamma^2(\alpha^2c_1 + \gamma^2c_2) - \alpha^2\sigma_{12}ss_{12} + \\
 &\quad + \sigma_{12}\gamma^4cc_{12} + \gamma^2\alpha^2\sigma_{12}cc_{21} - \gamma^6ss_{21}], \\
 K_{h,21} &= -i\alpha[\sigma_{12}\gamma^2(\alpha^2c_2 + \gamma^2c_1) - \gamma^4\sigma_{12}cc_{21} + \\
 &\quad + \sigma_{12}^2\alpha^2ss_{21} - \gamma^2\alpha^2\sigma_{12}cc_{12} + \gamma^6ss_{12}], \\
 K_{h,22} &= \sigma_1[-\alpha^2\gamma^2(\sigma_{12}s_1 + \gamma^2s_2) + \alpha^2\gamma^4cs_{12} - \\
 &\quad - \alpha^4\sigma_{12}sc_{12} + \gamma^2\alpha^2\sigma_{12}cs_{21} + \gamma^6sc_{21}], \\
 \Delta_h &= 2\mu[-2\alpha^2\sigma_{12}\gamma^4 - (\gamma^8 + \alpha^4\sigma_{12})\text{sh}(\sigma_1h)\text{sh}(\sigma_2h) + \\
 &\quad + 2\alpha^2\sigma_{12}\gamma^4\text{ch}(\sigma_1h)\text{ch}(\sigma_2h)], \\
 s_n &= \text{sh}(\sigma_n z), \quad c_n = \text{ch}(\sigma_n z), \quad n = 1, 2, \\
 cs_{mn} &= \text{ch}(\sigma_m h)\text{sh}(\sigma_n(h+z)), \quad m, n = 1, 2,
 \end{aligned}$$

$\sigma_n = \sqrt{\alpha^2 - \kappa_n^2}$, $\kappa_n = \omega/v_n$, $n = 1, 2$, $v_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$, $v_2 = \sqrt{\mu/\rho}$ – скорость P и S волн в материале слоя; cc_{mn} , ss_{mn} , sc_{mn} имеют вид, аналогичный cs_{mn} , в котором c соответствует ch , s – sh .

$$M_{h,ij}(\alpha, z) = K_{h,ij}(\alpha, -z-h)(-1)^{i+j-1}, \quad i, j = 1, 2.$$

Пусть в рассматриваемом двуслойном пакете q – неизвестные напряжения на границе раздела слоев $z = -h$. Тогда Фурье-символ U волнового поля u можно выписать в виде (4.1) с $Q^+ = Q_0$, $Q^- = Q$ для первого (верхнего) слоя S_1 : $-h \leq z \leq 0$ и с $Q^+ = Q$, $Q^- = 0$ для второго (нижнего) слоя S_2 : $-H \leq z \leq -h$:

$$\begin{aligned}
 U(\alpha, z) &= \\
 &= \begin{cases} K_1(\alpha, z)Q_0(\alpha) + M_1(\alpha, z)Q(\alpha), & z \in S_1, \\ K_2(\alpha, z)Q(\alpha), & z \in S_2. \end{cases} \quad (4.2)
 \end{aligned}$$

Здесь $K_1 = K_h/\Delta_h$, $M_1 = M_h/\Delta_h$, а $K_2(\alpha, z) = K_{H-h}(\alpha, z+h)/\Delta_{H-h}(\alpha)$.

Для символа скачка V из (4.2) следует представление

$$V(\alpha) = [K_2(\alpha, -h) - M_1(\alpha, -h)]Q(\alpha) - K_1(\alpha, -h)Q_0,$$

из которого получим

$$Q(\alpha) = L(\alpha)V(\alpha) + L(\alpha)K_1(\alpha, -h)Q_0(\alpha). \quad (4.3)$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 L(\alpha) &= [K_2(\alpha, -h) - M_1(\alpha, -h)]^{-1} = \\
 &= \hat{L}(\alpha)\Delta_h\Delta_{H-h}/\Delta_L, \quad (4.4)
 \end{aligned}$$

$\Delta_L = \det[\Delta_h K_{H-h}(\alpha, 0) - \Delta_{H-h} M_h(\alpha, -h)]$, компоненты матрицы \hat{L} не имеют полюсов. Таким образом, в представлении (2.6)

$$\begin{aligned}
 K(\alpha, z) &= \\
 &= \begin{cases} K_1(\alpha, z) + M_1(\alpha, z)L(\alpha)K_1(\alpha, -h), & z \in S_1, \\ K_2(\alpha, z)L(\alpha)K_1(\alpha, -h), & z \in S_2, \end{cases} \quad (4.5)
 \end{aligned}$$

$$N(\alpha, z) = \begin{cases} M_1(\alpha, z)L(\alpha), & z \in S_1, \\ K_2(\alpha, z)L(\alpha), & z \in S_2. \end{cases}$$

Отметим, что особенности, вносимые в K и N знаменателями Δ_h , Δ_{H-h} матриц K_1 , M_1 и K_2 , являются устранимыми, так что единственным набором их полюсов остаются нули Δ_L , то есть в рядах (2.7)–(2.8) вычеты берутся в полюсах $\pm\zeta_k$: $\Delta_L(\pm\zeta_k) = 0$, $k = 1, 2, \dots$

Замечание 1. В случае трещины в полуплоскости ($H = \infty$) в качестве K_2 в (4.2) берется матрица Грина нижней полуплоскости, а при равенстве упругих свойств в S_1 и S_2 характеристическое уравнение $\Delta_L = 0$ сводится к рэлеевскому, имеющему единственный вещественный полюс $\zeta = \zeta_1$.

Замечание 2. Для интерфейсной трещины в многослойном волноводе K_1 , M_1 – матрицы Грина пакета слоев выше, а K_2 – ниже трещины. Устойчивые и быстрые алгоритмы их построения, а также методы поиска вещественных и комплексных нулей и полюсов их компонент к настоящему времени хорошо отработаны, поэтому описываемый подход применим для анализа волновых процессов и в многослойных структурах с горизонтальной трещиной.

В то время как при заданной нагрузке q_0 поле u_0 полностью определено, представления (2.6), (2.8) дают u_c через неизвестный скачок v . Для определения v используется интегральное уравнение Винера–Хопфа

$$\mathcal{L}v \equiv \int_{-a}^a l(x-\xi)v(\xi)d\xi = f(x), \quad |x| < a \quad (4.6)$$

с гиперсингулярным матричным ядром $l(x) = \mathcal{F}^{-1}[L]$, которое выводится из условия отсутствия напряжений на берегах трещины (2.2). Для этого достаточно применить обратное преобразование Фурье к выражению (4.3) для символа интерфейсных напряжений \mathbf{Q} и приравнять его нулю при $|x| < a$. При этом $\mathbf{f}(x) = -\mathcal{F}^{-1}[L(\alpha)K_1(\alpha, -h)\mathbf{Q}_0(\alpha)]$.

Решение уравнения (4.6) может быть получено путем разложения $\mathbf{v}(x)$ по сплайнам или ортогональным полиномам. Неизвестные коэффициенты разложения определяются из алгебраической системы, к которой интегральное уравнение сводится по схеме Галеркина. Такой подход использовался в случае полуплоскости. Для анализа отраженных и прошедших волн u_c^\mp в слое более удобным является сведение к бесконечной алгебраической системе относительно неизвестных коэффициентов разложения по нормальным модам. С этой целью рассмотрим функциональное уравнение Винера–Хопфа

$$L(\alpha)\mathbf{V}(\alpha) = \mathbf{F}(\alpha) + \mathbf{\Phi}(\alpha), \quad (4.7)$$

которое получается после преобразования Фурье уравнения (4.6), продолженного на всю ось x неизвестной вектор-функцией $\mathbf{\varphi}(x) = \mathcal{L}\mathbf{v}$, $|x| > a$; $\mathbf{\Phi}(\alpha) = \mathcal{F}[\mathbf{\varphi}]$, $\mathbf{F}(\alpha) = \mathcal{F}[\mathbf{f}]$.

Ввиду мероморфности элементов матрицы $L(\alpha)$ справедливо разложение в ряд по вычетам

$$\mathbf{\varphi}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{t}_k^\pm \exp(\pm i\zeta_k(x \mp a)), \quad |x| > a, \quad (4.8)$$

$$\mathbf{t}_k^\pm = \mp i \operatorname{res} L(\alpha)|_{\alpha = \mp \zeta_k} \mathbf{V}(\mp \zeta_k) \exp(i\zeta_k a)$$

(как и в (2.8), верхний знак – для $x > a$, нижний – для $x < -a$). Соответственно

$$\mathbf{\Phi}(\alpha) = i \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\exp(i\alpha a)}{\alpha + \zeta_k} \mathbf{t}_k^+ - \frac{\exp(-i\alpha a)}{\alpha - \zeta_k} \mathbf{t}_k^- \right]. \quad (4.9)$$

Из (4.7) следует

$$\mathbf{V} = L^{-1}(\alpha)(\mathbf{F} + \mathbf{\Phi}) = R(\mathbf{F} + \mathbf{\Phi})/(\Delta_h \Delta_{H-h}), \quad (4.10)$$

где в соответствии с (4.4) $R = [K_2(\alpha, -h) - M_1(\alpha, -h)]\Delta_h \Delta_{H-h}$ – матрица, не имеющая полюсов. Вектор-функция $\mathbf{V}(\alpha)$ является целой (как преобразование Фурье от функции \mathbf{v} , заданной на ограниченном отрезке), поэтому полюса, вносимые в представление (4.10) полюсами $\mathbf{\Phi}$ и нулями знаменателя $\pm \zeta_l$; $\Delta_h(\pm \zeta_l)\Delta_{H-h}(\pm \zeta_l) = 0$ должны быть устранены. Пусть z_l упорядочены как ζ_k – сначала вещественные выше контура Γ , затем комплекс-

ные по возрастанию $\operatorname{Im} z_l$. Устраняя вносимые в (4.10) полюса, приходим к соотношениям

$$R(\pm \zeta_k) \operatorname{res} \mathbf{\Phi}(\alpha)|_{\alpha = \pm \zeta_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.11)$$

$$R(\pm z_l)(\mathbf{F}(\pm z_l) + \mathbf{\Phi}(\pm z_l)) = 0, \quad l = 1, 2, \dots \quad (4.12)$$

которые и приводят к требуемой бесконечной алгебраической системе относительно \mathbf{t}_k^\pm при подстановке в них $\mathbf{\Phi}$ в виде (4.9). При этом $\det R = 0$ как в z_l , так и в ζ_k , то есть строки в (4.11) и (4.12) попарно линейно зависимы. В первом случае это позволяет установить связь между компонентами $\mathbf{t}_k^\pm = (t_{k,1}^\pm, t_{k,2}^\pm)$, сократив число неизвестных вдвое:

$$t_{k,1}^\pm = -\frac{R_{12}(\pm \zeta_k)}{R_{11}(\pm \zeta_k)} t_{k,2}^\pm = \beta_k^\pm t_{k,2}^\pm. \quad (4.13)$$

В условиях (4.12) для каждого l также достаточно оставить только по одному уравнению. В результате относительно неизвестных $t_k^\pm = t_{k,2}^\pm$ приходим к системе

$$\sum_{k=1}^{\infty} [a_{lk}^+ t_k^+ + a_{lk}^- t_k^-] = f_l, \quad l = 1, 2, \dots, \quad (4.14)$$

$$a_{lk}^\pm = (R_{11}(z_l)\beta_k^\pm + R_{12}(z_l))e^{\pm iz_l a} / (\pm z_l + \zeta_k),$$

$$f_l = i(R_{11}(z_l)F_1(z_l) + R_{12}(z_l)F_2(z_l)).$$

Данная схема сведения интегральных уравнений к бесконечным алгебраическим системам была предложена в [11] при решении осесимметричной контактной задачи для кругового штампа на упругом слое. В плоском случае она использовалась при анализе дифракции нормальных мод на поверхностной полосе [12], но только для скалярного интегрального уравнения.

Как и ранее, регуляризация системы (4.14) проводится путем замены неизвестных t_k^\pm их асимптотикой по $k \rightarrow \infty$, начиная с некоторого номера M . Тем самым система (4.14) сводится к асимптотически эквивалентной конечной системе размерности $2(M+n)$ (n – число неизвестных констант, удерживаемых в асимптотиках t_k^+ и t_k^-). Ее решение численно устойчиво в отличие от систем, получаемых из (4.14) методом простой редукции.

Достоверность результатов, получаемых как с помощью данного метода, так и методом Галеркина, контролировалась путем численной проверки граничных условий на трещине (2.2)–(2.3), энергетического баланса (2.9) и сопоставлением с результатами, приведенными в работах [13] (полуплоскость, разложение по ортогональным по-

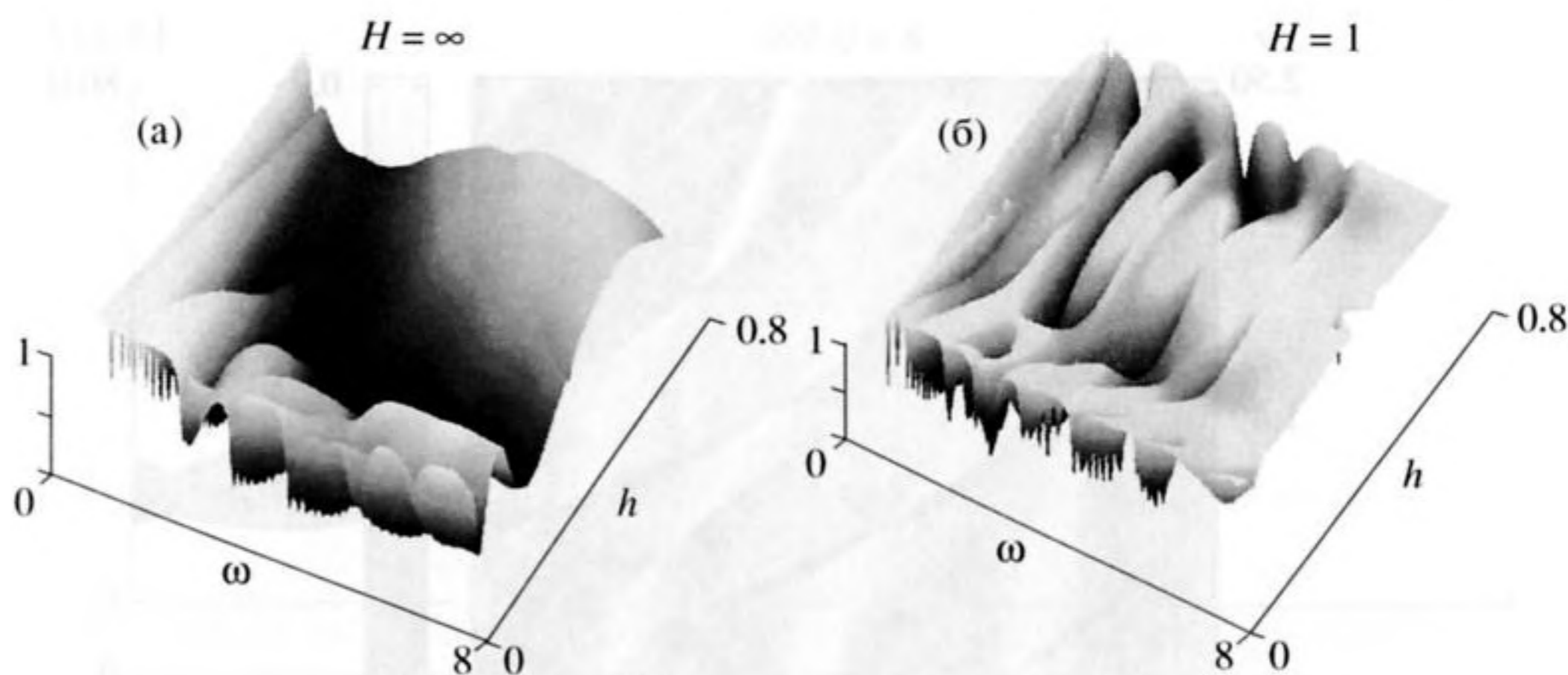


Рис. 5. Зависимость коэффициента прохождения $\kappa^+(\omega, h)$ а) – для рэлеевской волны в полуплоскости, б) – для первой антисимметричной нормальной моды в слое.

линомам) и [14] (слой, метод полосовых элементов (вариант МКЭ)).

Поведение $t_k^\pm \sim t_0^\pm(k)/k^{1+\gamma}$, $t_0^\pm \sim O(1)$ при $k \rightarrow \infty$ определяется показателем γ особенности интерфейсных напряжений \mathbf{q} в окрестности кромок трещины: $\mathbf{q} \sim \mathbf{k}^\pm(a \mp x)^{-\gamma}$, $x \rightarrow \pm a \pm 0$. Значение γ зависит от соотношения упругих свойств слоев S_1 и S_2 . При их равенстве $\gamma = 1/2$, а компоненты векторов $\mathbf{k}^\pm = (k_2^\pm, k_1^\pm)$ – классические коэффициенты интенсивности напряжений у кончика трещины при ее нормальном раскрытии (k_1^\pm) или касательном сдвиге берегов (k_2^\pm); знаки \pm для правого и левого краев трещины $x = \pm a$ соответственно. В силу (4.8) коэффициенты t_0^\pm в асимптотике t_k^\pm выражаются через компоненты векторов \mathbf{v}_0 , определяющих поведение скачка $\mathbf{v} \sim \mathbf{v}_0^\pm(a \mp x)^{1-\gamma}$, $x \rightarrow \pm a \mp 0$, которые, в свою очередь, пропорциональны k_n^\pm , $n = 1, 2$. Таким образом, указанный способ регуляризации эквивалентен косвенному, но строгому учету сингулярности поля напряжений. Поэтому метод эффективен не только при расчете коэффициентов прохождения и отражения κ^\pm , но и коэффициентов интенсивности напряжений k_n^\pm на краях трещины, то есть для оценки динамической прочности и условий разрушения при резонансной локализации волновой энергии.

В случае полуплоскости k_n^\pm выражаются через коэффициенты разложения \mathbf{v} по ортогональным полиномам. Тестовые сопоставления показали совпадение полученных зависимостей $k_n^\pm(\omega)$ с приведенными в [13].

РЕЗОНАНСНОЕ БЛОКИРОВАНИЕ НОРМАЛЬНЫХ МОД В УПРУГОМ СЛОЕ

Разработанный метод позволяет проводить быстрый параметрический анализ волновых процессов в слое с горизонтальной трещиной, в частности, организовать поиск параметров блокирования сигналов и резонансной локализации энергии. Однако в отличие от полупространства, для которого, построив поверхность $\kappa^+(\omega, d/a)$ (см. [6] и рис. 5а), удастся получить практически исчерпывающую информацию о закономерностях прохождения рэлеевской волны в образце с приповерхностной полосовой трещиной, для слоя, даже однородного, трудно дать наглядное описание всех возможных ситуаций. Причина в увеличении числа независимых параметров: $\kappa^\pm = \kappa^\pm(\omega, a/H,$

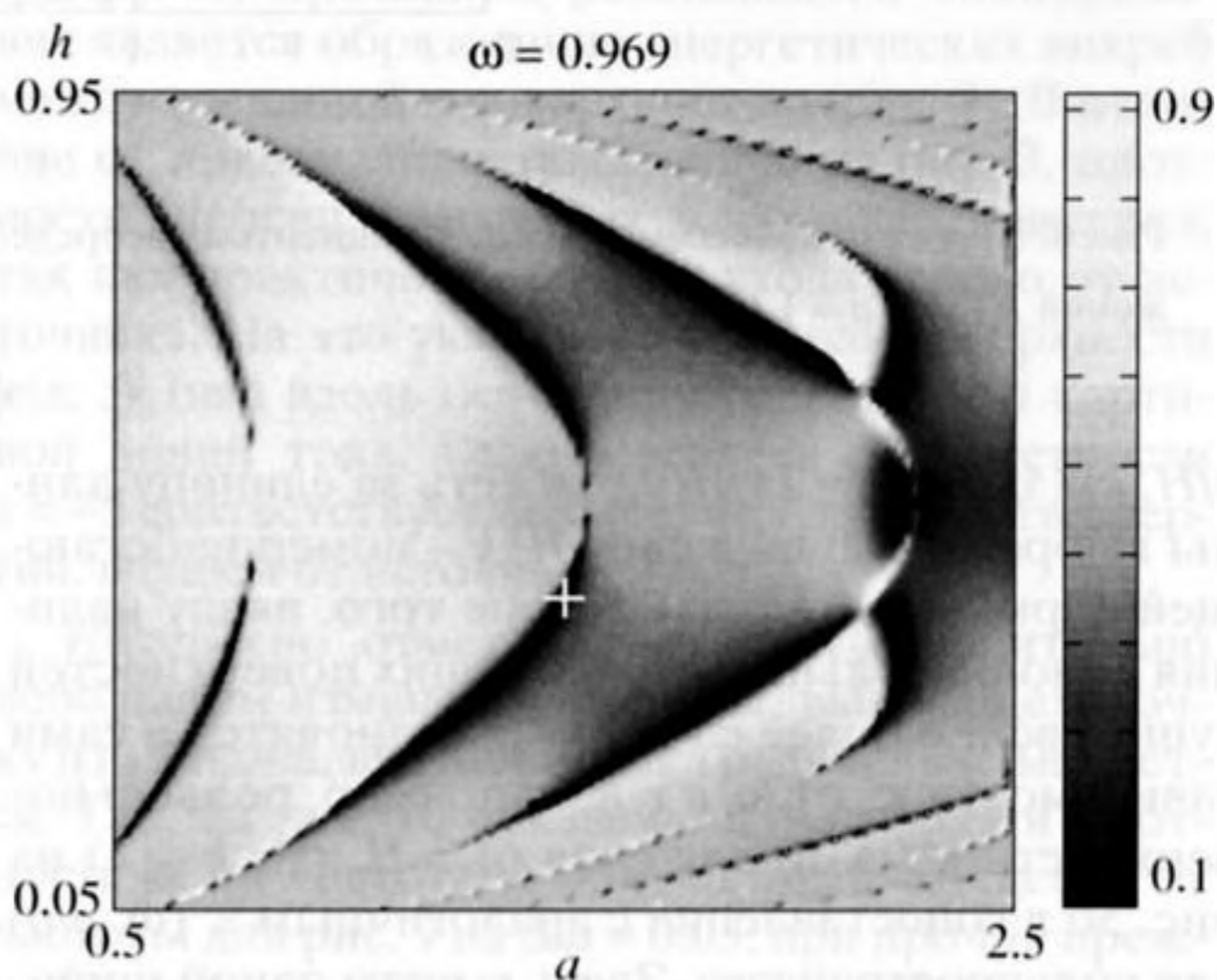


Рис. 6. Зависимость коэффициента распределения μ^+ от размера трещины a и глубины залегания h при фиксированной частоте.

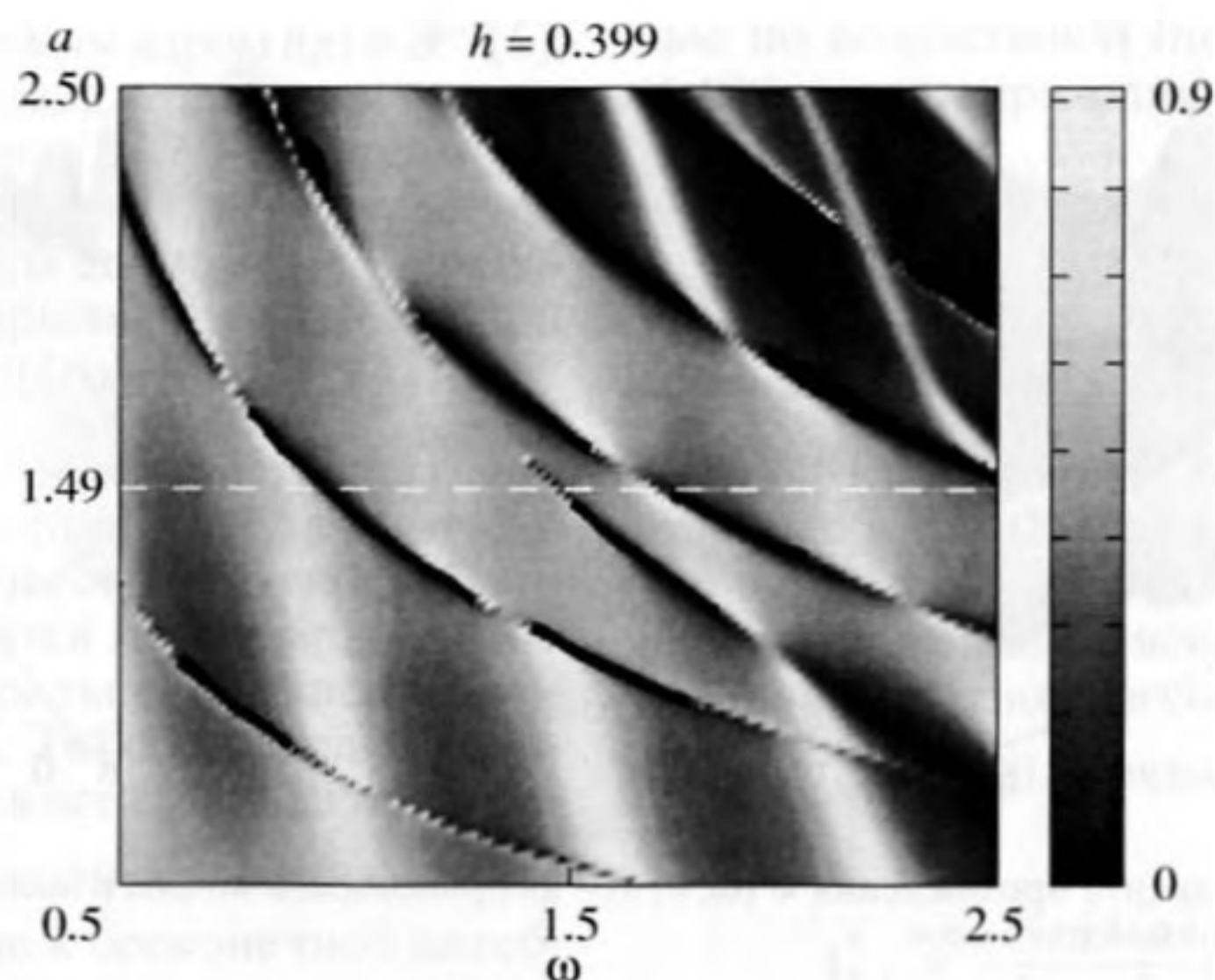


Рис. 7. $\mu^+(\omega, a)$ при фиксированной глубине h .

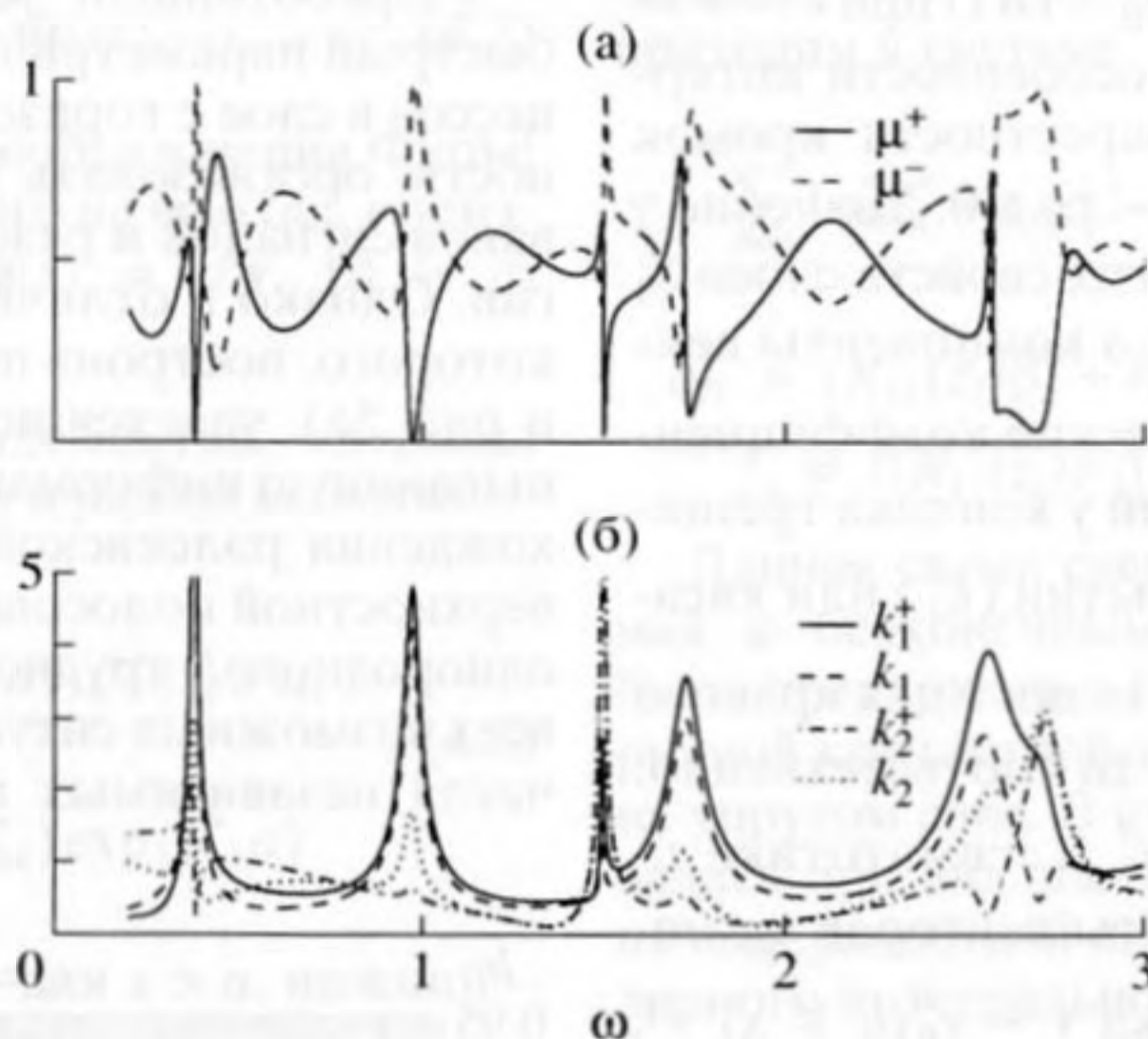


Рис. 8. Частотные зависимости коэффициентов распределения энергии $\mu^\pm(\omega)$ и коэффициентов интенсивности напряжений k_n^\pm при $a = 1.490$, $h = 0.399$.

$h/H, k$) (здесь $\omega = 2\pi fH/v_s$, то есть за единицу длины выбрана толщина слоя H , k – номер набегающей нормальной моды). Кроме того, ввиду наличия дополнительных отражающих поверхностей существенно более сложными становятся и сами зависимости k^\pm от ω , a и h , например, рельеф поверхности $k^+(\omega, h)$ для слоя ($a = H = 1$, $k = 1$) на рис. 5б в сопоставлении с аналогичным $k^+(\omega, d/a)$ для полупространства. Здесь вместо одной широкой котловины наблюдаются периодические узкие провалы (каньоны), указывающие на резонансный характер запертия волновода.

В случае поверхностного источника (для определенности в (2.5) $\mathbf{q}_0 = (0, \delta(x - x_0))$, $x_0 = -5$ – сосредоточенная вертикальная нагрузка) вместо k^\pm анализируются коэффициенты распределения энергии $\mu^\pm(\omega, a, h)$ ($H \equiv 1$). Примеры зависимостей μ^+ от двух переменных при фиксированной третьей (аналог поверхностей $k^+(\omega, h)$ на рис. 5) показаны на рис. 6 ($\mu^+(h, a)$, $\omega = 0.969$) и рис. 7 ($\mu^+(\omega, a)$, $h = 0.399$) с помощью шкалы оттенков серого цвета. Темные полосы на них соответствуют параметрам резонансного запертия. Они являются аналогом кривых зависимости частот ловушечных

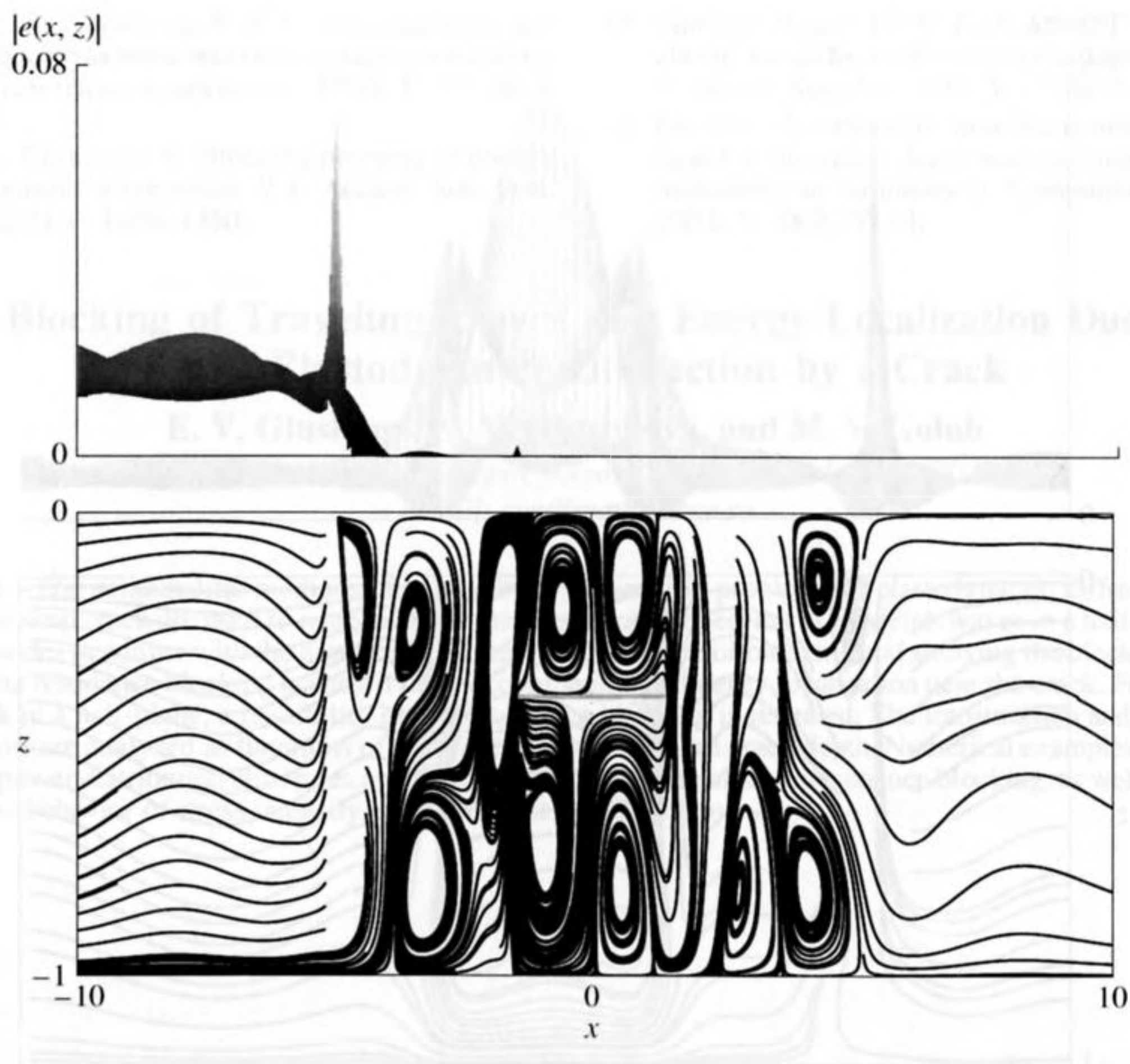


Рис. 9. Линии тока и профиль поверхности плотности энергии $|e(x, z)|$ при резонансном блокировании поля ($\omega = 0.969$, $a = 1.490$, $h = 0.399$), возбуждаемого нагрузкой, приложенной в точке $x_0 = -5$.

мод от глубины и размеров горизонтального препятствия в слое жидкости, полученных в [1].

Поиск параметров полного блокирования, как и в [6], проводился путем минимизации функции μ^+ , выбирая за начальные приближения точки на дне указанных узких каньонов. Так, для начальных параметров, показанных на рис. 6 светлым крестиком, получены значения $\omega = 0.9692$, $a = 1.4903$, $h = 0.3994$, для которых $\mu^+ < 10^{-6}$. Аналогичные точки, дающие практически нулевые коэффициенты κ^+ или μ^+ , были обнаружены и во многих других местах пространства ω , a , h , например, на дне каньонов поверхностей μ^+ (рис. 6–7) или поверхности $\kappa^+(\omega, h)$, показанной на рис. 5.

На резонансный характер блокирования на таких частотах указывает не только резкий рост перемещений поверхности слоя над трещиной, но и коэффициентов интенсивности напряжений k_n^\pm (рис. 8). Кривая $\mu^+(\omega)$ на верхнем рис. 8а – результат сечения поверхности $\mu^+(\omega, a)$ вдоль отрезка $a = 1.490$ (рис. 7, светлый пунктир), пересекающего четыре каньона при $\omega = 0.381, 0.969, 1.491$ и

1.728. На этих же частотах происходит и резкий рост коэффициентов k_n^\pm (рис. 8б).

Другим признаком резонансного блокирования является образование энергетических вихрей между трещиной и поверхностью (рис. 9). В отличие от локализации, показанной на рис. 3, плотность энергии в вихревых зонах здесь невелика, так как практически вся она уходит влево от источника. На это указывает профиль поверхности $|e(x, z)|$ (вид вдоль оси z), приведенный над картиной линий тока. Резкий всплеск в окрестности $x = -5$ соответствует повышенной плотности энергии, идущей от источника.

Интересно отметить, что при сравнительно небольшом изменении частоты, выводящем точку из каньона, вид линий тока радикально меняется. Так, на рис. 10 показаны линии тока и плотность $|e|$ на частоте $\omega = 0.966$, отличающейся от частоты для рис. 9 на $\Delta\omega = 0.03$, при прочих прежних параметрах. Здесь уже вместо набора вихрей между трещиной и поверхностями слоя наблюдается одна вихревая зона, окружающая трещину, ниже которой энергия, тем не менее, проходит в

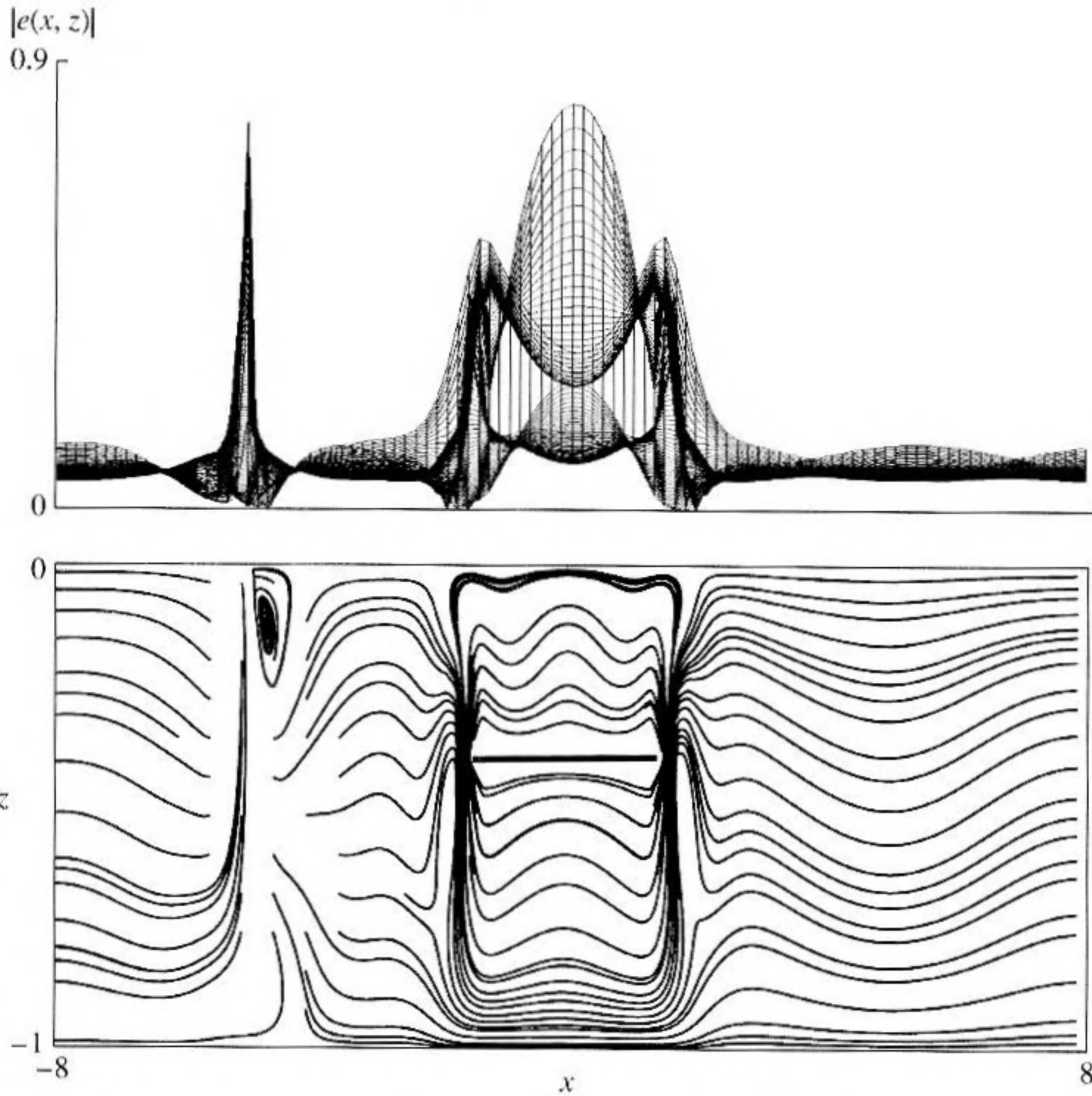


Рис. 10. То же, что и на рис. 9, но на частоте, близкой к резонансной ($\omega = 0.969$).

правую часть волновода, так что в целом $\mu^\pm \approx 0.5$, то есть энергия источника уходит в обе стороны, практически как в волноводе без дефекта.

Работа поддержана грантами РФФИ № 03-01-00520, № 03-01-96618 и грантом Минобразования А04-210-838.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Linton C.M., Evans D.V. Trapped modes above a submerged horizontal plate // Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. 1991. V. 44(3). P. 487–506.
2. Indeitsev D. Trapping modes of oscillations in an infinitely long waveguide with submerged object in the form of a massive die // J. Acoust. Soc. Am. 1999. V. 105(2). P. 1196.
3. Бобровницкий Ю.И., Коротков М.П. Резонансы неоднородных волн в протяженных упругих структурах // Акуст. журн. 1991. Т. 37. Вып. 5. С. 872–878.
4. Ворович И.И. Резонансные свойства упругой неоднородной полосы // ДАН СССР. 1979. Т. 245. № 5. С. 1076–1079.
5. Бабешко В.А. “Вирусы” вибропрочности // Известия вузов. Сев.-Кавк. регион. 1994. Спец. выпуск. С. 90–91.
6. Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Шапарь Е.М. О блокировании рэлеевской волны приповерхностной трещиной // Доклады РАН. 2004. Т. 398. 6. С. 764–770.
7. Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Ехлаков А.В. Математическая модель ультразвуковой дефектоскопии пространственных трещин. Прикладная математика и механика. 2002. Т. 66. Вып. 1. С. 147–156.
8. Ворович И.И., Бабешко В.А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979, 320 с.
9. Бабешко В.А., Глушков Е.В., Зинченко Ж.Ф. Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 344 с.
10. Глушкова Н.В. Определение и учет сингулярных составляющих в задачах теории упругости. Дис.... д-ра физ.-мат.наук, 01.02.04, Ростовский госуниверситет, 2000 г., 220 с.

11. Глушков Е.В., Глушкова Н.В. К определению динамической контактной жесткости упругого слоя // Прикл. математика и механика. 1990. Т. 54. № 3. С. 474–479.
12. Glushkov E., Glushkova N. Blocking property of energy vortices in elastic waveguides // J. Acoust. Soc. Am. 1997. V. 102(3). P. 1356–1360.
13. Van der Hijden J.H.M.T., Neerhoff F.L. Diffraction of elastic waves by a sub-surface crack (in-plane motion) // J. Acoust. Soc. Am. 1984. V. 75(6). P. 1694–1704.
14. Liu G.R. A combined finite element/strip element method for analyzing elastic wave scattering by cracks and inclusions in laminates // Computational Mechanics. 2002. V. 28 P. 76–81.

Blocking of Traveling Waves and Energy Localization Due to the Elastodynamic Diffraction by a Crack

E. V. Glushkov, N. V. Glushkova, and M. V. Golub

Kuban State University, Stavropol' skaya ul. 149, Krasnodar, 350040 Russia

e-mail: evg@math.kubsu.ru

Abstract—The semianalytic methods developed for solving the problems of elastodynamic diffraction by a horizontal strip crack are used to analyze the transmission and reflection of Rayleigh waves in a half-plane and normal modes in a layer with the aim to determine the parameters of blocking and studying the blocking mechanism. The resonance blocking is shown to be accompanied by energy localization near the crack. For the case of a crack in a half-plane, a possibility of nonresonance blocking is revealed. The transmission and reflection coefficients are analyzed as functions of frequency, crack size, and crack depth. Numerical examples of energy flux and power distribution structures are given for the resonance and nonresonance blocking, as well as examples of the behavior of stress intensity coefficients at the crack tips.