АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2006, том 52, № 4, с. 514–520

УДК 534.222

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ГИСТЕРЕЗИСОВ ДЛЯ МИКРОНЕОДНОРОДНЫХ СРЕД С НЕСОВЕРШЕННОЙ УПРУГОСТЬЮ И РЕЛАКСАЦИЕЙ

© 2006 г. В. Е. Назаров, А. В. Радостин

Институт прикладной физики РАН
603950, Нижний Новгород, ул. Ульянова 46
E-mail: nazarov@hydro.appl.sci-nnov.ru

Поступила в редакцию 24.01.05 г.

Приведены результаты численного моделирования и сравнительного графического анализа двух основных моделей гистерезисов (трения и отрыва) для микронеоднородных сред с несовершенной упругостью и релаксацией при их динамическом деформировании.

PACS: 43.25.Ba, 43.25.Dc

ВВЕДЕНИЕ

При квазистатическом деформировании твердых тел с так называемой несовершенной упругостью [1], наблюдается их гистерезисное поведение, т.е. в зависимости "напряжение σ – деформация ε" имеет место механический гистерезис [1–14]. Проявление гистерезисной нелинейности обнаруживается и при изучении эффектов амплитудно-зависимого внутреннего трения (АЗВТ), связанных с нелинейным затуханием и распространением в этих материалах интенсивных акустических колебаний и волн [1–15]. Теоретическое описание эффектов АЗВТ проводится, в основном, в рамках статических (а потому и безинерционных) гистерезисных уравнений состояния $\sigma = \sigma(\varepsilon, \operatorname{sign}\dot{\varepsilon})$ [1–16], при этом неявно предполагается, что и при динамическом деформировании поведение подобных сред не отличается от квазистатического. С "акустической точки зрения", среды с безинерционной (т.е. "мгновенной") нелинейностью характеризуются постоянными (не зависящими от частоты волны) параметрами нелинейности. Результаты же экспериментальных исследований эффектов АЗВТ в некоторых микронеоднородных средах (поликристаллических горных породах и металлах) показывают [17–19], что эффективные параметры гистерезисной нелинейности подобных сред зависят от частоты акустической волны, и, следовательно, динамический гистерезис для каждой из этих сред отличается от гистерезиса статического. В работе [20], для объяснения частотной зависимости нелинейности была предложена реологическая модель микронеоднородной среды, содержащая различные дефекты (трещины, зерна, дислокации и т.д.), проявляющие вязко-упругие (релаксационные) и нелинейные (в том числе, и гистерезисные) свойства. В этой работе было показано, что нелинейное динамическое уравнение состояния такой среды является интегральным и содержит линейное и нелинейное релаксационные слагаемые, в отличие от однородной среды, для которой уравнение состояния является дифференциальным, а нелинейность – безинерционна. В связи с этим, при динамическом деформировании микронеоднородной среды с гистерезисной нелинейностью и релаксацией форма гистерезиса будет зависеть от частоты деформационного процесса и при изменении этой частоты будет также изменяться. Таким образом, представляет интерес, на основе знания статической формы гистерезиса микронеоднородной среды с релаксацией, предсказать (или реконструировать) его динамическую форму и проследить за ее эволюцией при изменении частоты деформации.

В настоящей работе проводится численное моделирование и сравнительный анализ динамических гистерезисов трения и отрыва для микронеоднородных сред с несовершенной упругостью и релаксацией при их гармоническом деформировании с амплитудой, характерной для интенсивных акустических волн, при которой необратимые (пластические) деформации материала еще не наблюдаются.

ДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ МИКРОНЕОДНОРОДНЫХ РЕЛАКСИРУЮЩИХ СРЕД С ГИСТЕРЕЗИСАМИ ТРЕНИЯ И ОТРЫВА

Как и в работе [20], рассмотрим реологическую модель микронеоднородной среды, состоящую из одномерной цепочки линейных упругих элементов и относительно мягких нелинейных вязко-упругих дефектов, для которых зависи-

мость "напряжение σ – деформация ξ" является гистерезисной:

$$\sigma(\xi, \operatorname{sign}\dot{\xi}, \dot{\xi}) = \zeta E[\xi - f(\xi, \operatorname{sign}\dot{\xi})] + \eta\dot{\xi}, \quad (1)$$

где E – модуль упругости жестких элементов, ζ – относительная упругость дефекта по сравнению с упругостью жестких элементов ($0 < \zeta < 1$), η – коэффициент вязкости дефекта, $f(\xi, \operatorname{sign}\dot{\xi})$ – нелинейная (гистерезисная) функция, $|f'_\xi(\xi, \operatorname{sign}\dot{\xi})| \ll 1$.

Общая деформация ε такой микронеоднородной среды, находящейся под действием напряжения σ, складывается из деформации линейной (бездефектной) части среды и деформации гистерезисных вязко-упругих дефектов, при этом уравнение состояния среды определяется выражением [20]:

$$\varepsilon(\sigma) = \frac{1}{E}\left((1-\nu)\sigma + \int_0^\infty\int_0^1 R[\sigma]N(\zeta, W)d\zeta dW\right) + \int_0^\infty\int_0^1 \zeta R[f(R[\sigma/E], \operatorname{sign}\dot{R}[\sigma])]N(\zeta, W)d\zeta dW, \quad (2)$$

где $W = \zeta E/\eta$ – релаксационная частота дефекта, $N = N(\zeta, W)$ – функция распределения дефектов по параметрам ζ и W, $\nu = \int_0^\infty\int_0^1 N(\zeta, W)d\zeta dW$ – концентрация дефектов, $R[\sigma] = \frac{W}{\zeta}\int_{-\infty}^t \sigma(\tau)e^{-W(t-\tau)}d\tau$. Уравнение (2) справедливо при любой концентрации дефектов ($0 \le \nu \le 1$); при $\nu = 0$ имеем, естественно, однородную идеально-упругую среду, а при $\nu = 1$ (и когда все дефекты одинаковы) – также однородную среду, но с гистерезисной нелинейностью и квадратично зависящей от частоты диссипацией – ее уравнение состояния совпадает с уравнением (1).

При относительно малой концентрации дефектов ($\nu \ll 1$) уравнение состояния микронеоднородной среды можно привести к виду [20]:

$$\sigma[\varepsilon, R(\varepsilon), \operatorname{sign}\dot{R}(\varepsilon)] \cong E\left[\varepsilon - \int_0^\infty\int_0^1 R(\varepsilon)N(\zeta, W)d\zeta dW - \int_0^\infty\int_0^1 \zeta R[f(R(\varepsilon), \operatorname{sign}\dot{R}(\varepsilon))]N(\zeta, W)d\zeta dW\right],$$

$$\left|\int_0^\infty\int_0^1 \zeta R[f(R(\varepsilon), \operatorname{sign}\dot{R}(\varepsilon))]N(\zeta, W)d\zeta dW\right| \ll \left|\int_0^\infty\int_0^1 R(\varepsilon)N(\zeta, W)d\zeta dW\right| \ll |\varepsilon|, \quad (3)$$

где $R(\varepsilon) = \frac{W}{\zeta}\int_{-\infty}^t \varepsilon(\tau)e^{-W(t-\tau)}d\tau$.

Уравнение (3) является нелинейным интегральным уравнением и содержит линейное и нелинейное (гистерезисное) релаксационные слагаемые. Эти слагаемые обусловлены релаксацией гистерезисных вязко-упругих дефектов, при этом релаксация гистерезисной нелинейности проявляется дважды: первый раз за счет линейной релаксации, поскольку нелинейная поправка в (3) определяется линейным откликом дефектов, и второй раз – релаксацией самой нелинейной поправки. С ростом частоты акустического воздействия "жесткость" вязко-упругих дефектов увеличивается, а их деформация уменьшается; это приводит к увеличению линейного модуля упругости и к уменьшению нелинейности такой среды на высоких частотах, т.е. к появлению частотной зависимости (или дисперсии) скорости звука, коэффициента затухания и гистерезисной нелинейности. Таким образом, причины возникновения дисперсии скорости звука, декремента затухания и нелинейности микронеоднородных сред взаимосвязаны и обусловлены линейной релаксацией их дефектов.

При описании явления АЗВТ в материалах с несовершенной упругостью используют два основных вида статических гистерезисов [1–4, 11–14, 16, 21]; по терминологии Асано их можно разделить на гистерезис трения и гистерезис отрыва [12]. Здесь мы будем использовать наиболее простые формы таких гистерезисов, аппроксимируя каждую ветвь гистерезиса квадратичной параболой. Подобное представление гистерезисов трения и отрыва связано с часто наблюдаемыми проявлениями эффектов АЗВТ в различных поликристаллах [1, 12, 21], а именно, с линейной зависимостью (от амплитуды волны) для декремента затухания и дефекта модуля упругости, и квадратичной для амплитуд генерируемых высших гармоник. В соответствии с этим обстоятельством, в уравнении состояния (1) мы будем полагать, что дефекты с гистерезисами трения и отрыва описываются соответственно следующими неаналитическими функциями [16, 21]:

$$f(\xi, \operatorname{sign}\dot{\xi}) = \alpha\xi_m\xi + \frac{1}{2}\begin{cases}\beta_1\xi^2 - \dfrac{\beta_1+\beta_2}{2}\xi_m^2, & \dot{\xi} > 0\\ -\beta_2\xi^2 + \dfrac{\beta_1+\beta_2}{2}\xi_m^2, & \dot{\xi} < 0,\end{cases} \quad (4)$$

$$f(\xi, \operatorname{sign}\dot{\xi}) = \frac{1}{2}\begin{cases}\gamma_1\xi^2, & \xi > 0, \quad \dot{\xi} > 0;\\ -\gamma_2\xi^2 + (\gamma_1+\gamma_2)\xi_m\xi, & \xi > 0, \quad \dot{\xi} < 0;\\ -\gamma_3\xi^2, & \xi < 0, \quad \dot{\xi} < 0;\\ \gamma_4\xi^2 + (\gamma_3+\gamma_4)\xi_m\xi, & \xi < 0, \quad \dot{\xi} > 0,\end{cases} \quad (5)$$

где ξ_m – амплитуда деформации, α, $\beta_{1,2}$ и γ_{1-4} – параметры гистерезисной нелинейности, $\alpha\xi_m \ll 1$, $\beta_{1,2}\xi_m \ll 1$, $|\gamma_{1-4}|\xi_m \ll 1$, $|\alpha| \gg 1$, $|\beta_{1,2}| \gg 1$, $|\gamma_{1-4}| \gg 1$.

Здесь следует отметить, что в выражениях (4), (5) значение ξ_m соответствует максимальной (или глобальной) амплитуде деформации при простых (монотонных) процессах деформирования (например, гармоническом, пилообразном и т.д.), т.е. при таких процессах, при которых на стадиях нагрузки и разгрузки значение $\dot{\xi}$ не меняет знака. При сложных (немонотонных) процессах деформирования (при которых на стадиях нагрузки и разгрузки значение $\dot{\xi}$ меняет знак), ξ_m соответствуют локальным значениям амплитуды; на стадиях нагрузки и разгрузки таких значений может быть несколько, и в этих случаях на диаграмме деформирования появятся вложенные гистерезисные петли [5]. Описание поведения гистерезисных материалов при сложных процессах деформирования является более сложной задачей и в настоящей работе не рассматривается.

Очевидно, что в низкочастотном (квазистатическом) приближении, т.е. при $\omega/W \ll 1$, где ω – частота акустической волны, уравнение (3) описывает статические (безинерционные) гистерезисы:

$$\sigma(\varepsilon, \operatorname{sign}\dot{\varepsilon}) = E\left(1 - \int_0^1 \frac{N(\zeta)}{\zeta} d\zeta\right) \times$$
$$\times \left[\varepsilon - \frac{\int_0^1 \frac{N(\zeta)}{\zeta^2} d\zeta}{1 - \int_0^1 \frac{N(\zeta)}{\zeta} d\zeta} f(\varepsilon, \operatorname{sign}\dot{\varepsilon})\right], \quad (6)$$

а в высокочастотном ($\omega/W \gg 1$), где гистерезисные вязко-упругие дефекты сильно задемпфированы и не деформируются, уравнение (3) становится линейным: $\sigma(\varepsilon) = E\varepsilon$. Получить представление о детальном поведении и эволюции гистерезисных зависимостей (3) в промежуточном диапазоне можно на основе численных исследований. Далее мы представим результаты численного счета и графического представления динамических гистерезисов трения и отрыва, описываемых уравнением (3), с учетом, соответственно, уравнений (4) и (5). Отметим только, что приведенные гистерезисы трения и отрыва существенно отличаются друг от друга и имеют различную область применимости для описания нелинейных волновых процессов в микронеоднородных средах с несовершенной упругостью [12, 21, 22]. Первое уравнение состояния (с гистерезисом трения), в отличие от второго (с гистерезисом отрыва), не является эволюционным, поскольку в статическом случае оно неоднозначно определяет начальное состояние среды: нулевой деформации соответствует два различных ненулевых напряжения, зависящих от амплитуды деформации (даже до начала деформирования среды), и наоборот – нулевому напряжению соответствует две различные ненулевые деформации [21]. В связи с этим, уравнение состояния (3) с гистерезисом трения (4) можно применять только для описания установившихся периодических колебаний и волн, а для описания переходных процессов и распространения однополярных возмущений оно непригодно; в последнем случае это приведет к нарушению закона сохранения импульса [22].

РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО СЧЕТА И ЭВОЛЮЦИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ГИСТЕРЕЗИСОВ ТРЕНИЯ И ОТРЫВА

Для проведения сравнительного анализа и эволюции динамических гистерезисов трения и отрыва (3) зададим их исходные – статические формы (т.е. параметры нелинейности α, $\beta_{1,2}$ и γ_{1-4}) таким образом, чтобы (при одинаковых амплитудах $\in_m$ гармонической деформации $\varepsilon(t) = \in_m \sin\omega t$ и при $\omega/W \ll 1$) оба гистерезиса обладали одинаковыми средними наклонами (или дефектами модуля упругости ΔE) и площадями (или нелинейными потерями). Для этого необходимо выполнить следующие условия [21]:

$$\alpha = (\gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3 - \gamma_4)/3\pi + (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4)/8 > 0,$$
$$\beta_1 + \beta_2 = (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4)/8 > 0. \quad (7)$$

В низкочастотном диапазоне амплитудно-зависимые дефект модуля и декремент затухания материалов с гистерезисной нелинейностью положительны, поэтому положительны и знаки параметров α и $\beta_1 + \beta_2$.

При компьютерном счете и построении диаграмм динамических гистерезисов трения и отрыва (3) все дефекты считались одинаковыми [$N(\zeta, W) = N_0\delta(\zeta - \zeta_0)\delta(W - W_0)$, $N_0 = 10^{-5}$, $\zeta_0 = 10^{-3}$, $W_0 = 2\pi \times 10^4$ с$^{-1}$], а значения нелинейных параметров полагались равными следующим величинам: $\alpha = 4.35 \times 10^2$, $\beta_1 = 2.5 \times 10^2$, $\beta_2 = 10^2$, $\gamma_1 = 10^3$, $\gamma_2 = 6 \times 10^2$, $\gamma_3 = 8 \times 10^2$, $\gamma_4 = 4 \times 10^2$. (Для среды с дефектами, распределенными по параметрам ζ и W, формы и эволюция динамических гистерезисов качественно будут такими же, как и для среды с одинаковыми дефектами.)

Таким образом, задача моделирования динамических гистерезисов заключается в численном расчете и построении зависимостей (3), с учетом уравнений (4) – для гистерезиса трения и – (5) – для гистерезиса отрыва, при заданной гармонической деформации $\varepsilon(t) = \in_m \sin\omega t$. На рис. 1а,б и рис. 2а,б изображены динамические гистерезисы трения и отрыва, построенные (как фигуры Лиссажу [23]) при гармоническом деформировании

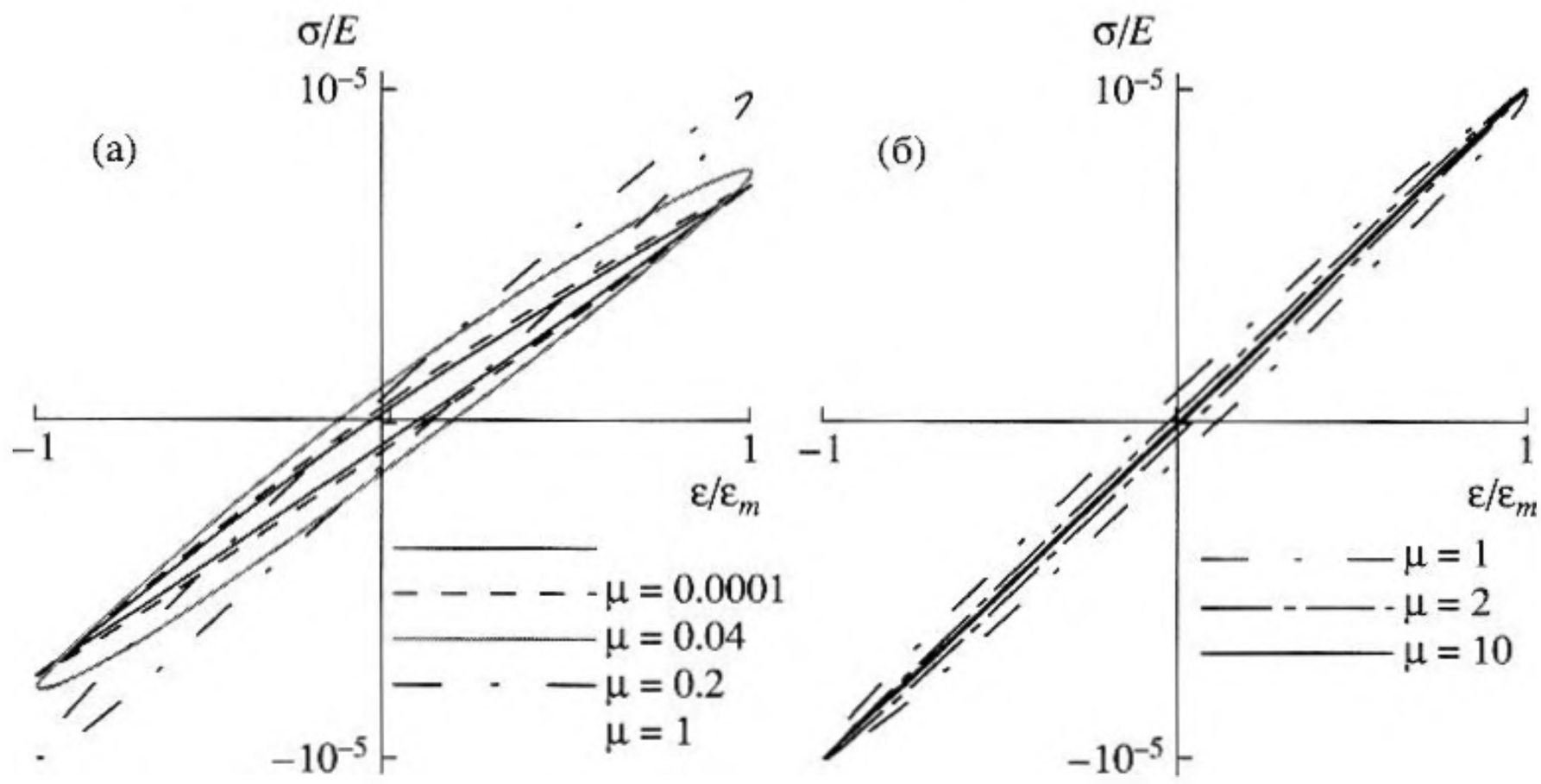

Рис. 1. Динамические гистерезисы трения при различных значениях μ.

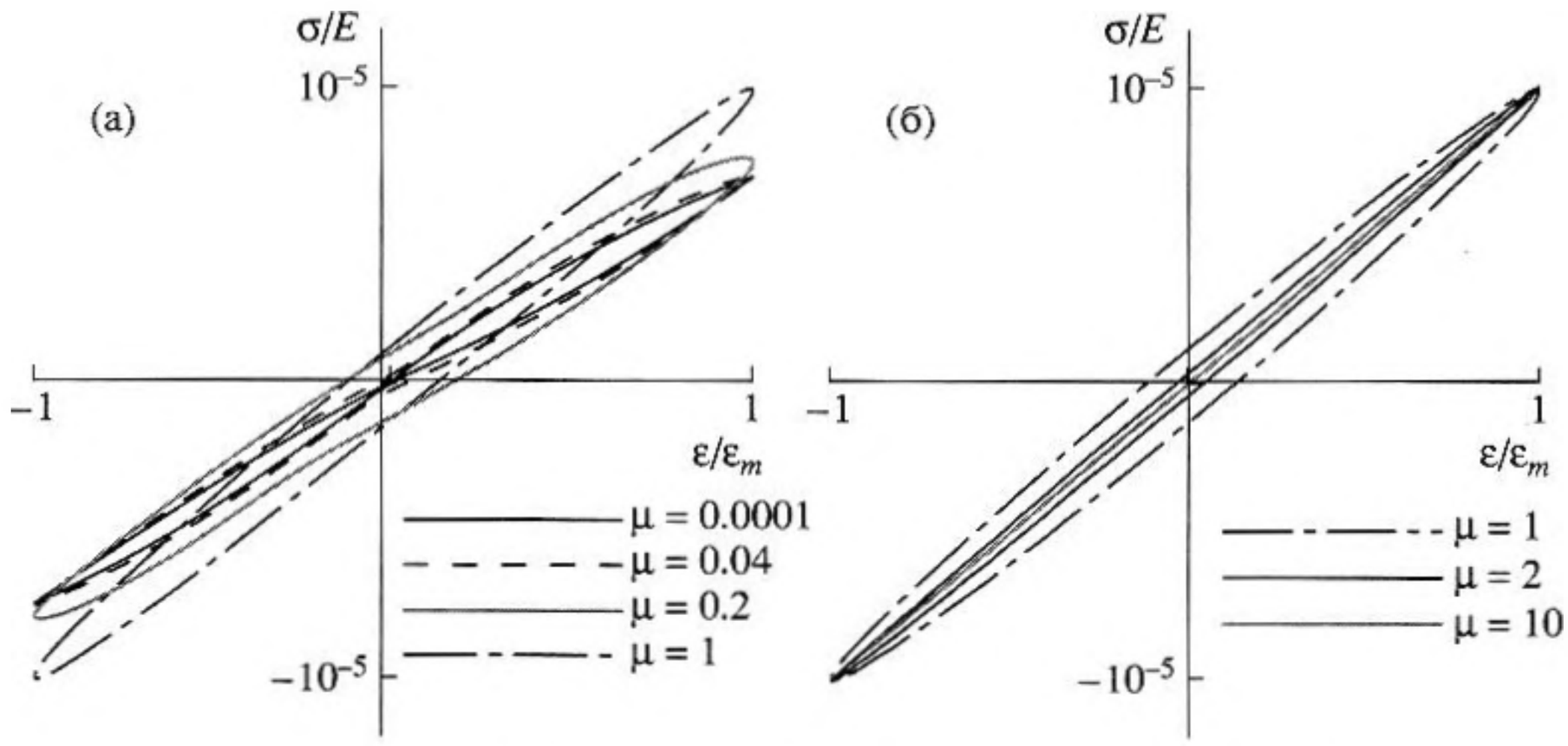

Рис. 2. Динамические гистерезисы отрыва при различных значениях μ.

материала ($\varepsilon(t) = \in_m \sin\omega t, -\infty < t < \infty$), и при различных значениях параметра $\mu = \omega/W$, равного отношению частоты ω деформирования к релаксационной частоте W дефекта (при $\in_m = 10^{-5}$). Отметим, что (поскольку общие потери в материале положительны) изображающая точка на диаграммах $\sigma = \sigma[\varepsilon, R(\varepsilon), \operatorname{sign}\dot{R}(\varepsilon)]$ всегда движется по часовой стрелке. Из рис. 1, 2 видно, что статические гистерезисы трения (при $\varepsilon/\varepsilon_m = \pm 1$) и отрыва (при $\varepsilon/\varepsilon_m = 0; \pm 1$) содержат изломы и заметно отличаются друг от друга. Далее, однако, при увеличении параметра μ гистерезисы "сглаживаются", изломы исчезают, различие гистерезисов уменьшается, и визуально они становятся похожими, а при $\mu \gg 1$ – гистерезисы в зависимости $\sigma = \sigma[\varepsilon, R(\varepsilon), \operatorname{sign}\dot{R}(\varepsilon)]$ асимптотически исчезают. В связи с этим, прямое наблюдение (методом фигур Лиссажу) отличий динамических гистерезисов трения и отрыва для микронеоднородных релаксирующих сред (с целью выявления механизмов их нелинейности) возможно, по-видимому, только на низких частотах ($\omega \ll W$), где отличия этих гистерезисов наиболее сильны и заметны. Тем не менее, изучение нелинейных акустических эффектов АЗВТ позволяет эти гистерезисы отличить и в более высокочастотном диапазоне ($\omega \geq W$). В работах [16, 21, 22, 24] было показано, что нелинейные характеристики акустических волн (амплитудно-зависимые потери и изменение скорости распространения, амплитудные зависимости высших гармоник) в средах с различными видами гистерезисов – различны, и эти различия не зависят от частоты волны. Последнее связано с тем, что нелинейные характеристики волны определяются видом гистерезисной нелинейности, вклад которой, вследствие

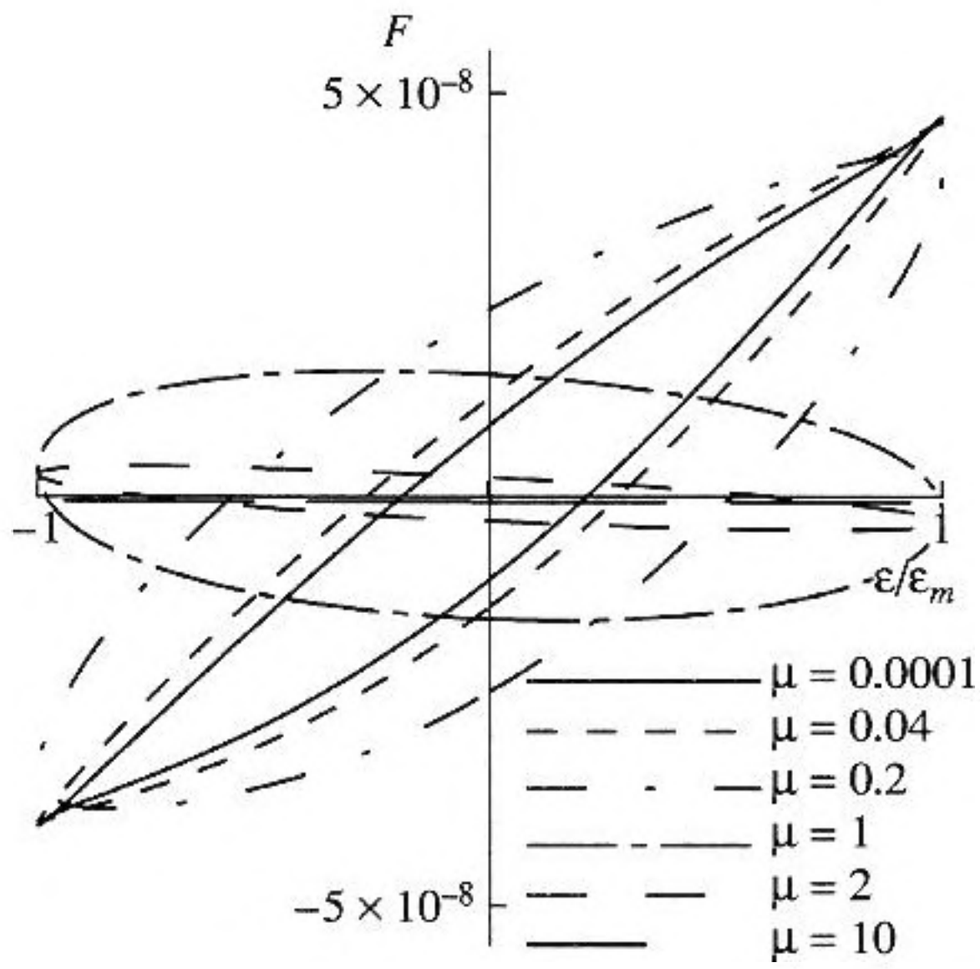

Рис. 3. Диаграммы нелинейной функции $F = F[R(\varepsilon), \operatorname{sign}\dot{R}(\varepsilon)]$ для гистерезиса трения при различных значениях μ.

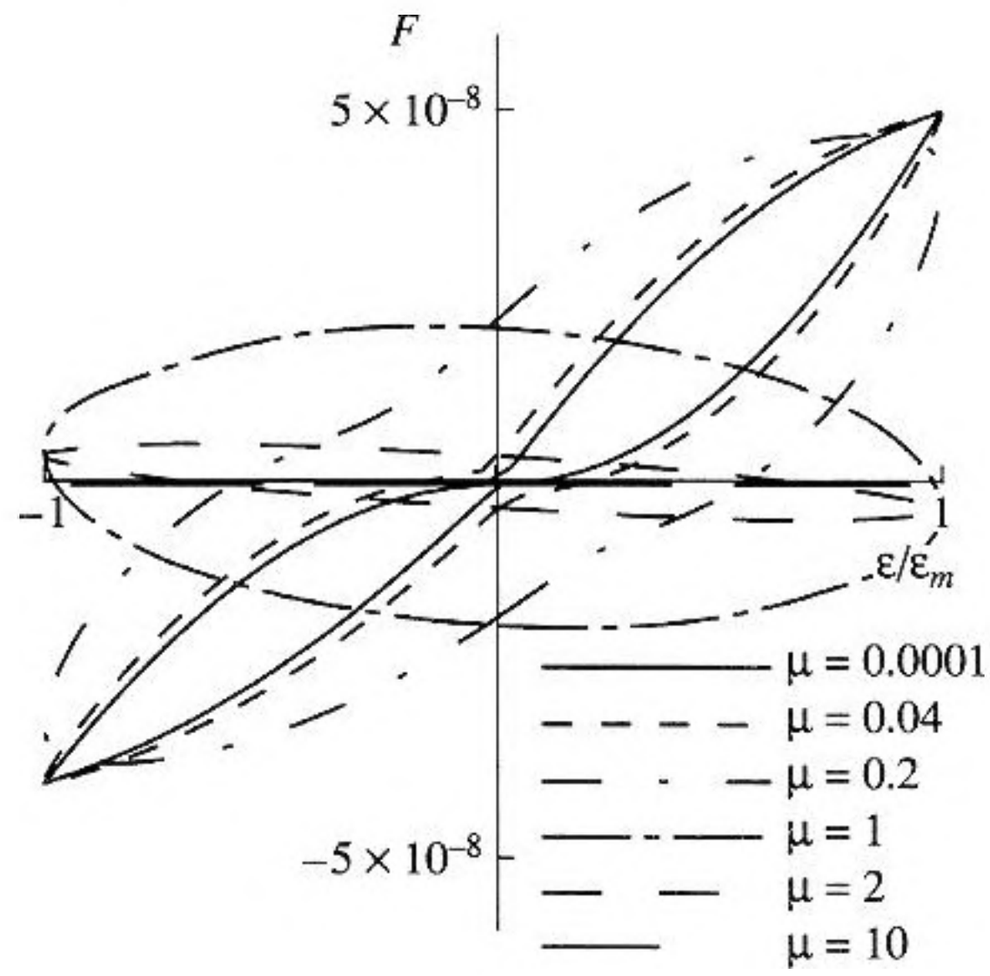

Рис. 4. Диаграммы нелинейной функции $F = F[R(\varepsilon), \operatorname{sign}\dot{R}(\varepsilon)$ для гистерезиса отрыва при различных значениях μ.

ее малости относительно линейных слагаемых в уравнении состояния (3), также мал и на рис. 1б, рис. 2б (при $\omega \gg W$) практически незаметен. Однако отличия динамических гистерезисов можно значительно усилить (или увеличить их контраст), если построить диаграммы нелинейных функций $F = F[R(\varepsilon), \operatorname{sign}\dot{R}(\varepsilon)]$ уравнения состояния (3):

$$F[R(\varepsilon), \operatorname{sign}\dot{R}(\varepsilon)] = -\frac{\sigma(\varepsilon, \operatorname{sign}\dot{\varepsilon})}{E} + \left[\varepsilon - \int_0^\infty\int_0^1 R(\varepsilon)N(\zeta, W)d\zeta dW\right] = \tag{8}$$

$$= \int_0^\infty\int_0^1 \zeta R[f[R(\varepsilon), \operatorname{sign}\dot{R}(\varepsilon)]]N(\zeta, W)d\zeta dW.$$

Построение нелинейной функции (8) соответствует подавлению (или компенсации) линейного отклика среды, в результате чего в спектре ее отклика на гармоническое воздействие будут содержаться гармоники $n\omega$ частоты деформирования (n – целое число), обусловленные только гистерезисной нелинейностью, и различие динамических гистерезисных функций $F = F[R(\varepsilon), \operatorname{sign}\dot{R}(\varepsilon)]$ будет более заметно (рис. 3, рис. 4). Экспериментально такая процедура вполне реализуема. Для этого (при $\omega = \text{const}$) нужно снять две зависимости (3) при существенно различных амплитудах деформации – малой (при которой нелинейность среды не проявляется) и большой, в $N \gg 1$ раз больше первой, при которой нелинейность среды заметна. После этого, из второй зависимости нужно вычесть увеличенную в N раз первую (линейную) зависимость. В результате такой операции линейная часть уравнения состояния (3) скомпенсируется и останется только нелинейная функция (8).

Следует иметь в виду, что на деформационных диаграммах (рис. 3, 4) направление движения изображающей точки зависит от соотношения параметров μ и $r = 2(\beta_1 + \beta_2)/3\pi\alpha$ [24]: при $\mu < \mu_1 = r^{-1} + (1 + r^{-2})^{1/2} \cong 11.8$ – нелинейные потери положительны и изображающая точка движется по часовой стрелке, при $\mu = \mu_1$ нелинейные потери равны нулю и гистерезиса на диаграмме $F = F[R(\varepsilon), \operatorname{sign}\dot{R}(\varepsilon)]$ нет, а при $\mu > \mu_1$ – нелинейные потери отрицательны и изображающая точка движется против часовой стрелки. От соотношения параметров μ и r зависит также и средний (по периоду $T = 2\pi/\omega$) угол наклона нелинейной функции $F = F[R(\varepsilon), \operatorname{sign}\dot{R}(\varepsilon)]$ к оси ε: при $\mu < \mu_2 = -r + (1 + r^2)^{1/2} \cong 0.84$ – угол наклона положительный (и $\Delta E > 0$), при $\mu = \mu_2$ – наклон равен нулю ($\Delta E = 0$), а при $\mu > \mu_2$ – угол наклона становится отрицательным ($\Delta E < 0$) [19, 24].

В заключение этого раздела еще раз отметим, что именно нелинейная функция (8) определяет характер и динамику нелинейных волновых процессов в любой нелинейной среде, поэтому все отличия нелинейных акустических эффектов в различных средах связаны с отличиями именно нелинейных функций уравнений состояния этих сред (несмот-

ря на их малость по сравнению с линейными слагаемыми). При гармоническом деформировании сред с гистерезисами трения и отрыва отличия нелинейных функций $F = F[R(\varepsilon), \operatorname{sign}\dot{R}(\varepsilon)]$ проявятся в различной динамике эффектов АЗВТ [14, 16, 21, 24, 25], по спектральному анализу которых можно определить, каким гистерезисом можно описывать микронеоднородную среду с несовершенной упругостью. Так, в работе [25], на основе анализа эффектов АЗВТ (нелинейных потерь, дефекта модуля упругости, генерации второй и третьей гармоник) в акустическом резонаторе из известняка, было показано, что исследованный образец известняка можно самосогласованно описать гистерезисом отрыва и нельзя описать гистерезисом трения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках реологической модели микронеоднородной среды с квадратичной гистерезисной нелинейностью и релаксацией выполнены численное моделирование и сравнительный анализ двух основных динамических гистерезисов (трения и отрыва). На основе численных расчетов и построения фигур Лиссажу для зависимостей $\sigma = \sigma[\varepsilon, R(\varepsilon), \operatorname{sign}\dot{R}(\varepsilon)]$ показано, что при увеличении частоты гармонического деформирования среды существенные вначале абсолютные отличия статических гистерезисов трения и отрыва постепенно уменьшаются, а затем практически исчезают, при этом более заметные отличия наблюдаются в диаграммах нелинейных функций $F = F[R(\varepsilon), \operatorname{sign}\dot{R}(\varepsilon)]$ этих гистерезисов. Экспериментальные исследования по динамическому деформированию подобных материалов (с целью поиска отличий и выявления механизмов их нелинейности) позволил бы непосредственно увидеть гистерезис в зависимости $\sigma = \sigma[\varepsilon, R(\varepsilon), \operatorname{sign}\dot{R}(\varepsilon)]$ (или $F = F[R(\varepsilon), \operatorname{sign}\dot{R}(\varepsilon)]$) и, в принципе, определить его параметры. Однако постановка и проведение таких экспериментов намного сложнее акустических измерений эффектов АЗВТ, позволяющих, вообще говоря, восстановить нелинейность уравнения состояния исследуемой среды. Тем не менее, для более полного представления об акустических свойствах гистерезисной среды всегда интересно и полезно иметь наглядный образ зависимости $\sigma = \sigma[\varepsilon, R(\varepsilon), \operatorname{sign}\dot{R}(\varepsilon)]$ (или $F = F[R(\varepsilon), \operatorname{sign}\dot{R}(\varepsilon)]$ и эволюции динамического гистерезиса в дополнении к его математической форме в виде уравнения состояния.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 05-05-64941) и Гранта Президента РФ "Научные школы" № 10291.2006.2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Писаренко Г.С.* Колебания механических систем с учетом несовершенной упругости материала. Киев: Наук. Думка. 1970.
2. *Ван Бюрен.* Дефекты в кристаллах. Пер. с англ. Под ред. А.Н. Орлова и В.Р. Регеля. М.: ИИЛ. 1962.
3. *Granato A., Lucke K.* Theory of mechanical damping due to dislocations // J. Appl. Phys. 1956. V. 27. № 5. P. 583–593.
4. Ультразвуковые методы исследования дислокаций // Сб. статей под ред. Л.Г. Меркулова. М.: ИИЛ. 1963.
5. *Cook N.G.W., Hodson K.* Some detailed stress-strain curves for rock // JGR. 1965. V. 70. № 12. P. 2883–2888.
6. *Криштал М.А., Головин С.А.* Внутреннее трение и структура металлов. М.: Металлургия, 1976.
7. *Кустов С.Б., Голяндин С.Н., Кардашев Б.К.* Неупругая деформация и амплитудно-зависимое внутреннее трение в кристаллах LiF и NaCl при низких частотах нагружения // ФТТ. 1998. Т. 30. № 7. С. 2167–2176.
8. *Кустов С.Б., Голяндин С.Н., Никифоров А.В., Кардашев Б.К.* Исследование частотной зависимости амплитудно-зависимого внутреннего трения в кристаллах LiF и NaCl // ФТТ. 1989. Т. 31. № 2. С. 260–263.
9. *Голяндин С.Н., Кустов С.Б.* Модель амплитудно-зависимой неупругости и амплитудно-частотный спектр внутреннего трения щелочно-галоидных кристаллов // ФТТ. 1992. Т. 34. № 12. С. 3763–3778.
10. *Голяндин С.Н., Кустов С.Б.* Термически активируемая и силовая микропластическая деформация и амплитудно-частотные спектры внутреннего трения в кристаллах // ФТТ. 1995. Т. 37. № 11. С. 3248–3261.
11. *Давиденков Н.Н.* О рассеянии энергии при вибрациях // ЖТФ. 1938. Т. 8. № 6. С. 483–499.
12. *Asano S.* Theory of nonlinear damping due to dislocation hysteresis // J. Phys. Soc. Jap. 1970. V. 29. № 4. P. 952–963.
13. *Nishino Y., Ogawa H., Asano S.* Mechanical hysteresis due to microplasticity in aluminia with microcracks // Philosophical Nagazine Letters. 1992. V. 66. № 6. P. 313–316.
14. *Лебедев А.Б.* Амплитудно-зависимый дефект модуля упругости в основных моделях дислокационного гистерезиса // ФТТ. 1999. Т. 41. № 7. С. 1214–1221.
15. Физическая акустика // Под ред. У. Мезона. Т. 4. Ч. А. Применения физической акустики в квантовой физике и физике твердого тела. М.: Мир. 1969. 436 с.
16. *Назаров В.Е., Сутин А.М.* Генерация гармоник при распространении упругих волн в твердых нелинейных средах // Акуст. журн. 1989. Т. 35. № 4. С. 711–716.
17. *Назаров В.Е.* Амплитудно-зависимое внутреннее трение свинца // ФММ. 1999. Т. 88. № 4. С. 82–90.
18. *Назаров В.Е.* Об амплитудной зависимости внутреннего трения цинка // Акуст. журн. 2000. Т. 46. № 2. С. 228–233.

19. *Назаров В.Е., Радостин А.В.* Экспериментальное исследование эффектов амплитудно-зависимого внутреннего трения в резонаторе из песчаника // Акуст. журн. 2004. Т. 50. № 4. С. 524–532.
20. *Nazarov V.E., Zaitsev V.Yu., Beliaeva I.Yu.* Nonlinear transformation of acoustic waves in microinhomogeneous media with relaxation // Acta Acustica united with Acustica. 2002. V. 88. P. 40–49.
21. *Назаров В.Е., Радостин А.В., Островский Л.А., Соустова И.А.* Волновые процессы в средах с гистерезисной нелинейностью. Часть I // Акуст. журн. 2003. Т. 49. № 3. С. 405–415.
22. *Назаров В.Е., Радостин А.В., Островский Л.А., Соустова И.А.* Волновые процессы в средах с гистерезисной нелинейностью. Часть II // Акуст. журн. 2003. Т. 49. № 4. С. 529–534.
23. Физическая энциклопедия // Под ред. А.М. Прохорова. Т. 2. М.: Сов. энциклопедия, 1990.
24. *Назаров В.Е., Радостин А.В.* Волновые процессы в микронеоднородных упругих средах с гистерезисной нелинейностью и релаксацией // Акуст. журн. 2005. Т. 51. № 2. С. 280–285.
25. *Nazarov V.E., Kolpakov A.B., Radostin A.V.* The investigation of amplitude-dependent internal friction effects in limestone // Forum Acusticum-2005, Budapest. P. L131-L136.

Simulation of the Dynamic Hystereses in Microinhomogeneous Media Characterized by Imperfect Elasticity and Relaxation

V. E. Nazarov and A. V. Radostin

Institute of Applied Physics, Russian Academy of Sciences, ul. Ul'yanova 46, Nizhni Novgorod, 603950 Russia

e-mail: nazarov@hydro.appl.sci-nnov.ru

Abstract—Results of numerical simulations and a comparative graphical analysis are presented for two basic hysteretic models (hysteresis of friction and break-away hysteresis) of microinhomogeneous media characterized by imperfect elasticity and relaxation under a dynamic deformation.