АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2006, том 52, № 4, с. 549–555

УДК 534.26

КРУГОВЫЕ И СПИРАЛЬНО-ВИНТОВЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ВОЛНЫ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ВОЛНОВОДА. СПИРАЛЬНЫЕ ВОЛНЫ В СВОБОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

© 2006 г. В. В. Тютекин

Акустический институт им. Н.Н. Андреева РАН
117036 Москва, ул. Шверника 4
E-mail: Tyutekin@akin.ru

Поступила в редакцию 06.09.05 г.

Описываются свойства круговых и спирально-винтовых волн цилиндрического волновода, являющихся проявлением непериодических (по углу) решений уравнения Гельмгольца. Для граничных условий Дирихле и Неймана определены дисперсионные характеристики и собственные функции этих волн, а также подробно описана их пространственная структура. Рассмотрены свойства спиральных волн в свободном пространстве с цилиндрической симметрией.

Нормальные волны акустических волноводов цилиндрической формы обычно представляют в виде периодических решений волнового уравнения, имеющих дискретный спектр по углу θ и зависящих от него ~$\cos n\theta$, $\sin n\theta$, где n – целое. Использование непериодических решений по углу в форме $\exp(i\nu\theta)$, где ν – действительное число, приводит к особым типам нормальных волн (круговым и винтовым); эти волны частично описаны в литературе: круговая – в работах [1–6] и винтовая – в работе [7] .

В настоящей статье непериодические решения использованы для построения нормальных волн акустического волновода цилиндрической формы. Исследуются указанные типы волн; показано, что помимо них в таком волноводе может существовать стоячая волна спирального типа.

Рассмотрим акустический волновод, заданный областью пространства $-\infty < z < \infty$, $0 \le r \le a$, $-\infty < \theta < \infty$, где a – радиус волновода, и в котором временная зависимость процессов задается множителем $\exp(-i\omega t)$ (в дальнейшем он всюду опускается). Звуковое давление p в таком волноводе, как известно, удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$(\Delta_1 + k_0^2)p = 0, \qquad (1)$$

где $k_0^2 = \dfrac{\omega^2}{c_0^2}$, k_0 и c_0 – волновое число и скорость звука в среде, соответственно, ω – круговая частота.

Здесь $\Delta_1 = \dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2}{\partial \theta^2}$.

В соответствии с изложенным выше, будем искать решение уравнения (1) в виде

$$p(r, \theta, z) = p_0(r)\exp(ikz + i\nu\theta), \qquad (2)$$

где k – как обычно, неизвестное волновое число для волн, распространяющихся вдоль оси волновода. Подставив решение (2) в уравнение (1), получим для функции $p_0(r)$ уравнение Бесселя

$$\frac{d^2p_0}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dp_0}{dr} + \left(k_0^2 - k^2 - \frac{\nu^2}{r^2}\right)p_0 = 0. \qquad (3)$$

Одно из решений (2) можно записать в виде

$$p(r, \theta, z) = J_\nu(\sqrt{k_0^2 - k^2}\,r)\exp(ikz + i\nu\theta). \qquad (4)$$

Другое решение, представляемое в виде

$$p(r, \theta, z) = J_\nu(\sqrt{k_0^2 - k^2}\,r)\exp(ikz - i\nu\theta)$$

соответствует распространению волны (по углу) в противоположном направлении и получается из (4) переменой направления отсчета угла. Это решение мы рассматривать не будем, поскольку в силу изотропности среды обе волны должны иметь одинаковые свойства.

Здесь в качестве решения уравнения (3) взята функция Бесселя, как ограниченная при $r = 0$.

Для нахождения нормальных волн волновода, как известно, необходимо задать также какие-либо краевые условия на его поверхности $r = a$. Для простоты изложения используем в отдельности два известных условия:

при $r = a$ $\quad p_0(r) = 0$ – условие Дирихле (5а)

$$\frac{dp_0(r)}{dr} = 0 \text{ – условие Неймана} \qquad (5б)$$

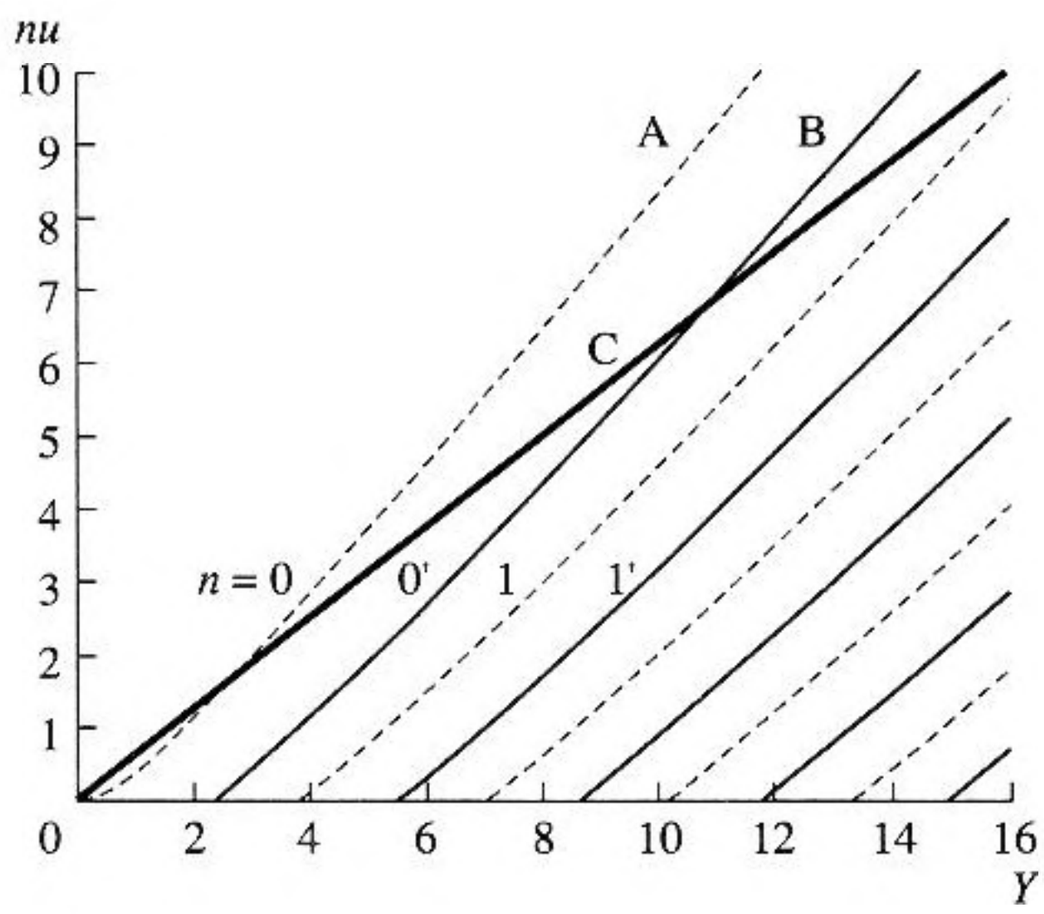

Рис. 1. Дисперсионные характеристики круговых волн A – для граничного условия Неймана, B – для граничного условия Дирихле, C – условие $\beta_{n\nu} = Y$.

Легко видеть, что решение (4) содержит два произвольных параметра k и ν. Использование условий (5а) или (5б) позволит определить только один из них, другой будет свободным параметром, порождающим сплошной спектр нормальных волн волновода.

Начнем рассмотрение с круговых волн цилиндрического волновода. Из равенства (4), положив $k = 0$, получим представление круговой волны в виде

$$p(r, \theta) = J_\nu(k_0 r)\exp(i\nu\theta). \tag{6}$$

Нетрудно видеть, что выражение (6) представляет плоскую волну, распространяющуюся по углу θ, с модулированной по фронту амплитудой (множитель $J_\nu(k_0 r)$). Величина ν играет здесь роль углового волнового числа, поскольку фаза волны $\varphi = \nu\theta$. Угловая скорость такой волны $c_\theta = \dfrac{\omega}{\nu}$ постоянна по всему сечению волновода.

Так же, как и в цитированных работах [1–7], можно ввести волновое число, связанное не с угловым, а с линейным расстоянием, пройденным волной. С этой целью представим фазу φ в виде

$$\varphi = \nu\theta = \frac{\nu}{r}r\theta = k_k l_r, \tag{7}$$

где $k_k = \dfrac{\nu}{r}$ – волновое число круговой волны, вектор которого направлен по касательной к окружности, $l_r = r\theta$ – путь волны по окружности радиуса r. Фазовая скорость круговой волны c_k определяется соотношением

$$c_k = \frac{\omega}{k_k} = \frac{\omega r}{\nu}. \tag{8}$$

Из выражения (8) видно, что сечение волновода для круговой волны представляет собой радиально-неоднородную среду (скорость пропорциональна радиусу) с постоянным градиентом $c_\theta = \dfrac{\omega}{\nu}$. Этот результат сопрягается с известным фактом, что в слоисто-неоднородной среде с постоянным градиентом скорости звука лучи представляют собой дуги окружности [8].

Можно утверждать, что круговые волны могут образовать систему нормальных волн. Для этого необходимо использовать краевые условия, в нашем случае – (5а) или (5б). В первом случае получим дисперсионное уравнение в виде

$$J_\nu(Y) = 0, \tag{9}$$

где $Y = k_0 a$ – безразмерная частота.

Как всякие нормальные волны волновода (в данном случае, кругового), круговые волны зарождаются при значении $\nu = 0$ (колебания синфазны по всей окружности $r = a$) и фазовая скорость $c_k = \infty$.

Критические частоты могут быть определены из уравнения (9):

$$J_0(Y) = 0. \tag{10}$$

Решение уравнения (10) имеет вид

$$Y_n = \beta_{n0}, \tag{11}$$

где Y_n – критическая частота, β_{n0} – n-ый корень функции Бесселя нулевого порядка ($J_0(\beta_{n0}) = 0$). При других частотах решение уравнения (9) есть

$$\beta_{n\nu} = Y, \tag{12}$$

где $\beta_{n\nu}$ – n-ый корень функции Бесселя порядка ν ($J_\nu(\beta_{n\nu}) = 0$). Таким образом, собственное значение ν_n при произвольной частоте может быть определено только через нули соответствующей функции Бесселя.

Для краевого условия (5б) дисперсионное уравнение для ν представляется в виде

$$YJ_{\nu+1}(Y) - \nu J_\nu(Y) = 0, \tag{13}$$

а для критических частот –

$$J_1(Y) = 0. \tag{14}$$

Решения уравнения (14) имеют вид

$$Y_n = \beta_{n1}, \tag{15}$$

где β_{n1} – n-ый корень функции Бесселя первого порядка ($J_1(\beta_{n1}) = 0$).

На рис. 1 представлены решения уравнений (9) и (13) в виде графиков зависимости $\nu_n(Y)$. Видны критические частоты и ветви нормальных волн – типа A с номерами $n = 0, 1, 2\ldots$ для условия Неймана и типа B с номерами $n = 0', 1', 2' \ldots$ для условия Дирихле. Обращает на себя внимание сущест-

вование ветви ($n = 0$), зарождающейся при нулевой частоте ($Y = 0$), что характерно для волноводов с "жесткой" стенкой.

Для каждого значения ν_n по формуле (8) могут быть определены фазовые скорости каждой из нормальных волн. В принятых выше обозначениях эти скорости в безразмерной форме можно представить в виде

$$\frac{c_{kn}}{c_0} = \frac{Y}{\nu_n}\frac{r}{a}.$$

Из этой формулы видно, что максимальное значение достигается на границе волновода; при этом, если $Y < \nu_n$, то $c_{kn} < c_0$, и наоборот.

На рис. 1 эта граница изображена в виде прямой С.

Собственные функции $p_n(r)$ для круговых волн могут быть получены из уравнения (6) с учетом соотношения (12)

$$p_n(r) = J_{\nu_n}\left(Y\frac{r}{a}\right). \tag{16}$$

На рис. 2а, б и 3а, б представлены величины $p_n(r)$ для $n = 0$ и $n = 1$ соответственно, при мягкой и жесткой границах волновода для некоторых значений Y и соответствующих им величин ν_n, взятых из рис. 1. Отметим, что, как и в любом волноводе, номер n соответствует числу нулей его собственной функции. Приведенные графики дают представление о концентрации звукового поля в зависимости от частоты и характера закрепления границы. Отметим, что, поскольку при $\nu > 0$ $J_\nu(0) = 0$, то все собственные функции $p_n(0) = 0$.

Исходя из свойств функций Бесселя, можно построить другую, ортогональную систему собственных функций для одного и того же индекса ν. Эти функции имеют вид

$$p_n(x) = J_\nu(\beta_{n\nu}x) \quad x = \frac{r}{a}. \tag{16'}$$

На основании [9] можно записать

$$\int_0^1 x J_\nu(\beta_{n\nu}x)J_\nu(\beta_{m\nu}x)dx = 0 \text{ при } m \neq n$$

$$= \frac{1}{2}[J_{\nu-1}(\beta_{n\nu})]^2 \text{ при } m = n.$$

Выше предполагалось, что как и в работах [2, 5, 6] волна кругового типа (6) рассматривается на многолистной поверхности Римана относительно угла θ. В физическом пространстве волновода она существует как сумма волн вида (6), в каждой из которых фаза отличается на величину 2π от

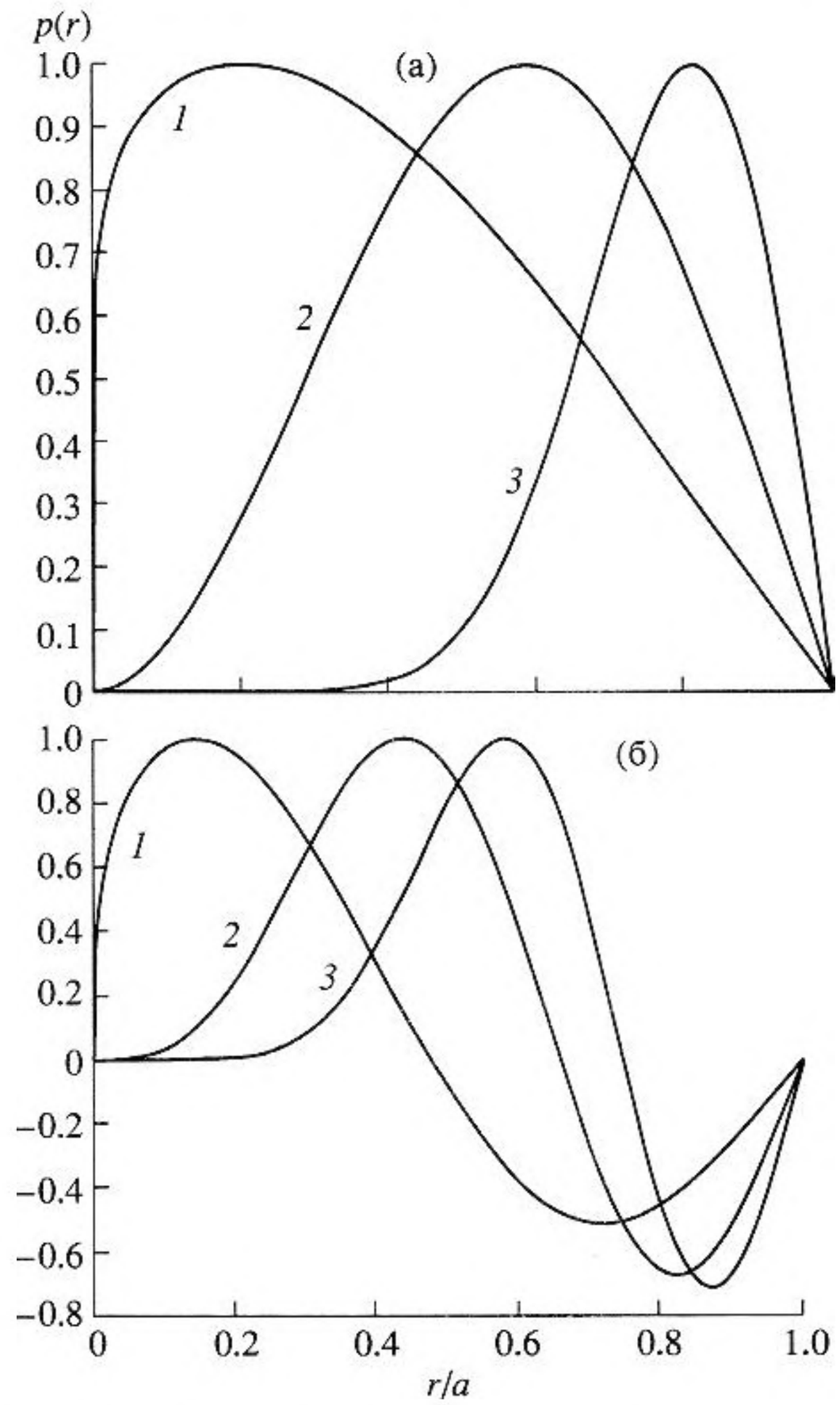

Рис. 2. Собственные функции для круговых волн.
а) – Условие Дирихле, $n = 0$.
1. $Y = 2.6$; *2*. $Y = 5$; *3*. $Y = 15.5$.
б) – для $n = 1$.
1. $Y = 6$; *2*. $Y = 10$; *3*. $Y = 15$.

"предыдущей" волны. Исходя из этого, вместо решения (6) можно записать

$$p(r, \theta) = J_\nu(k_0 r)\sum_{n=0}^{n=\infty}\exp[i\nu(\theta + 2n\pi)] = \tag{17}$$

$$= J_\nu(k_0 r)\exp(i\nu\theta)\sum_{n=0}^{n=\infty}\exp(i2n\pi\nu).$$

Вычисляя сумму геометрической прогрессии в (17), получим для поля круговой нормальной волны выражение

$$p(r, \theta) = \frac{i}{2\sin\pi\nu}J_\nu(k_0 r)\exp[i\nu(\theta - \pi)], \tag{18}$$

из которого видно, что ее амплитуда в зависимости от величины ν носит резонансный характер, а волновод играет роль объемного резонатора.

Переходя к следующему разделу статьи, напомним, что полученные выше результаты для круговых волн относятся к случаю $k = 0$. При $k \neq 0$ решение дается формулой (4). Если ν – заданная величина, как в случае периодических решений ($\nu = n$), то величина k определяется из граничного условия. Например, для условия (5а) дисперсионное уравнение для величины $y = ka$ имеет вид

$$J_\nu(\sqrt{Y^2 - y^2}) = 0. \tag{19}$$

Решения этого уравнения даются формулой

$$y_n = \sqrt{Y^2 - \beta_{n\nu}^2} \tag{20}$$

или в другой записи

$$k_n = \sqrt{k_0^2 - \frac{\beta_{n\nu}^2}{a^2}},$$

где величины $\beta_{n\nu}$ были введены ранее.

Ортогональные собственные функции в этом случае имеют тот же вид, что и ранее (формула (16')).

Для условия (5б) дисперсионное уравнение имеет вид

$$(\sqrt{Y^2 - y^2})J_{\nu+1}(\sqrt{Y^2 - y^2}) - \nu J_\nu(\sqrt{Y^2 - y^2}) = 0. \tag{21}$$

Таким образом, при заранее выбранной величине ν формулы (20) и (21) полностью описывают дисперсионные свойства нормальных волн волновода с дискретным спектром. Если же в решении (4) величины ν и k являются произвольными, то оно может рассматриваться как "свободная" волна волновода.

Следуя далее работе [7], введем в рассмотрение волновое число $\mathbf{k}_B$, определяемое соотношением

$$\mathbf{k}_B = \operatorname{grad}\varphi = k\mathbf{z} + \frac{\nu}{r}\boldsymbol{\theta}$$

и связанное с волновыми числами k и k_k соотношениями

$$k_B^2 = k^2 + k_k^2 = k^2 + \frac{\nu^2}{r^2}; \qquad k = k_B\cos\alpha; \quad k_k = k_B\sin\alpha, \tag{22}$$

где α – угол между вектором k_B и осью z. Вектор $\mathbf{k}_B$, так же, как векторы $\mathbf{k}_k$ и $\mathbf{k}$, лежит в касательной плоскости к каждой цилиндрической поверхности $r = \text{const}$. Поскольку величина k_k зависит от радиуса, то и угол $\alpha = \alpha(r)$:

$$\sin\alpha = \frac{\nu}{k_B r} \text{ или } \operatorname{tg}\alpha = \frac{\nu}{kr}. \tag{23}$$

Таким образом, по каждой такой поверхности под углом α к оси волновода распространяется винтовая волна с волновым числом k_B, подобно винтовым волнам на поверхности цилиндрической оболочки, рассмотренным в работе [7].

Нетрудно видеть, что волновой фронт винтовой волны, определяемый соотношением $\varphi = kz + \frac{\nu}{r}\theta = \text{const}$ перпендикулярен волновому вектору $\mathbf{k}_B$ и также образует винтовую линию.

Формулу (23) удобно переписать в виде

$$\sin^2\alpha = \frac{\nu^2}{k^2r^2 + \nu^2}, \tag{24}$$

из которого очевидно, что при $r = 0$, $\sin\alpha = 1$, т.е. $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Поэтому направление винтовой волны в начале координат перпендикулярно оси волновода (как у круговой волны), а при увеличении r угол α уменьшается и достигает минимального значения на поверхности волновода ($\alpha_0 = \operatorname{arctg}\frac{\nu}{ka}$). На основании этого свойства винтовых волн их совокупность (во всем объеме волновода) можно трактовать как стоячую спиральную волну, поскольку ее амплитуда зависит от r, но отсутствует изменение фазы в радиальном направлении.

Из формул (23) нетрудно получить скорость изменения угла α в зависимости от координаты r:

$$\frac{d\alpha}{dr} = -\frac{k}{\nu}\sin\alpha. \tag{25}$$

Формула (25) подтверждает монотонное уменьшение угла α и уменьшение скорости его изменения от оси до поверхности волновода.

Для перехода к свойствам нормальных винтовых волн необходимо в формулу (24) вместо величины k подставить решение уравнений (19) и (21). Например, используя выражения (20) и (24), получим

$$\sin^2\alpha_n = \frac{\nu^2}{(Y^2 - \beta_{n\nu}^2)\bar{r}^2 + \nu^2},$$

где $\bar{r} = \frac{r}{a}$ – безразмерная величина радиальной координаты. Поскольку зарождение n-ой нормальной винтовой волны происходит при $y_n = 0$, то критические частоты спирально-винтовых и круговых волн совпадают, и угол α_n также равен 0.5π.

Более того, можно сказать, что спирально-винтовые волны зарождаются в виде круговых волн. При увеличении номера волны ($\beta_{n\nu}$ возрастает) величина α_n для одной и той же частоты также возрастает. Результаты соответствующих расчетов приведены ниже.

Выражение для волнового числа k_{Bn} нормальной винтовой волны можно получить, подставив в формулу (22) значение k_n из формулы (20)

$$k_{Bn} = \sqrt{k_0^2 + \gamma^2(\nu, r)}. \qquad (26)$$

Здесь для краткости введено обозначение $\gamma^2(\nu, r) = \frac{\nu^2}{r^2} - \frac{\beta_{n\nu}^2}{a^2}$.

На основании формулы (26) определим фазовую C_{Fn} и групповую C_{Gn} скорости этой волны

$$C_{Fn} = \frac{\omega}{k_{Bn}} = \frac{\omega}{\sqrt{k_0^2 + \gamma^2(\nu, r)}}, \qquad (27)$$

$$C_{Gn} = \frac{d\omega}{dk_{Bn}} = \frac{k_{Bn}}{k_0} c_0 = \frac{c_0^2}{\omega}\sqrt{k_0^2 + \gamma^2(\nu, r)}. \qquad (28)$$

Из сравнения этих последних формул видно, что хотя обе скорости зависят от величины r, они связаны обычным для волноводов соотношением

$$C_{Fn} C_{Gn} = c_0^2. \qquad (28')$$

Из формул (27) и (28) видно, что для $r = a$ и $\nu = \beta_{n\nu}$ имеет место соотношение $C_{Fn} = C_{Gn} = c_0$, что совпадает с данными рис. 1.

Дисперсионное уравнение (19) для свободной волны спирально-винтового типа можно записать, используя в качестве параметра угол "выхода" волны на поверхность волновода α_0, имеющий ясный физический смысл. С этой целью введем новую неизвестную величину $X = \frac{k_B}{k_0}$, представляющую безразмерное волновое число этих волн. В этом случае уравнение (19) после несложных преобразований можно записать в виде

$$J_\nu(Z) = 0, \qquad (29)$$

где $\nu = XY\sin\alpha_0$ и $Z = Y\sqrt{1 - (X\cos\alpha_0)^2}$.

Аналогичным образом можно преобразовать уравнение (21), используя вновь введенные обозначения.

$$ZJ_{\nu+1}(Z) - \nu J_\nu(Z) = 0. \qquad (30)$$

Результаты расчетов величины X в зависимости от безразмерной частоты Y для некоторых значений угла α_0 представлены на рис. 4а и 4б для уравнений (29) и (30), соответственно. Видно, что дисперсионные характеристики представляют собой пучки кривых, выходящих из точек горизонтальной оси, задаваемых выражениями (11) и (15) и соответствующих критическим частотам круговых волн. (Для простоты взято всего по два пучка для каждого случая.) Кривые в каждом пучке соответствуют различным углам α_0 выхода волны на границу волновода; граничные кривые каждого пучка соответствуют значениям $\alpha_0 = 0°$ и $\alpha_0 = 90°$. Промежуточные значения углов указаны в подписях к рисункам.

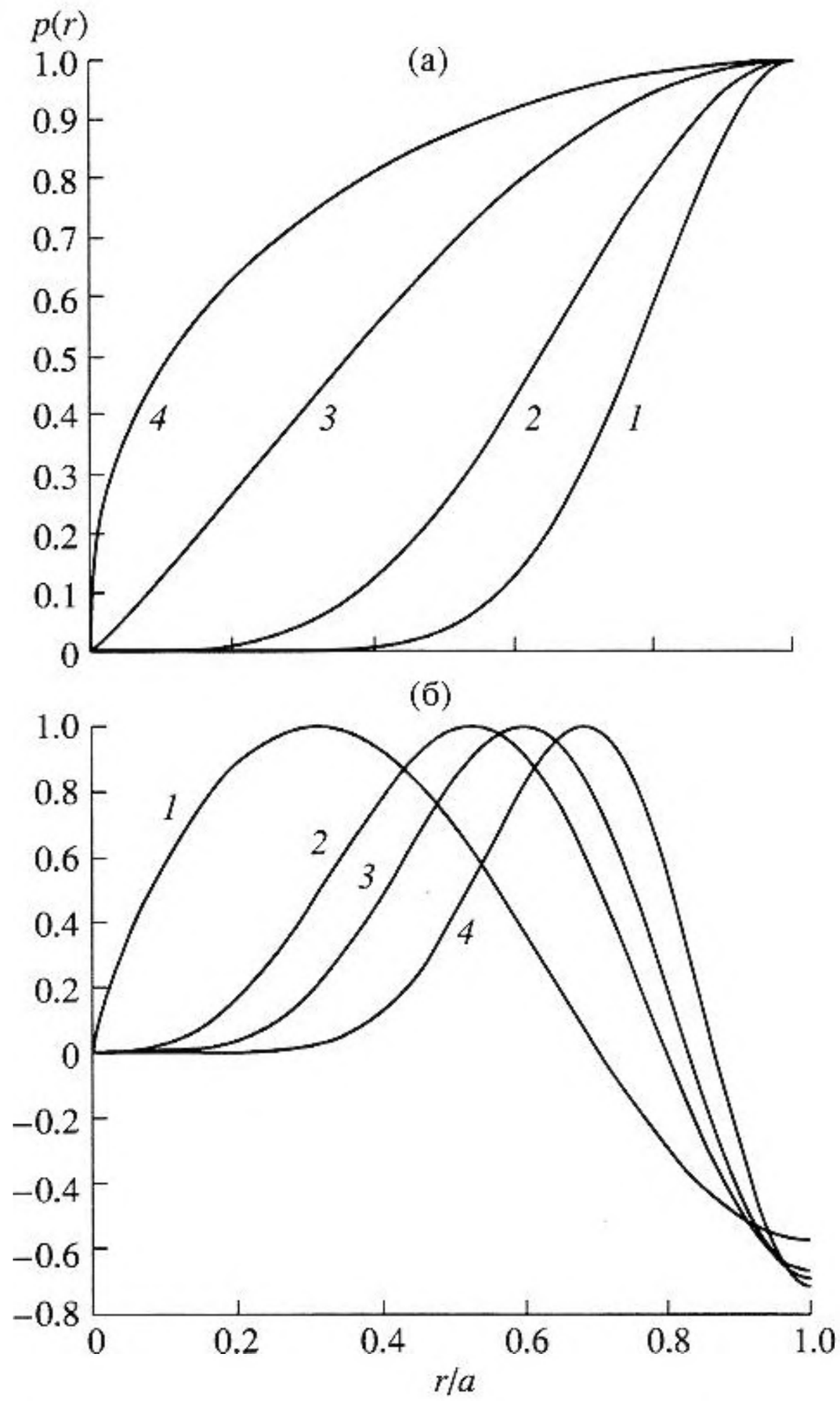

Рис. 3. Собственные функции для круговых волн.
а) – Условие Неймана, $n = 0$.
1. $Y = 1$; *2*. $Y = 2$; *3*. $Y = 5$; *4*. $Y = 10$.
б) – для $n = 1$.
1. $Y = 5$; *2*. $Y = 8$; *3*. $Y = 10$; *4*. $Y = 14$.

В заключение отметим, что волны, исследованные в этой части работы, можно рассматривать как волны Бриллюена, присущие волноводу цилиндрической формы. Это же относится и к винтовым волнам цилиндрической оболочки [7].

Основываясь на вышеизложенном, нетрудно получить представление о спиральных волнах в свободном пространстве. Последние можно реали-

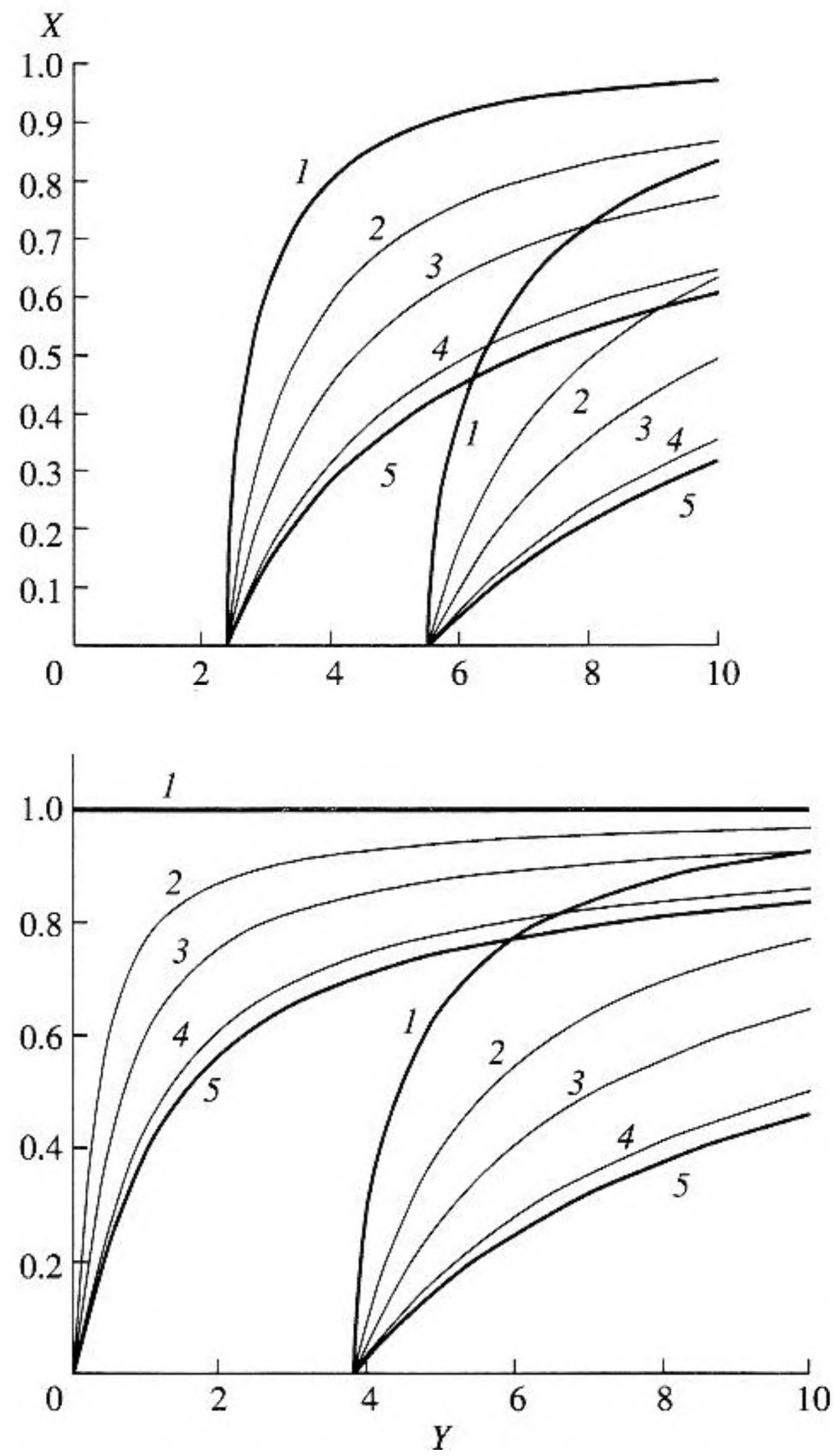

Рис. 4. Дисперсионные характеристики спирально-винтовых волн.

а) – условие Дирихле; б) – условие Неймана.

1. $\alpha_0 = 0°$, *2*. $\alpha_0 = 15°$, *3*. $\alpha_0 = 30°$, *4*. $\alpha_0 = 60°$, *5*. $\alpha_0 = 90°$.

зовать, рассматривая область пространства $r > a$ вокруг некоторого цилиндрического тела радиуса a.

Решение уравнения (1) можно выбрать в виде расходящихся цилиндрических волн

$$p(r, \theta, z) = H_\nu^{(1)}(k_0 r \sin\beta)\exp(ik_0 z\cos\beta + i\nu\theta), \quad (31)$$

где $H_\nu^{(1)}()$ – функция Ганкеля первого рода, β – произвольный угол. При условии $k_0 r \sin\beta \gg 1$ выражение (31), с точностью до несущественных множителей, можно записать в виде

$$p(r, \theta, z) = \frac{1}{\sqrt{r}}\exp(ik_0 z\cos\beta + ik_0 r\sin\beta + i\nu\theta). \quad (32)$$

Формула (32) описывает спиральную волну с волновым вектором

$$\mathbf{k}_{cn} = k_0\left(\cos\beta\mathbf{z} + \sin\beta\mathbf{r} + \frac{\nu}{k_0 r}\boldsymbol{\theta}\right), \quad (33)$$

модуль которого $k_{cn} = k_0\sqrt{1 + \left(\frac{\nu}{k_0 r}\right)^2}$ не зависит от угла β; амплитуда волны убывает по цилиндрическому закону.

Анализ формул (32) и (33) показывает, что при отсутствии угловой составляющей движения (при $\nu = 0$), волновой фронт волны (32) является конической поверхностью, равномерно движущейся вдоль оси z со скоростью $c = c_0/\cos\beta$ и составляющей с ней угол β. При $\nu \neq 0$ этот волновой фронт вращается вокруг оси z со скоростью круговой волны (8), возрастающей с увеличением расстояния от оси z. Таким образом, можно констатировать, что возникновение спиральных волн обусловлено зависимостью скорости угловой составляющей движения от координаты r. При $r \longrightarrow \infty$ спиральная волна снова превращается в коническую, поскольку волновой фронт имеет синфазный характер.

Фазовая и групповая скорости спиральной волны выражаются формулами (27) и (28) (если в них формально положить $\beta_{n\nu} = 0$), а соотношение между ними формулой (28').

В заключение отметим, что в рамках настоящей работы не исследовались вопросы возбуждения рассмотренных типов волн. Однако предварительно можно предположить, что источниками таких волн могут служить технические устройства "вентиляторного" типа – вентиляторы, турбины, буровые устройства и др. Искусственное возбуждение подобных волн (например, в волноводе) можно осуществить излучателями с характеристиками направленности, имеющими заведомую несимметрию по угловой координате; например, излучателем с кардиоидной характеристикой, ориентированной под углом к оси волновода. Можно предположить, что в этом случае будут возбуждаться как обычные волны (с дискретным спектром и целой величиной ν), так и волны спирально-винтового типа со сплошным спектром значений ν.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бреховских Л.М.* О поверхностных волнах в твердом теле, удерживаемых кривизной границы // Акуст. журн. 1960. Т. 13. № 4. С. 541–554.
2. *Викторов И.А.* Звуковые поверхностные волны в твердых телах. М.: Наука, 1981. С. 215.

3. *Vboulis G., Paipetis S.A., Theocaris P.S.* Circumferental waves around cylindrical inhomogeneties in plane viscoelastic solid systems // J. Sound Vibrat. 1974. V. 35. № 4. P. 521–533.

4. *Шендеров Е.Л.* Излучение и рассеяние звука. Л.: Судостроение, 1989. С. 301.

5. *Тютекин В.В.* Волноводные свойства плоской кольцевой пластины. I. Изгибные волны // Акуст. журн. 2003. Т. 49. № 6. С. 843–851.

6. *Тютекин В.В.* Нормальные волны кругового типа в полом упругом цилиндре // Акуст. журн. 2004. Т. 50. № 6. С. 855–864.

7. *Тютекин В.В.* О винтовых волнах упругой цилиндрической оболочки // Акуст. журн. 2004. Т. 50. № 3. С. 331–336.

8. *Бреховских Л.М.* Волны в слоистых средах. М.: Изд-во АН СССР, 1957. С. 502.

9. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Гос. Изд-во физ.-мат. литературы. 1962. С. 1100.

Circumferential and Helical Normal Waves of a Cylindrical Waveguide. Helical Waves in a Free Space

V. V. Tyutekin

Andreev Acoustics Institute, Russian Academy of Sciences, ul. Shvernika 4, Moscow, 117036 Russia

Abstract—Properties of circumferential and helical normal waves of a cylindrical waveguide, which appear as aperiodic (in angle) solutions to the Helmholtz equation, are considered. The dispersion characteristics and eigenfunctions of these waves are determined for the Dirichlet and Neumann boundary conditions, and the spatial structure of these waves is described in detail. The properties of helical waves in a free space with cylindrical symmetry are considered.