АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2006, том 52, № 6, с. 791–798

УДК 534:26

# АНАЛИЗ ПОЛЯ ДИФРАКЦИИ НА ЦИЛИНДРЕ С ПЕРФОРИРОВАННЫМ ПОКРЫТИЕМ

© 2006 г. **В. П. Иванов**

*Институт машиноведения РАН*

*119334 Москва, ул. Бардина 4*

*E-mail: Kosarev@imash.ru*

Поступила в редакцию 22.06.05 г.

Исследованы прямая и обратная задачи дифракции плоской волны на круговом цилиндре, оснащенном перфорированным покрытием. Показано, что в прямой задаче поле дифракции на цилиндре с покрытием более интенсивно, чем поле на гладком цилиндре. В обратной задаче выбраны параметры среды резонаторов перфорированного покрытия, обеспечивающие заданный уровень гашения поля дифракции на цилиндре.

PACS: 43.20.El

Известно, что механизм гашения волн путем интерференции может быть реализован не только активным, но и пассивным способом. В качестве примера можно привести предложенное С.М. Ржевкиным перфорированное многослойное покрытие [1], расположенное на границе полупространства, а также резонаторы Гельмгольца, пристыкованные к волноводу [2, 3], поле излучения которых гасит падающую поршневую моду волновода. Заметим, что активный способ гашения полей при решении проблемы ненаблюдаемости, как обратной задачи дифракции, реализуется как задача управления существенно нестационарным полем, в которой управляющее устройство системы управления полем должно иметь высокое быстродействие, поскольку для реализации задачи гашения суммарное время процессов измерения поля, обработки полученной информации и передачи ее на вспомогательные излучатели должно быть много меньше времени прохождения стороннего сигнала по среде от приемника к вспомогательному излучателю. Пассивный способ гашения поля в волноводе реализует эту задачу автоматически, правда, только в малой окрестности резонансной частоты колебаний объема резонатора. В упомянутых выше задачах пассивного интерференционного гашения исследуемые первичные и вспомогательные вторичные поля представляли собой плоские волны. Возникает вопрос, можно ли пассивный интерференционный механизм гашения распространить на низкочастотные волны произвольного вида, в частности, на гашение поля дифракции плоской волны на круговом цилиндре, и будет ли сохраняться автоматизм управления полем.

## 1. ПРЯМАЯ ЗАДАЧА

Пусть на бесконечный круговой цилиндр радиуса $R_1$ с перфорированным покрытием перпендикулярно его оси падает плоская волна $U_p = A_p\exp(ikr\cos(\varphi - \varphi_p)$ где $(r, \varphi)$ – полярные координаты в плоскости, перпендикулярной оси цилиндра, с началом на оси, $k_0 = \omega/c_0$ – волновое число, $\omega$ – круговая частота, $c_0$ – скорость звука в среде, $A_p$ – амплитуда, $\varphi_p$ – направление распространения плоской волны. С целью упрощения обозначений в силу симметрии задачи будем отсчитывать угол $\varphi$ от направления распространения плоской волны, так что $\varphi_p = 0$. Перфорированное покрытие представляет собой полый цилиндр наружного радиуса $R_2$ и внутреннего радиуса $R_1$. Цилиндрический слой $R_1 \le r \le R_2$ разделен на $N$ секторов $\varphi_{n-1}^0 \le \varphi \le \varphi_n^0$, $\varphi_n^0 = 2\pi n/N$, $n = 1, \ldots N$, $\varphi_0^0 = 0$, жесткими перегородками. Обозначим через $D_n$ область $D_n = \{r, \varphi\colon R_1 < r < R_2,\ \varphi_{n-1}^0 < \varphi < \varphi_n^0, n = 1, \ldots, N\}$. Сначала будем считать, что области $D_n$ заполнены той же средой, которая заполняет внешность цилиндра радиуса $R_2$ (область $D_0$). Области $D_n$ связаны с областью $D_0$ отверстиями

$$S_n = \{r, \varphi\colon r = R_2, -\delta\varphi_n + \frac{\varphi_{n-1}^0 + \varphi_n^0}{2} < \varphi < \delta\varphi_n + \frac{\varphi_{n-1}^0 + \varphi_n^0}{2}, \delta\varphi \ll \pi,$$
$$n = 1, \ldots, N.$$

Обозначим через $U_0$ поле $U$ в области $D_0$ и через $U_n$ поле $U$ в областях $D_n$. В областях $D_0$ и $D_n$ поле $U$ удовлетворяет уравнению

$$(\Delta + k^2)U_n = 0, \quad k = \omega/c_0, \quad n = 0, 1, \ldots, N \quad (1)$$

краевым условиям

$$\partial U_n/\partial n|_{\Gamma_n} = 0, \quad \partial U_0/\partial n|_{r = R_2} = 0 \quad (2)$$

вне отверстий $S_n$, $n = 1, \ldots, N$, $\Gamma_n$ – граница области $D_n$ отверстий $S_n$. На описанное выше устройство падает плоская волна $U_p$. Обозначим через $U_\partial$ дифракционную часть поля $U_0 = U_p + U_\partial$. Для поля $U_\partial$ должно выполняться условие излучения или погашаемости, на острых кромках – условие на ребре, а на отверстиях $S_n$ – условия сшивания

$$U_n = U_0, \quad \partial U_n/\partial r = \partial U_0/\partial r \text{ на } S_n, \quad n = 1, \ldots, N. \quad (3)$$

Ищется классическое вне малых окрестностей острых кромок решение задачи. Введем новые переменные $\varphi_n = \varphi - (\varphi_n^0 - \varphi_{n-1}^0)/2$, $n = 1, \ldots, N$. Пусть $G_n$ – функция Грина кругового сектора с абсолютно жесткими стенками без отверстия $S_n$, $G_0$ – функция Грина внешности абсолютно жесткого цилиндра радиуса $R_2$ без отверстий $S_q$, $q = 1, \ldots, N$. Применим формулы Грина для функций $U_n$ и $G_n$ в областях $D_n$ и функций $U_\partial$ и $G_0$ в области $D_0$. Это преобразование справедливо для классического решения в силу существования правильной нормальной производной вне малых окрестностей острых кромок. В результате получим представления для полей $U_n$ и $U_\partial$ в соответствующих областях

$$U_n = \int_{-\delta\varphi_n}^{\delta\varphi_n} \frac{\partial U_n}{\partial n} G_n(R_2, \psi_n, r, \varphi) R_2 d\varphi_n, \quad (4)$$

$$U_\partial = -\sum_{n=1}^{N} \frac{\partial U_\partial}{\partial n} G_0(R_2, \psi_n, r, \varphi) R_2 d\varphi_n +$$

$$+ \sum_{n=1}^{N} \left( \int_{\varphi_{n-1}^0}^{\Phi_{n-1}} + \int_{\Phi_{n+1}}^{\varphi_n^0} \right) ikA_p \cos\varphi' \exp(ikR_2\cos\varphi') \times$$

$$\times G_0(R_2, \varphi', r, \varphi) R_2 d\varphi' =$$

$$= -\sum_{n=1}^{N} \int_{-\partial\varphi_n}^{\partial\varphi_n} \frac{\partial U_n}{\partial n} G_0(R_2, \psi_n, r, \varphi) +$$

$$+ ikA_p \int_0^{2\pi} \cos\varphi' \exp(ikR_2\cos\varphi') \times \quad (5)$$

$$\times G_0(R_2, \varphi', r, \varphi) d\varphi' [1 + O(\delta\varphi)],$$

$$\delta\varphi = \underbrace{\max}_{n} \delta\varphi_n, \quad \psi_n = \varphi_n + \frac{\varphi_n^0 + \varphi_{n-1}^0}{2},$$

$$\Phi_{n-1} = \frac{\varphi_n^0 + \varphi_{n-1}^0}{2} - \delta\varphi_n, \quad \Phi_{n+1} = \frac{\varphi_n^0 + \varphi_{n-1}^0}{2} + \delta\varphi_n.$$

В силу малости отверстий второе слагаемое в правой части (5) в первом приближении есть интеграл от следа плоской волны на цилиндре без отверстий, свернутого с функцией Грина. Обозначим через $\mu_n$ распределение нормальной скорости на отверстии $S_n$ $\mu_n = \partial U_n/\partial r = \partial U_0/\partial r$ в силу условия сшивания. Потребуем выполнения условий сшивания по давлению, используя представления (4), (5)

$$\int_{-\delta\varphi_n}^{\partial\varphi_n} \mu_q [G_q(R_2, \psi_q, R_2, \psi_q') +$$

$$+ G_0(R_2, \psi_q, R_2, \psi_q')] R_2 d\varphi_q' +$$

$$+ \sum_{n=1(n\neq q)}^{N} \int_{-\delta\varphi_n}^{\delta\varphi_n} \mu_n G_0(R_2, \psi_n, R_2, \psi_q') R_2 d\varphi_n =$$

$$= A_p \exp(ikR_2\cos\psi_q) + ikA_p \sum_{n=1}^{N} \cos\psi_n \times \quad (6)$$

$$\times \exp(ikR_2\cos\psi_n) G_0(R_2, \psi_n, R_2, \psi_q) R_2 d\varphi_n +$$

$$+ ikA_p \int_0^{2\pi} \cos\psi' \exp(ikR_2\cos\psi') \times$$

$$\times G_0(R_2, \psi', R_2, \psi_q) R_2 d\psi',$$

$$\psi_q' = \varphi_q' + \frac{\varphi_q^0 + \varphi_{q-1}^0}{2}, \quad q = 1, \ldots, N.$$

Система (6) есть система интегральных уравнений первого рода для вычисления плотностей $\mu_q$ в предположении, что параметры среды и падающей плоской волны известны. В работе [4] показано, что главный член асимптотики при $\delta\varphi_n \ll \pi$ решения системы (6) достаточно хорошо описывает поведение полей $U_0$ и $U_n$ в областях их определения. Будем искать главный член асимптотики решения системы (6), удовлетворяющий условию на ребре, в виде $\mu_n = a_n/\sqrt{(\delta\varphi_n)^2 - \varphi_n^2}$, $n = 1, \ldots, N$. Здесь $a_n = \text{const}$ – амплитуда нормальной скорости среды в горловине $S_n$. Проведем замену $\varphi_n = \delta\varphi_n \cos\xi_n$. В результате получим следующие соотношения:

$$\int_0^{\pi} a_q[G_q(R_2, \alpha_q, R_2, \alpha_q') + G_0(R_2, \xi_q, R_2, \xi_q')]R_2 d\xi_q +$$

$$+ \sum_{n=1(n\neq q)}^{N} \int_0^{\pi} a_n G_0(R_2, \zeta_q, R_2, \zeta_n')R_2 d\xi_n =$$

$$= A_p \exp(ikR_2\cos\xi_q') +$$

$$+ ikA_p \sum_{n=1}^{N} \int_0^{\pi} \cos\xi_n \exp(ikR_2\cos\xi_n)\delta\varphi_n \times$$

$$\times \sin\xi_n G_0(R_2, \zeta_n, R_2, \zeta_n')R_2 d\xi_n +$$

$$+ ikA_p \int_0^{2\pi} \cos\psi' \exp(ikR_2\cos\psi') \times \tag{7}$$

$$\times G_0(R_2, \psi', R_2, \xi_q)R_2 d\psi', \quad q = 1, \ldots, N,$$

$$\alpha_n = \delta\varphi_n\cos\xi_n + \frac{\varphi_n^0 - \varphi_{n-1}^0}{2},$$

$$\alpha_n' = \delta\varphi_n\cos\xi_n' + \frac{\varphi_n^0 - \varphi_{n-1}^0}{2},$$

$$\zeta_n = \delta\varphi_n\cos\xi_n + \frac{\varphi_n^0 + \varphi_{n-1}^0}{2},$$

$$\zeta_n' = \delta\varphi_n\cos\xi_n' + \frac{\varphi_n^0 + \varphi_{n-1}^0}{2}.$$

Построим функции Грина $G_0$ и $G_n$ для уравнения (1).

$$G_n(R_2, \varphi_n, R_2, \varphi_n') = \frac{2}{kR_2(\varphi_n^0 - \varphi_{n-1}^0)} \times$$

$$\times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon_m} \cos\left(\beta_m\left(\varphi_n - \frac{\varphi_n^0 - \varphi_{n-1}^0}{2}\right)\right) \times$$

$$\times \cos\left(\beta_m\left(\varphi_n - \frac{\varphi_n^0 - \varphi_{n-1}^0}{2}\right)\right) \times$$

$$\times \frac{J_{\beta_m}(kR_2)N_{\beta_m}'(kR_1) - J_{\beta_m}'(kR_1)N_{\beta_m}(kR_2)}{J_{\beta_m}'(kR_2)N_{\beta_m}'(kR_1) - J_{\beta_m}'(kR_1)N_{\beta_m}'(kR_2)}, \tag{8}$$

$$\beta_m = \frac{\pi m}{\varphi_n^0 - \varphi_{n-1}^0},$$

$$G_0(R_2, \varphi_n, R_2, \varphi_n') =$$

$$= \frac{1}{\pi k R_2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon_m} \frac{H_m^{(1)}(kR_2)}{H_m'^{(1)}(kR_2)} \cos(m(\varphi - \varphi')),$$

$$\varepsilon_m = \begin{cases} 1 & \text{при } m \neq 0 \\ 2 & \text{при } m = 0, \end{cases}$$

$J_n(x)$, $N_n(x)$, $H_n^{(1)}(x)$ – функции Бесселя, Неймана и Ханкеля, $Z_n'$ – производная цилиндрических функций $Z_n$ по аргументу.

Если вычислить интегралы, стоящие в левой и правой части соотношений (7) с точностью до $O(\delta\varphi)$, то получим систему алгебраических уравнений для вычисления амплитуд $a_n$ вида

$$\sum_{n=1}^{N} a_n A_{qn} = B_q, \quad q = 1, \ldots, N. \tag{9}$$

Введем для удобства вычислений обозначения $a_n R_2 = a_n'$ и $A_{nq}/R_2 = A_{nq}'$ и уберем штрихи с целью упрощения обозначений. Матричные коэффициенты и правая часть вычисляются по формулам:

$$A_{nn} = A_{nn1} + A_{nn2},$$

$$A_{nn1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon_m k R_2} \frac{H_m^{(1)}(kR_2)}{H_m'^{(1)}(kR_2)} J_0(m\delta\varphi),$$

$$A_{nn2} = \frac{1}{kR_2} \times$$

$$\times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon_m} \frac{J_{mN}(kR_2)N_{mN}'(kR_1) - J_{mN}'(kR_1)N_{mN}(kR_2)}{J_{mN}'(kR_2)N_{mN}'(kR_1) - J_{mN}'(kR_1)N_{mN}'(kR_2)} \times \tag{10}$$

$$\times J_0(mN\delta\varphi_n),$$

$$A_{nq} = \frac{1}{kR_2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon_m} \frac{H_m^{(1)}(kR_2)}{H_m'^{(1)}(kR_2)} \cos\left(m\frac{2\pi(n-q)}{N}\right),$$

$$n \neq q, \quad n, q = 1, \ldots, N.$$

$$B_q = B_{1q} + B_{2q} + A_p \exp\left(ikR_2\cos\frac{\pi(2q-1)}{N}\right),$$

$$B_{1q} = iA_p \sum_{n=1(n\neq q)}^{N} \frac{2\delta\varphi_q}{\pi} \cos\frac{\pi(2n-1)}{N} \times$$

$$\times \exp\left(ikR_2\cos\frac{\pi(2n-1)}{N}\right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{H_m^{(1)}(kR_2)}{\varepsilon_m H_m'^{(1)}(kR_2)} \times$$

$$\times \cos\frac{2\pi m(n-q)}{N} + \frac{2iA_p}{\pi} \cos\frac{\pi(2q-1)}{N} \times$$

$$\times \exp\left(ikR_2\cos\frac{\pi(2q-1)}{N}\right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{H_m^{(1)}(kR_2)}{\varepsilon_m H_m'^{(1)}(kR_2)} \frac{\sin(m\delta\varphi_q)}{m},$$

**Таблица 1**

| $kR_2$ | $2M+1 \backslash i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2.0 | 7 | −5.24 | −5.85 | −8.13 | −7.64 | −4.17 | −3.73 | −4.19 | −3.83 | −3.45 | −3.30 |
| | 11 | −5.29 | −5.96 | −8.16 | −7.46 | −4.22 | −3.82 | −4.03 | −3.74 | −3.52 | −3.45 |
| | 15 | −5.32 | −5.99 | −8.18 | −7.48 | −4.22 | −3.83 | −4.04 | −3.76 | −3.53 | −3.46 |
| | 19 | −5.31 | −5.99 | −8.17 | −7.47 | −4.21 | −3.82 | −4.04 | −3.75 | −3.53 | −3.46 |
| 3.0 | 7 | −6.99 | −7.39 | −10.65 | −9.67 | −8.83 | −8.46 | −8.52 | −6.71 | −6.17 | −6.36 |
| | 11 | −7.57 | −8.26 | −10.32 | −10.48 | −11.16 | −7.54 | −7.21 | 7.06 | −6.64 | −6.51 |
| | 15 | −7.67 | −8.37 | −10.32 | −10.54 | −11.16 | −7.48 | −7.21 | −7.13 | −6.70 | −6.54 |
| | 19 | −7.62 | −8.37 | −10.30 | −10.50 | −11.14 | −7.57 | −7.19 | −7.11 | −6.68 | −6.52 |
| 4.0 | 7 | −7.03 | −6.41 | −26.51 | −12.55 | −3.69 | −13.14 | −9.37 | −6.18 | −6.95 | −5.59 |
| | 11 | −8.16 | −8.57 | −28.38 | −19.76 | −8.43 | −8.68 | −8.42 | −6.61 | −5.58 | −5.33 |
| | 15 | −8.31 | −8.63 | −28.54 | −19.51 | −7.64 | −8.62 | −8.04 | −7.00 | −5.61 | −4.90 |
| | 19 | −8.35 | −8.67 | −28.57 | −19.47 | −7.55 | −8.66 | −8.07 | −7.02 | −5.59 | −4.90 |

$$B_{2q} = 2A_p \sum_{m=0}^{\infty} i^m \frac{H_m^{(1)}(kR_2)}{\varepsilon_m H_m'^{(1)}(kR_2)} J_m'(kR_2) \cos\frac{\pi m(2q-1)}{N},$$

$$q = 1, \ldots, N.$$

Далее удобно положить $N = 2M + 1$. Асимптотический анализ сумм, стоящих в правых частях представлений (10) для матричных коэффициентов $A_{nq}$, показывает, что при вещественных $k$ в диапазоне изменения параметров $1.0 \le kR_1 < kR_2 \le 10.0$ для неособых режимов, которые определим ниже, коэффициенты $A_{nn1}$, $A_{nn2}$ и $A_{nq}$ по порядку равны $\mathrm{Re}A_{nn1} = C_1 \ln(1/\delta\varphi)$, $\mathrm{Jm}A_{nn1} = O(1)$, $A_{nn2} = C_2 \ln(1/\delta\varphi)$, $A_{nq} = O(1)$, $n \ne q$, $n, q = 1, \ldots, 2M + 1$, $\delta\varphi \ll \pi$, $B_q = O(1)$ при $\delta\varphi \ll \pi$. Вычисления коэффициентов $A_{nn1}$ и $A_{nn2}$ при $7 \le 2M + 1 \le 19$, $1.0 \le kR_2 \le 10.0$ и $\delta\varphi = 10^{-4}$ показывают, что $\mathrm{Re}A_{nn1} < 0$, $\mathrm{Jm}A_{nn1} < 0$, коэффициент $A_{nn2}$ меняет знак, что определяет до и зарезонансный режим колебаний. Из приведенных оценок следует, что при одинаковых знаках $\mathrm{Re}A_{nn1}$ и $A_{nn2}$ матрица системы (9) имеет диагональное преобладание и главный член асимптотики решения системы (9) имеет вид

$$a_q = B_q/(\mathrm{Re}A_{qq1} + A_{qq2}), \quad |a_q| = O(1/\ln(1/\delta\varphi),$$

причем $a_q$ не зависит от $q$. Физически это означает следующее. При падении плоской волны на горловину $S_n$ резонатора $D_n$ в области $D_n$ возбуждаются колебания среды малой интенсивности, поскольку волновое число $k$ далеко от резонансного значения области $D_n$. Поле излучения из горловины мало и вносит малый вклад в поле дифракции на цилиндре без отверстий. Назовем режим возбуждения резонансным, если выполняется условие

$$\mathrm{Re}A_{nn1} + A_{nn2} = 0. \tag{11}$$

Уравнение (11) определяет спектр резонансных частот рассматриваемого резонансного покрытия. Выпишем представление для поля $U_\partial$ вне круга радиуса $R_2$:

$$U_\partial = -\sum_{q=1}^{2M+1} \int_{-\delta\varphi_q}^{\delta\varphi_q} \frac{\partial U_\partial}{\partial r} G_0(R_2, \psi_q, r, \varphi) R_2 d\varphi_q +$$

$$+ ikA_p \int_0^{2\pi} \cos\varphi' \exp(ikR_2\cos\varphi') G_0(R_2, \psi', r, \varphi) R_2 d\varphi' =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon_m} \frac{H_m^{(1)}(kr)}{H_m'^{(1)}(kR_2)} \left\{ -\frac{1}{kR_2} \sum_{q=1}^{2M+1} a_q J_0(m\delta\varphi_q) \times \right.$$

$$\left. \times \cos\left(m\frac{\pi(2q-1)}{2M+1}\right) + 2i^m J_m'(kR_2)\cos(m\varphi) \right\}.$$

Положим для определенности $A_p$ равным единице и определим уровень гашения поля на окружности радиуса $r = R_3 = 2R_2$ как 20 логарифмов отношения модуля поля $U_{0\partial}$ дифракции на жестком цилиндре без отверстий и поля дифракции $U_\partial$ на цилиндре того же радиуса с перфорированным покрытием, то есть

$$UG = 20\lg\left|\frac{U_{0\partial}(R_3, \varphi_i)}{U_\partial(R_3, \varphi_i)}\right|,$$

где $\varphi_i$ – координата точки наблюдения на окружности радиуса $R_3$. Через $U_{0\partial}$ обозначено выражение

$$U_{0\partial} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2}{\varepsilon_m} i^m J_m'(kR_2) \frac{H_m^{(1)}(kr)}{H_m'^{(1)}(kR_2)} \cos(m\varphi).$$

В табл. 1 приведены результаты расчетов уровня гашения поля на окружности радиуса $R_3$ в направлении $\varphi_i = 2\pi i/18$, $i = 0, \ldots, 9$ для значений парамет-

**Таблица 2**

| $kR_2$ | $2M+1 \backslash i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4.05 | 7 | −6.89 | −6.15 | −28.85 | −11.63 | −3.84 | −13.19 | −9.21 | −6.28 | −6.84 | −5.25 |
| 4.24 | 11 | −7.47 | −7.43 | −32.87 | −16.85 | −7.54 | −8.09 | −8.13 | −5.83 | −4.59 | −4.42 |
| 4.22 | 15 | −7.68 | −7.52 | −33.96 | −16.44 | −6.22 | −8.23 | −7.67 | −6.40 | −4.62 | −3.85 |
| 4.19 | 19 | −7.79 | −7.24 | −35.11 | −16.76 | −6.22 | −8.45 | −7.72 | −6.52 | −4.72 | −4.03 |

ра $2M + 1 = 7, 11, 15, 19$ и для $kR_2 = 2, 3, 4$. В силу симметрии $UG(\varphi_{18-i}) = UG(\varphi_i)$, $i = 1, \ldots, 8$.

Знак минус означает усиление интенсивности поля.

В табл. 2 приведены уровни гашения для резонансных режимов, вычисленных по формуле (11).

Приведенные результаты показывают, что перфорированное покрытие, скомпанованное из $2M + 1$ резонаторов Гельмгольца, усиливает отраженное поле по всем направлениям наблюдения, и это усиление слабо зависит от числа $2M + 1$. Этот эффект можно объяснить следующим образом. В отличие от высокочастотного случая, когда поле дифракции определяется достаточно малой окрестностью точки падения на поверхность стороннего поля, на низких частотах поле дифракции на цилиндре зависит от отражения падающего поля во всех точках дифрагирующей поверхности и имеет сложную структуру. Излучение из горловины $n$-го резонатора локализовано, поле дифракции от этого излучения не согласовано по фазе с полем дифракции плоской волны, что приводит к усилению интенсивности поля, причем коэффициент усиления порядка 5–10 дБ. В случае резонансного возбуждения происходит существенное усиление интенсивности поля в некотором направлении

## 2. ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА

Рассмотрим задачу дифракции плоской волны $U_p = A_p \exp(ikr\cos\varphi)$ на цилиндре той же геометрии, что в прямой задаче. Будем считать, что области $D_n$ заполнены средой с плотностью $\rho_n$ и скоростью звука $c_n$. Плотность среды в области $D_0$ равна $\rho_0$, а скорость звука равна $c_0$. Предполагается, что параметры среды $\rho_0$, $c_0$ и параметры падающего поля $A_p$, $\omega$ известны. Обозначим через $U_n$ поле $U$ в области $D_n$ и через $U_0$ поле $U$ в области $D_0$. В областях $D_0$ и $D_n$ поле $U$ удовлетворяет уравнениям

$$(\Delta + k_0^2)U_0 = 0, \quad k_0 = \omega/c_0,$$
$$(\Delta + k_n^2)U_n = 0, \quad k_n = \omega/c_n, \quad n = 1, \ldots, N, \tag{12}$$

краевым условиям прямой задачи (1), (2), условию на ребре, излучения или погашаемости для рассеянной части поля. На отверстиях $S_n$ должно выполняться условие сшивания

$$\rho_n U_n = \rho_0 U_0, \quad \partial U_n/\partial r = \partial U_0/\partial r, \quad n = 1, \ldots, N. \tag{13}$$

Требуется найти число $N$, значения параметров $\rho_n$ и $c_n$ сред, заполняющих области $D_n$, $n = 1, \ldots, N$, для которых выполняется условие

$$|U_\partial| \le \varepsilon/|A_p| \text{ или } UG = 20\lg|U_0/U_\partial| \tag{14}$$

для всех точек, лежащих вне окружности радиуса $R_3$, $UG$ – заданный уровень гашения поля в дБ.

Пусть $G_n$ – функция Грина кругового сектора с абсолютно жесткими стенками без отверстий $S_n$, $G_0$ – функция Грина внешности абсолютно жесткого цилиндра радиуса $R_2$ без отверстий. Эти функции совпадают с функциями Грина, определяемыми по формулам (8), если в представлении для функции $G_n$ параметр $k$ заменить на $k_n$, а в представлении для функции $G_0$ параметр $k$ заменить на $k_0$. Применяя формулы Грина для функций $U_n$ и $G_n$ в областях $D_n$ и функций $U_\partial$ и $G_0$ в области $D_0$, получим представления для полей $U_n$ и $U_\partial$ по формулам (4). При выполнении условий сшивания на отверстиях $S_n$ получим набор (6) интегральных соотношений, связывающих плотности $\mu_q$ с параметрами среды в областях $D_n$, если в представлении (6) функцию $G_q(R_2, \psi_q, R_2, \psi_q')$ заменить на функцию $(\rho_q/\rho_0)G_q(R_2, \psi_q, R_2, \psi_q')$. Задавая главные члены асимптотики для функций $\mu_q$ в виде $\mu_q = a_q/\sqrt{(\delta\varphi_q)^2 - \varphi_q^2}$, $q = 1, \ldots, N$ для коэффициентов $a_q$, получим следующий набор соотношений

$$\sum_{n=1}^{N} a_n A_{nq} = B_q, \quad q = 1, \ldots, N, \tag{15}$$

$A_{nn} = A_{nn1} + A_{nn2}\rho_n/\rho_0$, $A_{nq}$ и $B_q$ определены по формулам (10) с заменой в формулах для $A_{nn2}k$ на $k_n$, а в формулах для $A_{nn1}$, $A_{nq}$ и $B_q$ параметр $k$ на $k_0$. Далее поступим следующим образом. Определим нормальные скорости среды в горловинах $S_n$, которые реализуют задачу гашения, то есть для которых суммарное дифракционное поле мало по

**Таблица 3**

| $k_0R_2$ | 0.5 | 1.0 | 2.0 | 3.0 | 4.0 | 5.0 | 6.0 | 7.0 | 8.0 | 9.0 | 10.0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $M$ | 3 | 3 | 3 | 5 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |

модулю. Для этого выпишем представление для поля $U_\partial$ вне круга радиуса $R_2$

$$U_\partial = -\sum_{q=1}^{N}\int_{-\delta\varphi_q}^{\delta\varphi_q}\frac{\partial U_\partial}{\partial r}G_0(R_2, \psi_q, r, \varphi)R_2 d\varphi_q +$$

$$+ ikA_p\int_0^{2\pi}\cos\varphi'\exp(ikR_2\cos\varphi')G_0(R_2, \psi', r, \varphi)R_2 d\varphi' = \tag{16}$$

$$= \frac{1}{2k_0}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{H_m^{(1)}(k_0r)}{H_m'^{(1)}(k_0R_2)}e^{im\varphi}\left\{-\sum_{n=1}^{N}d_qJ_0(m\delta\varphi_q)\times\right.$$

$$\left.\times\exp\left(-im\frac{\pi(2q-1)}{N}\right)[1+O(\delta\varphi_q)] + 2i^mk_0A_pJ_m'(k_0R_2)\right\}.$$

В формуле (16) через $d_q$ обозначена амплитуда нормальной скорости в горловине $S_q$, которая обеспечивает излучение вспомогательного поля с заданным уровнем гашения суммарного дифракционного поля, остальные обозначения введены в прямой задаче. Положим $N = 2M + 1$, $\delta\varphi_q = \delta\varphi$, $q = 1, \ldots, 2M + 1$ и потребуем, чтобы выполнялись соотношения

$$\sum_{q=1}^{2M+1}d_qR_2\exp\left(-im\frac{\pi(2q-1)}{2M+1}\right) = R_2C_m,$$

$$-M \le m \le M, \tag{17}$$

$$R_2C_m = 2i^mk_0R_2A_pJ_m'(k_0R_2)/J_0(m\delta\varphi),$$

$$J_0(m\delta\varphi) \ne 0.$$

Соотношения (17) вытекают из требования обращения в нуль первых $2M + 1$ пространственных гармоник дифракционного поля. Если параметр $k_0R_2$ порядка единицы, то можно ожидать, что оставшаяся нескомпенсированная часть дифракционного поля будет мала по модулю при $r \ge R_3 > R_2$ для не слишком больших $M$. Число $M$ определим из условия, что при известном $k_0R_2$ поле дифракции плоской волны на жестком цилиндре без первых $2M + 1$ пространственных гармоник удовлетворяет соотношению (14). Пользуясь асимптотикой функций Бесселя по большому индексу, для вычисления числа $M$ получим нелинейное уравнение $[k_0R_2^2e/(M + 1)R_3]^{M+1}/\sqrt{2\pi(M + 1)} = \varepsilon/A_p$.

Для небольших $k_0R_2$ приведем табл. 3 значений наименьшего номера $M + 1$ пространственной гармоники непогашенной части поля дифракции на жестком цилиндре при падении на него плоской волны единичной амплитуды в зависимости от волнового числа $k_0R_2$, при котором на расстоянии $R_3 = 2R_2$ достигается уровень гашения в 40 дБ.

Равенства (17) есть система алгебраических уравнений для вычисления амплитуд $d_q$. Определитель системы (17) является определителем Вандермонда, поэтому решение можно выписать в явном виде

$$d_q = \exp\left(\frac{iM(2q-1)}{2M+1}\right)\sum_{m=0}^{2M}(-1)^mC_{q-m}\sigma_{2M-m+1}^q\times$$

$$\times\left[\prod_{i=1(i\ne q)}^{2M+1}(z_i - z_q)\right]^{-1}, \quad q = 1, \ldots, 2M+1. \tag{18}$$

Коэффициент $C_m$ определен по формуле (17), $z_q = \exp[-i\pi(2q - 1)/(2M + 1)]$ $\sigma_{2M-m+1}^q$ – сумма всевозможных произведений чисел $z_i$, исключая $z_q$, взятых в количестве $2M - m + 1$. При расчете на ПК при не слишком больших $M$ удобно решать систему (17) напрямую по методу Гаусса.

Предположим, что существует решение задачи отыскания параметров среды $\rho_n$ и $c_n$ в областях $D_n$, для которых реализуется задача гашения дифракционного поля. Для этого необходимо потребовать, чтобы амплитуды нормальных скоростей $a_n$, удовлетворяющих соотношениям (15), которые будут зависеть от параметров среды $\rho_n$ и $c_n$, совпадали с амплитудами нормальных скоростей $R_2d_n$ в отверстиях $S_n$, реализующих задачу гашения и вычисляемых по формулам (18), то есть

$$a_n = R_2d_n, \quad n = 1, \ldots, 2M+1. \tag{19}$$

Далее плотности $\rho_n$ будем считать вещественными и положительными, а волновые числа $k_n$, $n = 1, \ldots, 2M + 1$ – комплексными. Потребуем, чтобы на отверстиях $S_n$ выполнялись условия сшивания по давлению, когда выполняется (19):

$$\sum_{n=1}^{2M+1}d_nR_2A_{nq} = B_q, \quad q = 1, \ldots, 2M+1. \tag{20}$$

В соотношениях (20) $d_n$ известно и вычисляется по формулам (18). Перепишем $n$-ое соотношение из (20) в виде

$$\mathrm{Re}A_{nn1} + \frac{\rho_n}{\rho_0}\mathrm{Re}A_{nn2} = \mathrm{Re}B_{n1},$$

$$B_{n1} = \left(B_n - \sum_{q=1(q\ne n)}^{2M+1}d_qR_2A_{qn}\right)/d_n, \tag{21}$$

$$\mathrm{Jm}A_{nn1} + \frac{\rho_n}{\rho_0}\mathrm{Jm}A_{nn2} = \mathrm{Jm}B_{n1}, \quad n = 1, \ldots, 2M+1, \tag{22}$$

где $\mathrm{Re}\,z$, $\mathrm{Jm}\,z$ – вещественная и мнимая части числа $z$, $A_{nn1}$, $A_{nq}$ – функции параметров $k_0R_2$, $B_n$ – функции параметров $k_0R_2$, $A_p$, $A_{nn2}$ – функции параметров $k_nR_1$, $k_nR_2$. Таким образом, получено $4M + 2$ соотношений, которые при известной геометрии задачи, известных параметрах падающей волны и известных параметрах среды в области $D_0$, дают возможность определить $2M + 1$ плотностей $\rho_n$ и волновых чисел $k_n$. Оценим порядки величин, стоящих в левой и правой части соотношений (21) и (22). Уравнение $J_n'(x)N_n'(bx) - J_n'(bx)N_n'(x) = 0$ имеет только вещественные корни, поэтому в соотношениях (22) при малых $k_nR_2$

$$\mathrm{Jm}A_{nn2} = O(1), \quad \mathrm{Jm}A_{nn1} = O(1),$$
$$\mathrm{Jm}B_{n1} = O(1) \text{ при } \delta\varphi \ll \pi.$$

В соотношениях (21)

$$\mathrm{Re}A_{nn1} = O(\ln(1/\delta\varphi)),$$
$$\mathrm{Re}A_{nn2} = O(\ln(1/\delta\varphi)), \quad B_{n1} = O(1).$$

Чтобы задача гашения имела решение, необходимо для всех $n$ из интервала $1 \le n \le 2M + 1$ потребовать выполнения равенств

$$\mathrm{Re}A_{nn1} + (\rho_n/\rho_0)\mathrm{Re}A_{nn2} = O(1).$$

Так как $\rho_n/\rho_0 > 0$, то $\mathrm{Re}A_{nn1}$ и $\mathrm{Re}A_{nn2}$ должны иметь разные знаки, что возможно, так как $\mathrm{Re}A_{nn1} < 0$, а $\mathrm{Re}A_{nn2}$ в зависимости от значения $k_nR_2$ должен менять знак, определяемый до- или зарезонансным режимом колебаний среды в резонаторе. Из соотношений (21) следует, что

$$\frac{\rho_n}{\rho_0} = \frac{\mathrm{Re}B_{n1} - \mathrm{Re}A_{nn1}}{\mathrm{Re}A_{nn2}}. \tag{23}$$

Равенство (22) преобразуем с учетом (23) к виду

$$\frac{\mathrm{Jm}A_{nn2}}{\mathrm{Re}A_{nn2}} = \frac{\mathrm{Jm}B_{n1} - \mathrm{Jm}A_{nn1}}{\mathrm{Re}B_{n1} - \mathrm{Re}A_{nn1}}, \quad n = 1, \ldots, 2M+1. \tag{24}$$

Правая часть соотношений (24) как функция параметров $k_0R_2$, $A_p$ известна, левая часть при фиксированном отношении $R_1/R_2$ есть функция параметра $k_nR_2$. Следовательно, равенства (24) есть набор $2M + 1$ нелинейных уравнений для вычисления параметров $k_nR_2$. После вычисления $k_nR_2$ находится величина $\mathrm{Re}A_{nn2}$ и отношения $\rho_n/\rho_0$, которые реализуют задачу гашения.

Дальнейшие исследования удобно провести на конкретном примере. Пусть на цилиндр волнового размера $k_0R_2$, $R_1/R_2 = 0.5$ падает плоская волна единичной амплитуды $\exp(ik_0r\cos\varphi)$. Согласно табл. 3 по уровню гашения в 40 дБ число пространственных гармоник, подлежащих гашению, равно 11 ($M = 5$). Предполагается, что $\rho_0$ и $k_0$ известны. Алгоритм решения следующий. Сначала вычисляются амплитуды $d_n$ нормальных скоростей в горловинах $S_n$, реализующих задачу гашения. Далее вычисляем матричные коэффициенты $A_{nn1}$ и $A_{nq}$ и правые части $B_q$, то есть вычисляем правую часть $n$-ого нелинейного уравнения из $2M + 1$ наборов (24) для вычисления волновых чисел $k_n$. Нелинейное уравнение (24) решаем следующим способом: выбираем малое $\mathrm{Jm}k_nR_2$. Находим первый корень $n$-го уравнения (24) и полагаем его равным $\mathrm{Re}k_nR_2$. Найденное значение $k_nR_2$ подставляем в правую часть соотношений (23) и вычисляем $\rho_n$. Поскольку при нормальном давлении отношение плотности металлов к плотности газов не превосходит $2 \times 10^4$, то, если правая часть соотношения (23) отрицательна хотя бы для одного $n$ или превосходит $2 \times 10^4$, такое $k_nR_2$ считается физически нереализуемым. Приведем табл. 4 значений волнового числа $k_nR_2$ и соответствующих отношений $\rho_n/\rho_0$ в зависимости от номера $n$ области $D_n$.

**Таблица 4**

При $k_0R_2 = 3.0$, $2M + 1 = 11$ $\mathrm{Re}\,k_nR_2 = 3.884$ для всех $n$ из интервала $1 \le n \le 11$

$\mathrm{Jm}k_nR_2 = -0.0007$, $\mathrm{Jm}k_nR_2 = -0.0008$

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\rho_n/\rho_0$ | 188.27 | 575.86 | 669.93 | 415.77 | 453.64 | 446.77 |

$\rho_n/\rho_0(12 - n) = \rho_n/\rho_0(n)$

$\mathrm{Jm}k_nR_2 = -0.0009$

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\rho_n/\rho_0$ | 188.27 | 575.88 | 669.91 | 415.76 | 453.64 | 446.76 |

$\mathrm{Jm}k_nR_2 = -0.001$

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\rho_n/\rho_0$ | 188.26 | 575.87 | 669.90 | 415.76 | 453.63 | 446.75 |

Приведенные результаты показывают, что решение сформулированной в примере задачи гашения существует, когда $-0.001 \le \mathrm{Jm}k_nR_2 \le -0.0007$. Вне этого диапазона плотности, полученные в результате вычислений, либо отрицательны для некоторых $n$, либо больше $2 \times 10^4$. При $\mathrm{Jm}k_nR_2 > 0$ физически реализуемого решения не существует.

Из анализа решения обратной задачи следует, что для решения задачи гашения следует управлять параметрами среды в областях $D_n$, поскольку

плотности зависят от номера области $n$. Среда, заполняющая область $D_n$, должна быть не поглощающей, а активной, поскольку $\mathrm{Jm}\,k_n R_2 < 0$. Оперативное управление плотностью в областях $D_n$ представляет большие трудности, поэтому задачу гашения дифракционного поля интерференционным методом более удобно решать с помощью управления вспомогательным гасящим полем приемно-излучающих антенных решеток, теория которых развита в работе [4].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ржевкин С.Н.* Курс лекций по теории звука. М.: МГУ, 1960, 336 с.
2. *Лапин А.Д.* Звукоизоляция в волноводах // Акуст. журн. 1975. Т. 21. № 3. С. 337–350.
3. *Иванов В.П.* Гашение звука в круглом волноводе конечной длины с фланцем // Акуст. журн. 1999. Т. 45. № 4. С. 512–518.
4. *Иванов В.П.* Задачи дифракции волн в низкочастотной акустике. М.: Наука. 2004, 472 с.

# Analysis of the Field Diffracted by a Cylinder with a Perforated Coating

**V. P. Ivanov**

*Institute of Mechanical Engineering, Russian Academy of Sciences, ul. Bardina 4, Moscow, 119334 Russia*

*e-mail: Kosarev@imash.ru*

**Abstract**—The direct and inverse problems of plane wave diffraction by a circular cylinder with a perforated coating are investigated. In the context of the direct problem, it is shown that a coated cylinder causes a more intense diffraction field than that produced by a smooth cylinder. In the context of the inverse problem, the parameters of the perforated coating are chosen so as to ensure a given level of suppression for the field diffracted by the cylinder.