АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2007, том 53, № 1, с. 113–118

АКУСТИЧЕСКАЯ ЭКОЛОГИЯ, ШУМЫ И ВИБРАЦИИ

УДК 534.23

ИМПЕДАНСНАЯ ТЕОРИЯ РАССЕЯНИЯ И ПОГЛОЩЕНИЯ ЗВУКА: УСЛОВНО ЛУЧШИЙ ПОГЛОТИТЕЛЬ И ПРЕДЕЛЬНЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ ПАССИВНЫХ РАССЕИВАТЕЛЕЙ И ПОГЛОТИТЕЛЕЙ

© 2007 г.
Ю. И. Бобровницкий

Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН
101990 Москва, Малый Харитоньевский пер. 4
E-mail: bobrovni@orc.ru
Поступила в редакцию 22.06.06 г.

Вводится понятие об условно лучшем поглотителе как о теле, которое, среди всех пассивных тел той же геометрии, поглощает максимальную мощность падающего поля при условии, что мощность рассеянного им звука фиксирована. Путем решения вариационной задачи найдены поверхностные импедансы условно лучшего поглотителя, определены предельные возможности пассивных рассеивателей и поглотителей звука. Построена область всех допустимых значений мощности поглощения и рассеяния произвольного пассивного тела. Для границ области выписаны аналитические формулы. Исследованы некоторые свойства условно лучших поглотителей, приведены иллюстративные примеры.

PACS: 43.20.Fn, 43.20.Tb, 43.30.Ky, 43.40.Fz, 43.55.Ev

Данная работа является продолжением статей [1, 2], посвященных новой теории рассеяния и поглощения звука упругими телами в среде. Теория основана на описании подсистем, среды и тела, с помощью импедансных характеристик. Несмотря на то, что теория рассеяния и поглощения звука является хорошо разработанной областью, публикации которой, вместе с аналогичными работами электродинамики, насчитывают несколько тысяч статей и десятки монографий (см., напр., обзоры в [1–7]), импедансный подход позволил получить ряд новых результатов общего характера. Так, в статье [1], где даны общие соотношения импедансной теории рассеяния, приведены три новые полезные представления рассеянного поля. В работе [2] импедансным методом решены задачи о наилучшем поглотителе и идеальном рассеивателе, а в работе [7] – об акустически прозрачном теле. Впервые найдены импедансные характеристики, которыми должно обладать каждое из этих тел.

Основное содержание данной статьи составляет решение сформулированной автором задачи об условно лучшем поглотителе звука. Одним из следствий полученного решения является определение предельных возможностей рассеивателей и поглотителей. Как оказалось, значения мощности поглощения и рассеяния пассивных тел не могут выходить за пределы определенной области. Ниже в статье эта область построена графически и для ее границ выписаны аналитические формулы. Полученные результаты полезны при разработке эффективных поглотителей и рассеивателей звука.

Пусть в среде, не обязательно однородной и безграничной, имеется тело (рассеиватель, поглотитель) объема V, ограниченное замкнутой поверхностью A, по которой тело контактирует со средой. Предполагается, что среда и тело описываются линейными дифференциальными уравнениями и, кроме того, в среде нет потерь, так что силы взаимодействия между телом и средой всегда направлены по нормали к поверхности A. В среде имеются сторонние источники, которые в отсутствие тела создают падающее поле давления $p_i(x)$, где x – координаты точки среды. Присутствие тела искажает падающее поле на величину $p_s(x)$, называемую рассеянным полем. Сумма этих двух полей, $p(x) = p_i(x) + p_s(x)$, представляет полное поле дифракции. Задача рассеяния состоит в нахождении оператора связи рассеянного поля с падающим, которое считается известным, и в последующем расчете и анализе требуемых характеристик полного и рассеянного полей.

Суть импедансного метода решения задачи рассеяния заключается в описании колебаний тела и среды с помощью импедансных характеристик, определенных относительно контактной поверхности A [1, 2]. С этой целью поверхность A представляется в виде совокупности N площадок ΔA_n малых волновых размеров, на которых давление и нормальная скорость могут считаться постоянными, а функции их непрерывного распределения на A могут быть заменены N-векторами.

Связь между векторами давления и скорости записывается с помощью NxN-матриц импедансов. В работе [1] показано, что для полного решения задачи рассеяния нужны три такие импедансные матрицы. Это матрица Z поверхностных импедансов тела в вакууме, которая характеризует тело как рассеиватель и поглотитель, и две матрицы, Z_i и Z_r, характеризующие колебания среды. Матрица Z_i является матрицей входных поверхностных импедансов объема V, заполненного средой, а матрица Z_r – это матрица импедансов излучения, т.е. импедансов среды во внешности A. Если p_i, v_i и p_s, v_s – это векторы сил давления и скорости соответственно для падающего и рассеянного полей, и Q и S – это матрицы рассеяния (определенные как $v_s = Qv_i$, $p_s = Sp_i$), то, как показано в [1], решение задачи рассеяния может быть записано в виде следующих обобщенных формул Френеля

$$Q = (Z_r + Z)^{-1}(Z_i - Z), \quad S = (Y_r + Y)^{-1}(Y_i - Y), \tag{1}$$

где $Y_i = Z_j^{-1}$ это матрицы подвижностей, $j = \varnothing, i, r$. Достоинство импедансного решения состоит в возможности идентифицировать поверхностные импедансы (матрицу Z) для тел, обладающих теми или иными поглощающими и/или рассеивающими свойствами. Так, в работе [2] получена импедансная матрица наилучшего поглотителя, т.е. тела, которое среди множества всех пассивных тел данной геометрии поглощает абсолютно наибольшее количество энергии падающего поля. А в работе [7] показано, какими поверхностными импедансами должно обладать акустически прозрачное (нерассеивающее) тело и как такие импедансы могут быть реализованы практически.

В предлагаемой работе впервые, насколько известно автору, формулируется и решается задача об условно лучшем поглотителе, т.е. о таком теле, которое поглощает максимум энергии падающего звукового поля при условии, что энергия рассеянного поля фиксирована. Такая задача имеет смысл при разработке эффективных поглотителей с малым рассеянием, какие требуются, например, для улучшения параметров приемных антенн в гидроакустике или для повышения качества звучания залов в архитектурной акустике. Однако значение решения этой задачи шире: оно позволяет определить предельные возможности пассивных рассеивателей и поглотителей, вычислить поверхностные импедансы, их реализующие, а также найти область допустимых значений мощности поглощения и рассеяния тела произвольной геометрии.

Начнем со строгой постановки задачи. По определению, средние по времени мощность поглощения Φ и мощность рассеяния F равны

$$\Phi = -\frac{1}{2}\mathrm{Re}(v^* p) = -\frac{1}{4}(v^* p + p^* v), \tag{2}$$

$$F = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(v_s^* p_s) = \frac{1}{4}v_s^*(Z_r^* + Z_r)v_s. \tag{3}$$

Здесь $v = v_i + v_s$, $p = p_i + p_s = -Z_i v_i + Z_r v_s$ – векторы скорости и давления полного поля на поверхности A, звездочка означает эрмитово сопряжение. Задача формулируется следующим образом: найти такую импедансную матрицу тела Z, которая доставляет максимум средней мощности поглощения (2) при условии, что средняя мощность рассеяния (3) равна некоторому фиксированному значению F_0, т.е.

$$\Phi = \max \text{ при } F = F_0. \tag{4}$$

Эта задача ниже решена методом множителей Лагранжа. В соответствии с методом [8], задача (4) на условный экстремум заменяется задачей поиска обычного экстремума для функционала

$$J = \Phi + \lambda(F - F_0), \tag{5}$$

где λ – подлежащий определению множитель Лагранжа.

Будем считать, что λ не равна нулю и бесконечности, так как случай $\lambda = 0$ соответствует задаче о наилучшем поглотителе, рассмотренной в [2], а случай $1/\lambda = 0$ соответствует задаче об акустически прозрачном теле [7]. Кроме того, из рассмотрения исключается значение $\lambda = 1$, так как функционал (5), как нетрудно проверить с помощью (2) и (3), является в этом случае линейной функцией векторов v_s, v_s^* и потому не имеет экстремумов.

Рассматривая J в (5) как функцию рассеянного поля, считая v_s, v_s^* независимыми переменными, необходимые условия экстремума можно записать в следующем виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial v_s^*} &= \frac{\partial \Phi}{\partial v_s^*} + \lambda\frac{\partial F}{\partial v_s^*} = 0, \\ \frac{\partial J}{\partial v_s} &= \frac{\partial \Phi}{\partial v_s} + \lambda\frac{\partial F}{\partial v_s} = 0, \\ \frac{\partial J}{\partial \lambda} &= F - F_0 = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Вычислив производные и предположив, что матрица сопротивлений излучения

$$R_r = \frac{1}{2}(Z_r + Z_r^*) \tag{7}$$

неособенная (что оправдывается тем, что в реальных системах всегда присутствуют потери на излучение), систему уравнений (6) можно привести к следующему виду

$$\begin{aligned} (Q - \gamma Q_0)v_i &= 0, \\ v_i^*(Q^* - \gamma Q_0^*) &= 0, \end{aligned} \tag{8}$$

$$\frac{1}{2}v_i^* Q^* R_r Q v_i = F_0.$$

Здесь вектор v_s заменен, по определению матрицы рассеяния (1), на Qv_i, вместо множителя Лагранжа λ введен параметр

$$\gamma = \frac{1}{1-\lambda},$$

а через Q_0 обозначена матрица рассеяния наилучшего поглотителя

$$Q_0 = \frac{1}{2}R_r^{-1}(Z_i - Z_r^*). \quad (9)$$

Напомним [2], что наилучший поглотитель имеет матрицу поверхностных импедансов, равную эрмитово сопряженной матрице импедансов излучения

$$Z = Z_r^* \quad (10)$$

и мощность поглощения, равную

$$\Phi_{\max} = \frac{1}{8}v_i^*[R_r + (X_i + X_r)R_r^{-1}(X_i + X_r)]v_i, \quad (11)$$

где буквой X обозначены матрицы реактансов, т.е. мнимые части соответственных импедансных матриц.

Из первых двух уравнений (8) следует, что параметр γ и, следовательно, множитель Лагранжа λ являются действительными скалярными величинами, а матрица рассеяния искомого тела пропорциональна матрице рассеяния (9) для наилучшего поглотителя

$$Q = \gamma Q_0. \quad (12)$$

Учитывая, что мощность рассеяния наилучшего поглотителя равна его мощности поглощения [2], из третьего уравнения (8) получаем значение параметра

$$\gamma = \pm\left(\frac{F_0}{\Phi_{\max}}\right)^{1/2}. \quad (13)$$

Подставляя значения (13), (14) в формулу (2), после алгебраических преобразований получаем для мощности поглощения следующую формулу

$$\Phi = \pm(F_0\Phi_{\max})^{1/2} - F_0. \quad (14)$$

Так как мощность поглощения пассивного поглотителя всегда неотрицательна, то в правой части (14), а также в выражении (13) для параметра γ, следует оставить только знак "+". Поделив уравнение (14) на $\Phi_{\max}$ и введя обозначения для относительных мощностей рассеяния и поглощения

$$f = \frac{F_0}{\Phi_{\max}}, \quad \varphi = \frac{\Phi}{\Phi_{\max}}, \quad (15)$$

получим окончательное уравнение, связывающее экстремальное значение мощности поглощения с заданным значением мощности рассеяния

$$\varphi = 2\sqrt{f} - f. \quad (16)$$

Рассмотрев далее приращение второго порядка по Δv_s функции J в (5) в окрестности стационарного значения (12), равное

$$\Delta J = -\frac{1}{2\gamma}\Delta v_s^* R_r \Delta v_s,$$

и имея в виду положительную определенность матрицы сопротивлений излучения (7), можно заключить, что полученное стационарное значение (12)–(16) является максимальным значением J.

Таким образом, показано, что тело с матрицей рассеяния по скорости, равной

$$Q = \sqrt{f}Q_0, \quad (17)$$

где Q_0 – матрица рассеяния наилучшего поглотителя (9) и f – относительная мощность рассеяния (15), среди всех тел той же геометрии, рассеивающих такую же мощность, поглощает наибольшее количество энергии падающего поля. Такое тело и есть, следовательно, условно лучший поглотитель. Его матрица поверхностных импедансов вычисляется по формуле

$$Z = (Z_r + Z_i)(I + \sqrt{f}Q_0)^{-1} - Z_r, \quad (18)$$

которая получена из (1) с учетом (17), а мощность поглощения звука равна $\Phi = \varphi\Phi_{\max}$, где φ и $\Phi_{\max}$ даны в (17) и (12).

Рассмотрим подробнее уравнение (16), представляющее главный результат данной статьи, и некоторые свойства условно лучшего поглотителя.

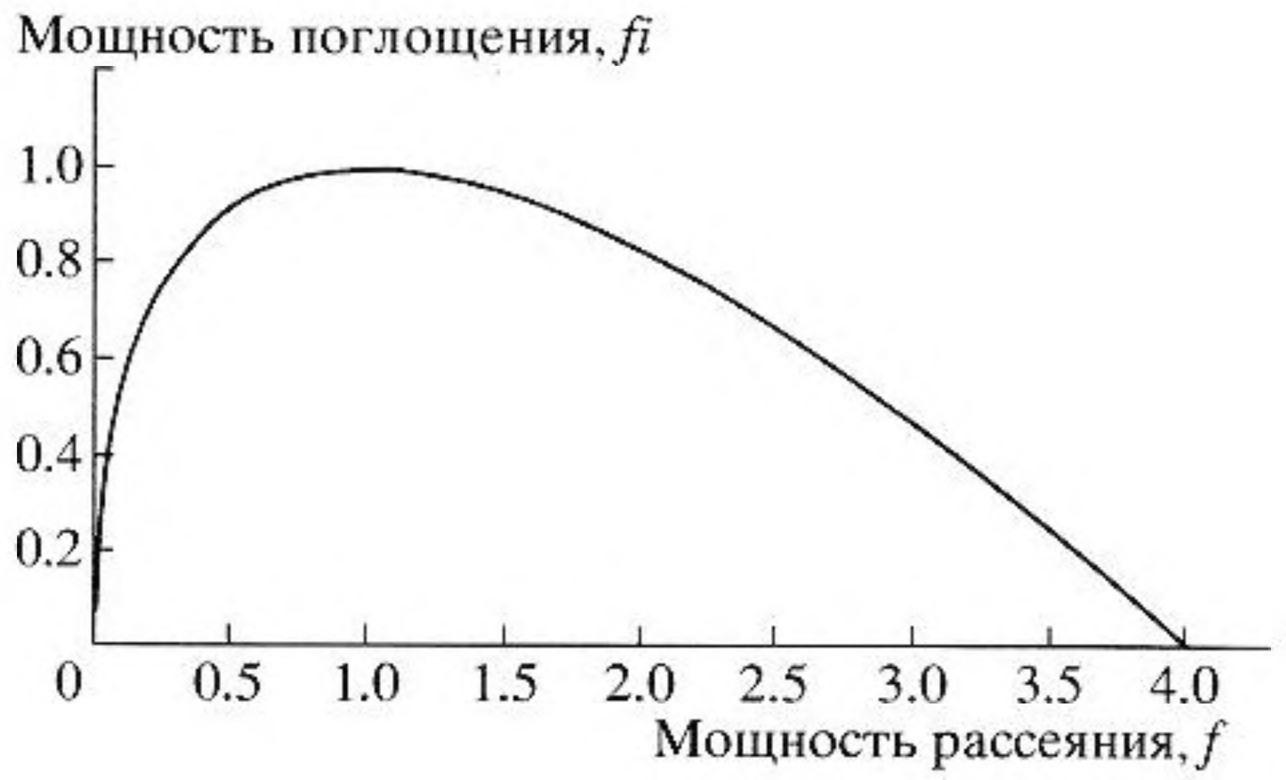
Так как мощность рассеяния и мощность поглощения всегда положительны, то из (16) следует, что относительная мощность рассеяния звука не может выйти за пределы интервала $f \in [0, 4]$. Это означает, что максимально достижимое значение мощности рассеяния пассивным телом равно

$$F_{\max} = \frac{1}{2}v_i^*[R_r + (X_i + X_r)R_r^{-1}(X_i + X_r)]v_i, \quad (19)$$

что в 4 раза больше максимально возможного значения мощности поглощения (11). Тело, которое рассеивает мощность (19), является наилучшим (идеальным) рассеивателем. Оно не поглощает звук, и его импедансная матрица (18) является чисто мнимой матрицей, близкой к матрице реактансов излучения

$$Z = -i[X_r + R_r(X_r + X_i)^{-1}R_r]. \quad (20)$$

Идеальный рассеиватель, как и наилучший поглотитель, является рассеивателем резонансного типа, но без внутренних потерь.



Область допустимых значений мощности рассеяния и мощности поглощения, нормированных на максимальную мощность поглощения (11), для пассивных линейно упругих тел.

Одним из следствий полученного решения (12)–(17) является существование конечной области допустимых значений мощности поглощения и рассеяния пассивных тел. На рисунке эта область изображена на плоскости (f, φ), где f и φ – относительные мощности (15). Снизу область ограничена осью f ($\varphi = 0$), сверху – кривой (16). Каждой точке области соответствует тело с определенной импедансной матрицей, для которого мощность рассеяния и мощность поглощения равны координатам этой точки.

График на рисунке универсален: он верен для пассивных тел любой геометрии и на всех частотах, а все индивидуальные особенности рассеивателей и поглотителей, а также падающего поля, заключены в значении Φ_{max} (11), на которое нормированы мощности и которое предполагается конечным.

График на рисунке отражает многие общие свойства рассеивателей и поглотителей.

Из него, в частности, видно, что не существует тел конечных размеров, которые могут поглощать звуковую энергию, но ничего не рассеивают, т.е. если рассеиваемая мощность равна нулю, $f = 0$, то и поглощенная мощность равна нулю, $\varphi = 0$. Наоборот, существует бесконечно много тел, которые могут рассеивать, ничего не поглощая, т.е. если $\varphi = 0$, то f может принимать любое значение от 0 до 4, что соответствует множеству тел со всевозможными реактивными импедансами. Если мощность поглощения тела принимает некоторое фиксированное ненулевое значение в интервале $\varphi \in [0, 1]$, то мощность рассеяния может принимать бесконечно много значений между f_{min} и f_{max}, которые соответствуют точкам пересечения границы (16) на рисунке с соответственной горизонтальной прямой. Автор проверил это и непосредственно, решив задачу на условный экстремум, аналогичную задаче (4): найти экстремумы мощности рассеяния (3) при фиксированном значении мощности поглощения (2). Решение этой задачи дает два экстремума, один из которых оказывается минимумом, а другой – максимумом, которые совпадают с f_{min} и f_{max}.

График на рисунке полезен при проектировании поглотителей и рассеивателей с определенными физическими свойствами. Так, если требуется создать эффективный поглотитель, то естественно проектировать его в виде наилучшего поглотителя (или близкого к нему тела), имеющего импедансы (10) и мощность поглощения (11), что соответствует окрестности абсолютного максимума поглощения – точке с координатами (1, 1) на рисунке. Если требуется эффективный рассеиватель, то его следует находить в окрестности точки (4, 0) с импедансами (20) и мощностью рассеяния (19). А если требуется создать нерассеивающее (неотражающее) покрытие, его нужно искать в окрестности начала координат, где выполняется неравенство $f \ll 1$. Особенностью этого участка области на рисунке является то, что отношение поглощенной мощности к мощности рассеяния здесь может принимать любые значения от нуля до очень больших значений. Действительно, для тел, которые соответствуют точкам на оси f рисунке, это отношение равно нулю, а для тел, которые соответствуют точкам на граничной кривой (16), оно равно

$$\frac{\Phi}{F} = \frac{\varphi}{f} = \frac{2}{\sqrt{f}} - 1 \qquad (21)$$

и, в зависимости от f, может быть произвольно большим. Таким образом, в этой части области рисунке содержатся покрытия с малым рассеянием и практически любым отношением мощностей поглощения и рассеяния. В частности, покрытие с наибольшим таким отношением (21) должно иметь поверхностные импедансы (18) и матрицу рассеяния (17).

В качестве примера рассмотрим поглотитель (рассеиватель) в виде сферы малого радиуса a ($x = ka$, $x^2 \ll 1$) в безграничной однородной среде ρc. Положим, что сфера имеет только одну (пульсирующую) колебательную степень свободы. Удельный импеданс излучения z_r и удельный внутренний импеданс z_i сферы равны [4]

$$\frac{z_r}{\rho c} = -\frac{ih_0(x)}{h_1(x)} \cong x^2 - ix,$$

$$\frac{z_i}{\rho c} = \frac{ij_0(x)}{j_1(x)} \cong \frac{3i}{x},$$

где j_m и h_m – это сферические функции Бесселя и Ганкеля порядка m.

Наилучший поглотитель в виде такой сферы должен иметь, согласно (10), удельный поверх-

Свойства некоторых рассеивателей и поглотителей звука в виде пульсирующей сферы малых волновых размеров

	Коэффициент рассеяния по скорости, Q	Относительное сечение поглощения, α	Относительное сечение рассеяния, σ	Отношение мощностей поглощения и рассеяния, β
Наилучший поглотитель, $Z = Z_r^*$	$3i/2x^3$	x^{-2}	x^{-2}	1
Идеальный рассеиватель, $Z = -i\mathrm{Im}Z_r$	$3i/x^3$	0	$4x^{-2}$	0
Сфера Макдональда, $Z = Z_r$	$-3/2x^3$	1	1	1
Согласованная сфера, $Z = \rho cA$	$-4 + i3/x$	4	$4x^2$	x^{-2}
Условно лучший поглотитель, $\gamma = 2x$ в (19)	$3i/x^2$	$4x^{-1}$	4	x^{-1}

ностный импеданс $z \cong \rho c(x^2 + ix)$, коэффициент рассеяния по скорости (9), равный $Q_0 \cong 3i/2x^3$, и мощность поглощения (11)

$$\Phi_{\max} = \left(\pi a^2 \frac{|p_i|^2}{2\rho c}\right)\frac{1}{x^2} = P_{\mathrm{inc}}\alpha_{\max}. \qquad (22)$$

Величина P_{inc}, равная выражению в скобках равенства (22), представляет собой поток мощности через сечение сферы πa^2 в плоской падающей волне с амплитудой давления p_i, а величина $\alpha_{\max} = x^{-2}$ является, следовательно, относительным сечением поглощения. Аналогично определенное относительное сечение рассеяния σ для наилучшего поглотителя совпадает с относительным сечением поглощения, а отношение β поглощенной мощности к рассеянной мощности равно единице, $\beta = \Phi/F = \alpha/\sigma = 1$. Свойства некоторых других сферических поглотителей и рассеивателей малых волновых размеров для удобства представлены в виде таблицы. Для них в четырех колонках приведены: коэффициент рассеяния по скорости (1), относительное сечение поглощения $\alpha = \Phi/P_{\mathrm{inc}}$, относительное сечение рассеяния $\sigma = F/P_{\mathrm{inc}}$, где P_{inc} – падающий поток мощности, определенный в (22), а также отношение мощности поглощения к мощности рассеяния $\beta = \Phi/F$.

Как видно из таблицы, наилучший поглотитель и идеальный рассеиватель имеют наибольшие коэффициенты рассеяния. Так называемое тело Макдональда, поверхностный импеданс которого равен импедансу излучения, имеет сечения поглощения и рассеяния, равные единице, и потому лучше других тел имитирует свойства черного тела Кирхгофа [2]. С точки зрения отношения мощности поглощения к мощности рассеяния (параметра β) наилучшим является согласованное тело, удельный поверхностный импеданс которого равен ρc. Приведенный в таблице вариант условно лучшего поглотителя, поверхностный импеданс которого равен (18) со значением $\gamma = 2x$, уступает согласованному телу по параметру β, но превосходит его по сечению поглощения. Выбирая для параметра γ другие значения, можно получать условно лучшие поглотители с другими свойствами. Есть, например, тела или покрытия с очень большим отношением β, хотя и с небольшими абсолютными значениями мощности поглощения и рассеяния. В частности, согласованное тело соответствует случаю $\gamma = 2x^2$.

Работа выполнена в рамках проекта РФФИ 05-01-00880.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бобровницкий Ю.И.* Импедансная теория рассеяния звука: общие соотношения // Акуст. журн. 2006. Т. 52. № 4. С. 1–6.
2. *Бобровницкий Ю.И.* Импедансная теория поглощения звука: наилучший поглотитель и черное тело // Акуст. журн. 2006. Т. 52. № 5. С. 1–11.
3. *Хёнл Х., Мауэ А., Вестпфаль К.* Теория дифракции. М.: Мир, 1964. 427 с.
4. *Junger M.C., Feit D.* Sound, Structures and Their Interaction. Cambridge, MA: MIT Press, 1972. 470 p.
5. *Шендеров Е.Л.* Излучение и рассеяние звука. Л.: Судостроение, 1989. 301 с.
6. *Скучик Е.* Основы акустики. Том 2 / Перевод с английского под ред. Л.М. Лямшева. М.: Мир, 1976. 542 с.
7. *Бобровницкий Ю.И.* Новое решение задачи об акустически прозрачном теле // Акуст. журн. 2004. Т. 50. № 6. С. 751–755.
8. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1968. 720 с.

Impedance Theory of Sound Absorption: A Constrained Best Absorber and the Efficiency Bounds of Passive Scatterers and Absorbers

Yu. I. Bobrovnitskiĭ

Blagonravov Institute of Mechanical Engineering, Russian Academy of Sciences, Malyĭ Khariton'evskiĭ per. 4, Moscow, 101990 Russia

e-mail: bobrovni@orc.ru

Abstract—A constrained best absorber is defined as a body that absorbs the maximum incident sound power among all of the passive bodies of the same geometry under the condition that the sound power scattered by it is fixed. By solving a variational problem, the surface impedances of the constrained best absorber are determined and the efficiency bounds of passive scatterers and absorbers are found. The range of all the allowable values of the absorption and scattering powers of an arbitrary passive body is represented graphically. For the boundaries of this range, analytical formulas are derived. Some of the properties of constrained best absorbers are considered, and illustrative examples are presented.