

**КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ  
ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН**

УДК 534.26

**РАССЕЯНИЕ ЗВУКОВЫХ ВОЛН НА ДВУХ СФЕРИЧЕСКИХ ТЕЛАХ,  
ОДНО ИЗ КОТОРЫХ ИМЕЕТ МАЛЫЙ РАДИУС**

© 2007 г. Дж. А. Румелиотис, А. Д. Котсис

*Школа электротехники и компьютерной техники, Национальный технический Университет Афин  
ул. Ирон Политехниу 9, Афины, 15773 Греция*

*E-mail: iroumel@cc.ece.ntua.gr*

Поступила в редакцию 19.09.05 г.

Исследуется рассеяние плоской звуковой волны на акустически проницаемой или непроницаемой (мягкой или жесткой) сфере, находящейся на некотором расстоянии от другой сферы, также проницаемой или непроницаемой (мягкой или жесткой), с акустически малым радиусом. Проницаемые сферы и окружающая среда являются жидкими или жидкоподобными, т.е. в них невозможно распространение сдвиговых волн. При решении задачи используется разделение переменных в сочетании с теоремами трансляционного сложения для сферических волновых функций. Получены аналитические выражения для рассеянного поля давления и для сечений рассеяния. Приводятся численные результаты для проницаемых и непроницаемых сфер, иллюстрирующие влияние малой сферы на сечение рассеяния большой сферы.

PACS: 43.35.Df

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Задача о рассеянии звуковых или электромагнитных волн на множестве объектов имеет большое количество практических приложений, таких как моделирование сложных тел, управление сечениями рассеяния различных объектов, предсказание излучения от рефлекторных антенн, и т.д. Некоторые приложения такого рода описаны, например, в [1–3]. Рассеяние плоской звуковой волны на двух непроницаемых сферах одинаковых или разных размеров исследовано в [4–7]. Рассеяние звука на двух одинаковых сферических пузырьках газа исследовано в [8], а рассеяние на скоплении не обязательно одинаковых пузырьков в воде – в [9]. В работах [10, 11] рассматривается рассеяние плоской звуковой волны на двух упругих сферических оболочках. Рассеяние электромагнитных волн на двух сферах рассмотрено в работах [12–15], на двух или трех сферах – в [16, 17], и на скоплении сфер – в работе [18].

В настоящей статье рассматривается рассеяние плоской звуковой волны на акустически проницаемой или непроницаемой (мягкой или жесткой) сфере, находящейся на некотором расстоянии от другой сферы, также проницаемой или непроницаемой (мягкой или жесткой), с акустически малым радиусом (много меньшим длины волны звука). Метод, примененный в работе [19], используется в расширенном варианте для получения приближенных в первом порядке аналитических решений для рассеянного поля давления и различных сечений рассеяния. Рассматриваемая трехмерная задача алгебраически намного слож-

нее аналогичной двумерной задачи с двумя бесконечными параллельными круговыми цилиндрами, которая была исследована в работе [20]. Для ее решения мы используем метод разделения переменных в сочетании с теоремами трансляционного сложения для сферических волновых функций.

Статья состоит из следующих разделов: в Разделе 2 исследуется рассеяние на двух проницаемых сферах; в Разделе 3 рассматривается рассеяние на двух сферах, из которых, по крайней мере, одна непроницаемая (мягкая или жесткая). Наконец, в Разделе 4 приводятся численные результаты для различных сечений рассеяния как для проницаемых, так и для непроницаемых сфер.

### 2. ДВЕ ПРОНИЦАЕМЫЕ СФЕРЫ, ИЗ КОТОРЫХ ОДНА ИМЕЕТ МАЛЫЙ РАДИУС

Геометрия задачи показана на рис. 1. Радиусы сфер  $R_1$  и  $R_2$ , соответственно, а  $d$  – расстояние между их центрами  $O_1$  и  $O_2$ , которые являются началами координат для двух декартовых систем с параллельными осями. Начало координат  $O_2$  находится в точке  $(d_0, \theta_0, \phi_0)$  относительно системы  $O_1x_1y_1z_1$ . Плотность, скорость звука и волновое число вне сфер (в области 0) обозначены как  $\rho_0, c_0, k_0$ ; внутри первой сферы (в области 1) – как  $\rho_1, c_1, k_1$ ; и внутри второй сферы (область 2) – как  $\rho_2, c_2, k_2$ . Все среды являются жидкими или жидкоподобными, т.е. в них не распространяются сдвиговые волны.

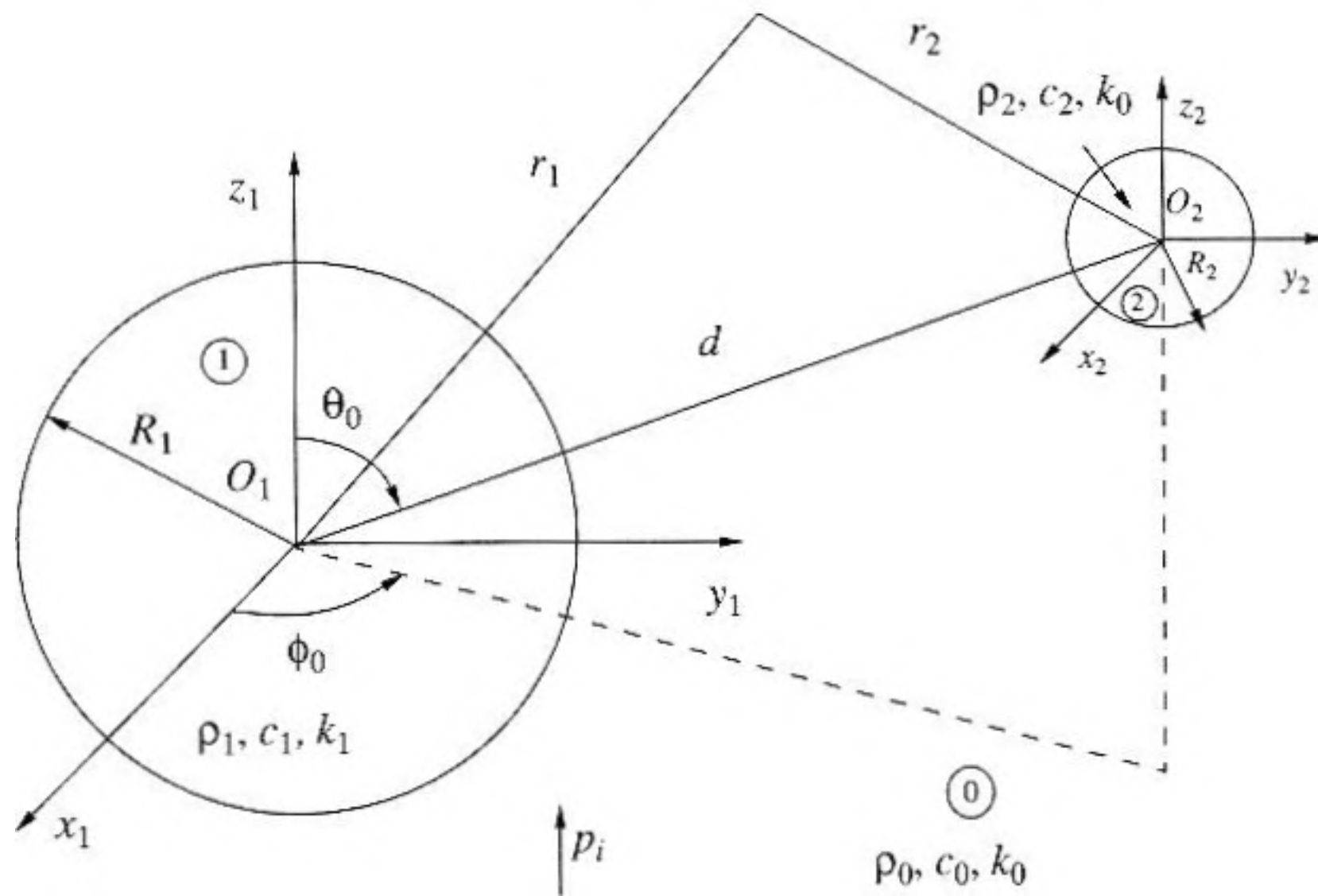


Рис. 1. Геометрия рассеивателя. Две сферы с радиусами  $R_1$  и  $R_2$ , разделенные расстоянием  $d$ .

Падающая плоская волна давления, бегущая в направлении  $+z$  и ударяющаяся о рассеиватель, показанный на рис. 1, может быть представлена как сумма сферических гармоник [21]

$$p_i = \exp(jk_0 z_1) = \exp(jk_0 r_1 \cos \theta_1) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) j^n j_n(k_0 r_1) P_n(\cos \theta_1), \quad (1)$$

где  $r_1$  и  $\theta_1$  – сферические координаты относительно  $O_1$ ,  $j_n$  – сферическая функция Бесселя первого рода, и  $P_n$  – функция Лежандра. Временной множитель  $\exp(-j\omega t)$  везде опущен.

Пусть  $p_{in,1}(0)$  и  $p_{s1}(0)$  поле давления внутри первой сферы и поле рассеяния на первой сфере, соответственно, в отсутствие второй сферы радиусом  $R_2$  (невозмущенная задача). Эти поля выражаются как

$$P_{in,1}(0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(0) j_n(k_1 r_1) P_n(\cos \theta_1), \quad (2)$$

$$P_{s1}(0) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(0) h_n(k_0 r_1) P_n(\cos \theta_1), \quad (3)$$

где  $h_n$  – сферическая функция Ханкеля первого рода; верхний индекс (1) для простоты опущен. Выражения для  $A_n(0)$  и  $B_n(0)$  имеют вид [19]:

$$A_n(0) = \frac{j^{n+1} (2n+1) q_1}{w_0^2 [q_1 j_n(w_1) h_n'(w_0) - j_n'(w_1) h_n(w_0)]}, \quad (4)$$

$$B_n(0) =$$

$$= \frac{j^n (2n+1) [j_n(w_0) j_n'(w_1) - q_1 j_n'(w_0) j_n(w_1)]}{q_1 j_n(w_1) h_n'(w_0) - j_n'(w_1) h_n(w_0)},$$

где

$$w_0 = k_0 R_1, \quad w_1 = k_1 R_1, \quad q_1 = \rho_1 c_1 / \rho_0 c_0,$$

а штрих у символа функции означает производную по аргументу.

В формуле (4) использовано соотношение для Вронскиана [22]  $j_n(w_0) h_n'(w_0) - j_n'(w_0) h_n(w_0) = j/w_0^2$ .

В присутствии второй сферы с малым радиусом выражения (2) и (3) становятся слабо возмущенными:

$$p_{in,1} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n j_n(k_1 r_1) P_n(\cos \theta_1), \quad (5)$$

$$p_{s1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n h_n(k_0 r_1) P_n(\cos \theta_1), \quad (6)$$

где  $A_n$  и  $B_n$  немного отличаются от  $A_n(0)$  и  $B_n(0)$ , соответственно.

В этом случае также имеется поле  $p_{in,2}$  внутри второй сферы и поле  $p_{s2}$ , рассеянное на ней:

$$p_{in,2} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n C_{mn} j_n(k_2 r_2) P_n^m(\cos \theta_2) \exp(jm\phi_2), \quad (7)$$

$$p_{s2} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n D_{mn} h_n(k_0 r_2) P_n^m(\cos \theta_2) \exp(jm\phi_2), \quad (8)$$

где  $r_2, \theta_2, \phi_2$  – сферические координаты с началом в точке  $O_2$ , а  $P_n^m$  – присоединенная функция Лежандра.

Различные коэффициенты разложения в формулах (5)–(8) могут быть оценены исходя из граничных условий, которые должны выполняться при  $r_1 = R_1$  и  $r_2 = R_2$  (непрерывность давления и радиальной компоненты колебательной скорости):

$$p_i + p_{s1} + p_{s2} = p_{in,v}, \quad (9)$$

$$\rho_0^{-1} \partial(p_i + p_{s1} + p_{s2}) / \partial r_v = \rho_v^{-1} \partial p_{in,v} / \partial r_v, \quad (10)$$

где  $v = 1$  или  $2$  относится к первой или второй сфере, соответственно. Мы используем теоремы трансляционного сложения для сферических волновых функций [23], чтобы найти для всех коэффициентов выражения относительно начал координат  $O_1$  или  $O_2$ :

$$\begin{aligned} z_n(kr_1) P_n^m(\cos \theta_1) \exp(jm\phi_1) = \\ = \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{\mu=-v}^v \sum_{p=|n-v|}^{n+v} (-1)^\mu j^{v+p-n} (2v+1) \times \end{aligned} \quad (11)$$

$\times \alpha(m, n | -\mu, v | p) j_v(kr_2) P_v^\mu(\cos \theta_2) \exp(j\mu\phi_2) \times$

$$\times z_p(kd) P_p^{m-\mu}(\cos \theta_0) \exp j[(m-\mu)\phi_0], \quad r_2 \leq d,$$

$$z_n(kr_2) P_n^m(\cos \theta_2) \exp(jm\phi_2) =$$

$$= \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{\mu=-v}^v \sum_{p=|n-v|}^{n+v} (-1)^{p-\mu} j^{v+p-n} (2v+1) \times \quad (12)$$

$\times \alpha(m, n | -\mu, v | p) j_v(kr_1) P_v^\mu(\cos \theta_1) \exp(j\mu\phi_1) \times$

$$\times z_p(kd) P_p^{m-\mu}(\cos \theta_0) \exp j[(m-\mu)\phi_0], \quad r_1 \leq d,$$

где  $z_n$  – сферическая функция Бесселя любого рода, а  $\phi_1$  полярная (сферическая) координата относительно системы  $x_1 O_1 y_1$ . Индекс суммирования  $p$  изменяется от  $|n-v|$  до  $n+v$  шагами, равными 2. Некоторые частные значения коэффициентов  $\alpha(m, n | -\mu, v | p)$ , необходимые в данной работе, определены в Приложении В работы [19] и здесь не приводятся.

Поля  $p_{in,1}$  и  $p_{s1}$  могут быть заданы в виде

$$p_{in,1} = p_{in,1}(0) + \delta p_{in,1}, \quad p_{s1} = p_{s1}(0) + \delta p_{s1}, \quad (13)$$

где  $\delta p_{in,1}$  и  $\delta p_{s1}$  – малые возмущения полей  $p_{in,1}(0)$  и  $p_{s1}(0)$ , соответственно, возникающие в присутствии второй (малой) сферы. Подставляя выражения (13) в (9) и (10), при  $r_1 = R_1$  мы получим

$$\delta p_{s1} + p_{s2} = \delta p_{in,1}, \quad (14)$$

$$\rho_0^{-1} \partial(\delta p_{s1} + p_{s2}) / \partial r = \rho_1^{-1} \partial(\delta p_{in,1}) / \partial r, \quad (15)$$

так как при  $r_1 = R_1$  мы имеем  $p_i + p_{s1}(0) = p_{in,1}(0)$  и  $\rho_0^{-1} \partial[p_i + p_{s1}(0)] / \partial r_1 = \rho_1^{-1} \partial[p_{in,1}(0)] / \partial r_1$ . Здесь следует отметить, что  $\delta p_{in,1}$  и  $\delta p_{s1}$  даются выражениями (5) и (6), соответственно, если  $A_n$  и  $B_n$  заменить на  $\delta A_n$  и  $\delta B_n$ , так как

$$A_n = A_n(0) + \delta A_n, \quad B_n = B_n(0) + \delta B_n. \quad (16)$$

Удовлетворяя равенствам (14) и (15) и используя формулу (12) для выражения величины  $p_{s2}$  относительно начала координат  $O_1$ , а также используя ортогональные свойства функций Лежандра и экспоненциальных функций, путем прямых вычислений мы приходим к следующему результату:

$$\begin{aligned} \delta A_n = j^{-n} A_n(0) \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{m=-s}^s \sum_{p=|s-n|}^{s+n} D_{ms} (-1)^p j^{n+p-s} \times \\ \times \alpha(m, s | 0, n | p) h_p(k_0 d) P_p^m(\cos \theta_0) \exp(jm\phi_0), \end{aligned} \quad (17)$$

$$\delta B_n = \frac{B_n(0)}{A_n(0)} \delta A_n =$$

$$= -\frac{jw_0^2}{q_1} [j_n(w_0) j_n'(w_1) - q_1 j_n'(w_0) j_n(w_1)] \delta A_n. \quad (18)$$

Удовлетворяя соотношениям (9) и (10) при  $r_2 = R_2$  ( $v = 2$ ) и используя (1) и (6)–(8), теорему сложения (11) для выражения  $p_{s1}$  относительно начала координат  $O_2$  и ортогональные свойства функций Лежандра и экспоненциальных функций, мы приходим к результату ( $|m| \leq n, n \geq 0$ )

$$C_{mn} = \frac{h_n(w)}{j_n(w_2)} D_{mn} + j^n (2n+1) \frac{j_n(w)}{j_n(w_2)} \times$$

$$\times \left\{ \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{p=|s-n|}^{s+n} [B_s (-1)^m j^{p-s} \alpha(0, s | -m, n | p) \times \quad (19)$$

$$\times h_p(k_0 d) P_p^{-m}(\cos \theta_0) \exp(-jm\phi_0)] +,$$

$$+ \delta_m \exp(jk_0 d \cos \theta_0) \left. \right\},$$

$$C_{mn} = q_2 \frac{h_n'(w)}{j_n'(w_2)} D_{mn} + j^n (2n+1) q_2 \frac{j_n'(w)}{j_n'(w_2)} \times$$

$$\times \left\{ \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{p=|s-n|}^{s+n} [B_s (-1)^m j^{p-s} \alpha(0, s | -m, n | p) \times \quad (20)$$

$$\times h_p(k_0 d) P_p^{-m}(\cos \theta_0) \exp(-jm\phi_0)] +,$$

$$+ \delta_m \exp(jk_0 d \cos \theta_0) \left. \right\},$$

где

$$w = k_0 R_2, \quad w_2 = k_2 R_2, \\ q_2 = \rho_2 c_2 / \rho_0 c_0, \quad \delta_0 = 1, \quad \delta_m = 0, \quad m \neq 0.$$

В данном случае давление  $p_i$  падающей волны должно быть выражено относительно начала координат  $O_2$ . Для этой цели (см. рис. 1) мы воспользуемся соотношением

$$p_i = \exp(jk_0 z_1) = \exp[jk_0(z_2 + d \cos \theta_0)] = \\ = \exp(jk_0 d \cos \theta_0) \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) j^n j_n(k_0 r_2) P_n(\cos \theta_2).$$

Здесь  $\exp(jk_0 z_2)$  разлагается с использованием (1), где  $r_1$  и  $\theta_1$  заменено на  $r_2$  и  $\theta_2$ , соответственно.

Исключение величин  $C_{mn}$  из формул (19) и (20) дает

$$D_{mn} = M_n j^n (2n+1) \times \\ \times \left\{ \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{p=|s-n|}^{s+n} [B_s(-1)^m j^{p-s} \alpha(0, s|-m, n|p) \times \right. \\ \times h_p(k_0 d) P_p^{-m}(\cos \theta_0) \exp(-jm\phi_0)] + \\ \left. + \delta_m \exp(jk_0 d \cos \theta_0) \right\}, \quad (21)$$

где

$$M_n = [q_2 j_n'(w) j_n(w_2) - \\ - j_n(w) j_n'(w_2)] / [j_n'(w_2) h_n(w) - q_2 j_n(w_2) h_n'(w)]. \quad (22)$$

Затем, подставляя (21) и (22) в (19), мы получим

$$C_{mn} = \frac{j q_2}{w^2 [q_2 j_n'(w) j_n(w_2) - j_n(w) j_n'(w_2)]} D_{mn}. \quad (23)$$

Для малых значений  $R_2$ , т.е. для  $R_2 \rightarrow 0$ , мы имеем  $w = k_0 R_2 \rightarrow 0$  и  $w_2 = k_2 R_2 = w k_2 / k_0 \rightarrow 0$ . Пользуясь формулами для сферических функций Бесселя и Ханкеля с малым аргументом [26] в выражении (22), мы получим

$$M_0 = -\frac{j f}{3} w^3, \quad M_1 = -\frac{j g_1}{3} w^3, \\ M_n = \frac{j(2n+1)g_n}{[1 \times 3 \times 5 \dots (2n+1)]^2} w^{2n+1}, \quad n \geq 1, \quad (24)$$

где

$$f = 1 - \frac{\rho_0 (c_0)^2}{\rho_2 (c_2)^2}, \quad g_1 = \frac{\rho_0 - \rho_2}{\rho_0 + 2\rho_2}, \\ g_n = \frac{n(\rho_0 - \rho_2)}{n\rho_0 + (n+1)\rho_2}, \quad n \geq 1. \quad (25)$$

Оставляя только старшие (первого порядка) члены относительно  $w$ , т.е. члены, содержащие  $w^3$ , из формул (24) мы видим, что только  $n = 0, 1$ , т.е. только  $D_{00}, D_{-11}, D_{01}$  и  $D_{11}$  ( $|m| \leq n$ ), сохраняются в формуле (21), где  $B_s = B_s(0) + \delta B_s$  заменяется на  $B_s(0)$ , так как произведения более высокого порядка  $w^3 \delta B_s$  не учитываются. Члены с  $n \geq 2$  имеют порядок  $w^5$  и выше и также не учитываются.

Подставляя  $D_{00}, D_{-11}, D_{01}$  и  $D_{11}$  в (17) (т.е. сохраняя только члены с  $s = 0, 1$ ), можно получить  $\delta A_n$  и затем  $\delta B_n$  из формулы (18).

Полное поле, рассеянное на двух сферах, равно  $p_s = p_{s1} + p_{s2}$ , где  $p_{s1}$  и  $p_{s2}$  даются уравнениями (6) и (8). Чтобы выразить  $p_{s2}$  относительно начала координат  $O_1$ , вместо формулы (12) следует использовать соотношение

$$z_n(kr_2) P_n^m(\cos \theta_2) e^{jm\phi_2} = \\ = \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{\mu=-v}^v \sum_{p=|n-v|}^{n+v} (-1)^{v+\mu} j^{v+p-n} (2v+1) \times \\ \times \alpha(m, n|-\mu, v|p) z_p(kr_1) P_p^{m-\mu} \times \\ \times (\cos \theta_1) \exp[j(m-\mu)\phi_1] \times \\ \times j_\nu(kd) P_\nu^\mu(\cos \theta_0) \exp(j\mu\phi_0), \quad r_1 \geq d \quad (26)$$

поскольку интересует дальнейшее поле рассеяния, так что  $r_1 > d$ . Используя (26) и (8), можно выразить  $p_s$  через  $r_1, \theta_1, \phi_1$ :

$$p_s = \sum_{n=0}^{\infty} B_n h_n(k_0 r_1) P_n(\cos \theta_1) + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{\mu=-v}^v \sum_{p=|n-v|}^{n+v} D_{mn} (-1)^{v+\mu} j^{v+p-n} \times \\ \times (2v+1) \alpha(m, n|-\mu, v|p) h_p(k_0 r_1) \times \\ \times P_p^{m-\mu}(\cos \theta_1) \exp[j(m-\mu)\phi_1] \times \\ \times j_\nu(k_0 d) P_\nu^\mu(\cos \theta_0) \exp(j\mu\phi_0), \quad (27)$$

где опять  $p$  изменяется от  $|n-v|$  до  $n+v$  степенями, равными 2. Как было указано выше, вплоть до порядка  $w^3$  в формуле (27) сохраняются только  $D_{00}, D_{-11}, D_{01}$  и  $D_{11}$ . Используя асимптотические

разложения для функций Ханкеля в (28), получим выражение для дальнего поля рассеяния:

$$p_s = \frac{\exp(jk_0 r_1)}{k_0 r_1} G(\theta_1, \phi_1), \quad (28)$$

где

$$G(\theta_1, \phi_1) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n (-j)^{n+1} P_n(\cos \theta_1) + \\ + \sum_{n=0, 1} \sum_{m=-n}^n \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\nu}^{\nu} \sum_{p=|n-\nu|}^{n+\nu} D_{mn} (-1)^{\nu+\mu+1} j^{\nu-n+1} \times \\ \times (2\nu+1) \alpha(m, n | -\mu, \nu | p) \times \\ \times P_p^{m-\mu}(\cos \theta_1) \exp[j(m-\mu)\phi_1] \times \\ \times j_{\nu}(k_0 d) P_{\nu}^{\mu}(\cos \theta_0) \exp(j\mu\phi_0). \quad (29)$$

Сечения рассеяния для обратного рассеяния ( $\sigma_b$ ), для рассеяния вперед ( $\sigma_f$ ) и для полного рассеяния ( $Q_t$ ) имеют вид [19]:

$$\frac{\sigma_b}{\lambda_0^2} = \frac{1}{\pi} |G(\pi, \phi_1)|^2, \quad \frac{\sigma_f}{\lambda_0^2} = \frac{1}{\pi} |G(0, \phi_1)|^2, \quad (30)$$

$$\frac{Q_t}{\lambda_0^2} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\theta_1=0}^{\pi} \int_{\phi_1=0}^{2\pi} |G(\theta_1, \phi_1)|^2 \sin \theta_1 d\theta_1 d\phi_1, \quad (31)$$

где  $\lambda_0 = 2\pi/k_0$  – длина волны в области 0.

По аналогии с уравнениями (16) можно написать

$$G(\theta_1, \phi_1) = G_0(\theta_1, \phi_1) + \delta G(\theta_1, \phi_1) = \\ = G_0(\theta_1) + \delta G(\theta_1, \phi_1), \quad (32)$$

где

$$G_0(\theta_1) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(0) (-j)^{n+1} P_n(\cos \theta_1), \quad (33)$$

в то время как  $\delta G[\theta_1, \phi_1]$  дается выражением (29), в котором  $B_n$  заменено на  $\delta B_n$ .

Из формулы (34) в пренебрежении дифференциалом второго порядка  $|\delta G(\theta_1, \phi_1)|^2$  получим

$$|G(\theta_1, \phi_1)|^2 = G(\theta_1, \phi_1) G^*(\theta_1, \phi_1) = \\ = |G_0(\theta_1)|^2 + 2\text{Re}[G_0^*(\theta_1) \delta G(\theta_1, \phi_1)], \quad (34)$$

где звездочка означает комплексное сопряжение, а  $\text{Re}$  означает действительную часть.

Подставляя (34) в (30), получим член нулевого порядка (невозмущенный)  $\sigma(0)$  и возмущение первого порядка  $\delta\sigma$  для  $\sigma_b$  и  $\sigma_f$ .

Из уравнений (31)–(34) прямым вычислением с использованием ортогональных свойств функ-

ций Лежандра и экспоненциальных функций мы получим

$$\frac{Q_t}{\lambda_0^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_1=0}^{\pi} G_0(\theta_1) G_0^*(\theta_1) \sin \theta_1 d\theta_1 + \\ + \frac{1}{2\pi^2} \text{Re} \left[ \int_{\theta_1=0}^{\pi} \int_{\phi_1=0}^{2\pi} G_0^*(\theta_1) \delta G(\theta_1, \phi_1) \sin \theta_1 d\theta_1 d\phi_1 \right] = \\ = \frac{Q_t(0)}{\lambda_0^2} + \frac{\delta Q_t}{\lambda_0^2}, \quad (35)$$

где

$$\frac{Q_t(0)}{\lambda_0^2} = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|B_n(0)|^2}{2n+1}, \quad (36)$$

$$\frac{\delta Q_t}{\lambda_0^2} = \frac{2}{\pi} \text{Re} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n^*(0) \delta B_n}{2n+1} + \right. \\ \left. + \sum_{n=0, 1} \sum_{m=-n}^n \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{p=|n-\nu|}^{n+\nu} \frac{2\nu+1}{2p+1} (-1)^{\nu+m} j^{\nu-n+p} \times \right. \\ \left. \times B_n^*(0) D_{mn} \alpha(m, n | -m, \nu | p) \times \right. \\ \left. \times j_{\nu}(k_0 d) P_{\nu}^m(\cos \theta_0) \exp(jm\phi_0) \right], \quad (37)$$

а  $p$  изменяется ступеньками, равными 2.

Результаты были проверены с высокой степенью точности для различных величин параметров с помощью теоремы о рассеянии вперед [19, 21], которая для рассматриваемой задачи имеет вид

$$\frac{Q_t(0)}{\lambda_0^2} = \frac{1}{\pi} \text{Im}[G_0(\theta_1 = 0)], \quad (38)$$

$$\frac{\delta Q_t}{\lambda_0^2} = \frac{1}{\pi} \text{Im}[\delta G(\theta_1 = 0, \phi_1)],$$

где  $\text{Im}$  – мнимая часть. Абсолютные ошибки для равенств (38) были менее  $10^{-8}$  в каждом из исследованных случаев.

### 3. ДВЕ СФЕРЫ, ИЗ КОТОРЫХ ОДНА ИМЕЕТ МАЛЫЙ РАДИУС И, ПО КРАЙНЕЙ МЕРЕ, ОДНА НЕ ЯВЛЯЕТСЯ ПРОНИЦАЕМОЙ

Геометрия задачи опять представлена на рис. 1. По крайней мере, одна из двух сфер предполагается непроницаемой (мягкой или твердой). Поле внутри непроницаемой сферы (сфер) равно нулю,

что существенно изменяет граничные условия на ее (их) поверхности (поверхностях). Можно последовательно повторять шаги, аналогичные описанным в предыдущем разделе (это было сделано для проверки результатов), но эквивалентным и более простым методом является подстановка предельных значений  $\rho_v \rightarrow 0$  (для мягкой сферы) или  $\rho_v \rightarrow \infty$  (для твердой сферы) при постоянных  $c_v$  ( $v = 1, 2$ ) для обоих случаев в результаты предыдущего раздела. В данной системе возможны три различных случая, которые рассматриваются ниже.

**(а) Первая сфера непроницаема, а вторая, с малым радиусом, проницаема**

В этом случае предел  $\rho_1 \rightarrow 0$  ( $q_1 \rightarrow 0$ ) для мягкой сферы и  $\rho_1 \rightarrow \infty$  ( $q_1 \rightarrow \infty$ ) для твердой (величина  $c_1$  конечна в обоих случаях) используется при подстановке в результаты Раздела 2. Выражения, которые оказываются отличными от соответствующих выражений Раздела 2, имеют следующий вид (верхние индексы  $s$  и  $h$  относятся к мягкой и твердой сфере, соответственно, и используются только в случае их различия):

$$A_n(0) = 0, \quad A_n = 0 \quad (\delta A_n = 0),$$

поскольку внутри непроницаемой сферы поле отсутствует [ $p_{in,1}(0) = p_{in,1} = 0$ ];

$$B_n^s(0) = -j^n(2n+1)[j_n(w_0)/h_n(w_0)],$$

$$B_n^h(0) = -j^n(2n+1)[j'_n(w_0)/h'_n(w_0)];$$

соотношения (9) (для  $v = 1$ ) и (14) отсутствуют для твердой сферы, а соотношения (12) (для  $v = 1$ ) и (15) – для мягкой; соотношение (17) отсутствует для обоих случаев; соотношение (18) заменяется на

$$\delta B_n^{s,h} = I_n^{s,h} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{m=-s}^s \sum_{p=|s-n|}^{s+n} D_{ms} (-1)^p j^{n+p-s} \times$$

$$\times (2n+1) \alpha(m, s|0, n|p) h_p(k_0 d) \times$$

$$\times P_p^m(\cos \theta_0) \exp(jm\phi_0),$$

где

$$I_n^s = -j_n(w_0)/h_n(w_0), \quad I_n^h = -j'_n(w_0)/h'_n(w_0);$$

остальные уравнения остаются такими же, как в Разделе 2, с учетом вышеуказанных изменений.

**(б) Первая сфера проницаема, а вторая, с малым радиусом, непроницаема**

В этом случае, в результаты Раздела 2 подставляем  $\rho_2 \rightarrow 0$  ( $q_2 \rightarrow 0$ ) для мягкой сферы и  $\rho_2 \rightarrow \infty$  ( $q_2 \rightarrow \infty$ ) для твердой ( $c_2$  конечно в обоих случаях). Выражения, которые изменяются, приводятся ниже, в то время как другие остаются такими же, как в Разделе 2, с учетом этих изменений.

В результате имеем:  $C_{mn} = 0$ , поскольку отсутствует поле внутри непроницаемой сферы ( $p_{in,2} = 0$ ); соотношение (9) отсутствует для случая твердой сферы, а соотношение (10) – для мягкой (оба соотношения берутся для  $v = 2$ ); соотношения (19), (20) и (23) отсутствуют в обоих случаях; а соотношение (22) заменяется на

$$M_n^s = -j_n(w)/h_n(w), \quad M_n^h = -j'_n(w)/h'_n(w). \quad (39)$$

Пользуясь формулами для функций Бесселя и Ханкеля с малым аргументом [19, 22], при  $w \rightarrow 0$  для выражений (39) получим

$$M_0^s = -jw, \quad M_0^h = -jw^3/3,$$

$$M_n^s = -\frac{j(2n+1)w^{2n+1}}{[1 \times 3 \times 5 \dots (2n+1)]^2}, \quad (40)$$

$$M_n^h = \frac{j(2n+1)w^{2n+1}}{[1 \times 3 \times 5 \dots (2n+1)]^2} \frac{n}{n+1}, \quad n \geq 1.$$

Здесь  $M_0^s$  не может быть получено из уравнений (24), (25) путем перехода к пределу  $\rho_2 \rightarrow 0$ , в то время как  $M_n^s$  ( $n \geq 1$ ) может. С другой стороны, как  $M_0^h$ , так и  $M_n^h$  ( $n \geq 1$ ) могут быть получены из (24), (25) в пределе  $\rho_2 \rightarrow \infty$ . Это следует из формулы (26), где для  $m = 0$  и  $\rho_2 \neq 0$  ( $q_2 \neq 0$ ) член, умножаемый на  $q_2$ , в знаменателе превалирует, давая результат (28) для  $M_0$  в пределе  $w \rightarrow 0$ . Однако для  $m = 0$  и  $\rho_2 \rightarrow 0$  ( $q_2 \rightarrow 0$ , мягкая сфера) превалирует другой член в знаменателе, приводя к результату (40) для  $M_0^s$ . Во всех остальных случаях такое явление отсутствует, и остальные формулы (40) получаются как предельные выражения из формул (24) и (25). Аналогичный результат был получен в [19].

Из выражений (40) видно, что  $M_0^s$  превалирует над  $M_n^s$  ( $n \geq 1$ ), имеющим порядок  $w^3$  или выше. Это означает, что в случае мягкой малой сферы доминирующим членом в (21) является тот, который содержит  $M_0^s$ , т.е.  $D_{00}^s$  (члены  $D_{mn}^s$  с  $n \geq 1$  имеют порядок  $w^3$  и выше и здесь опущены):

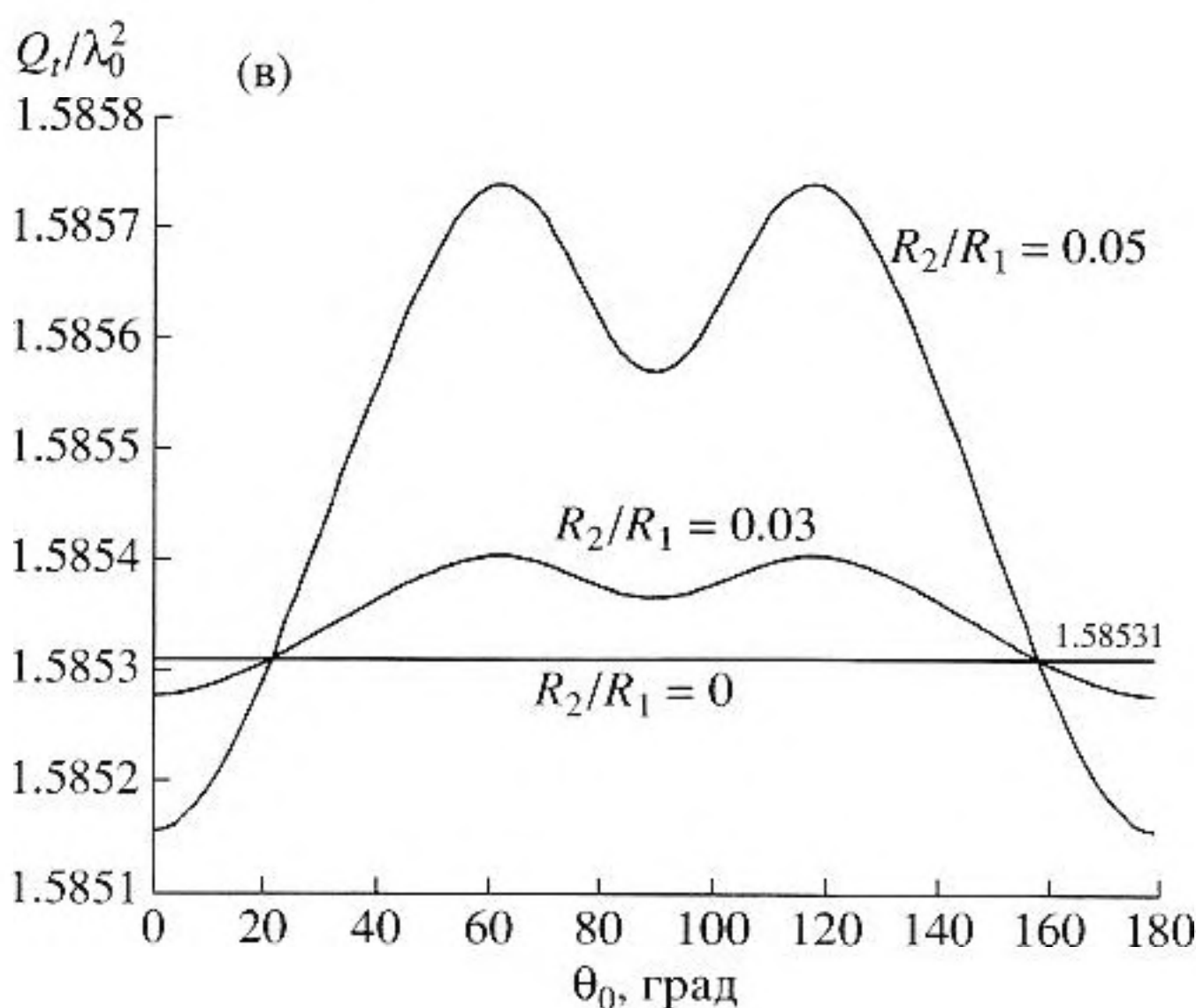
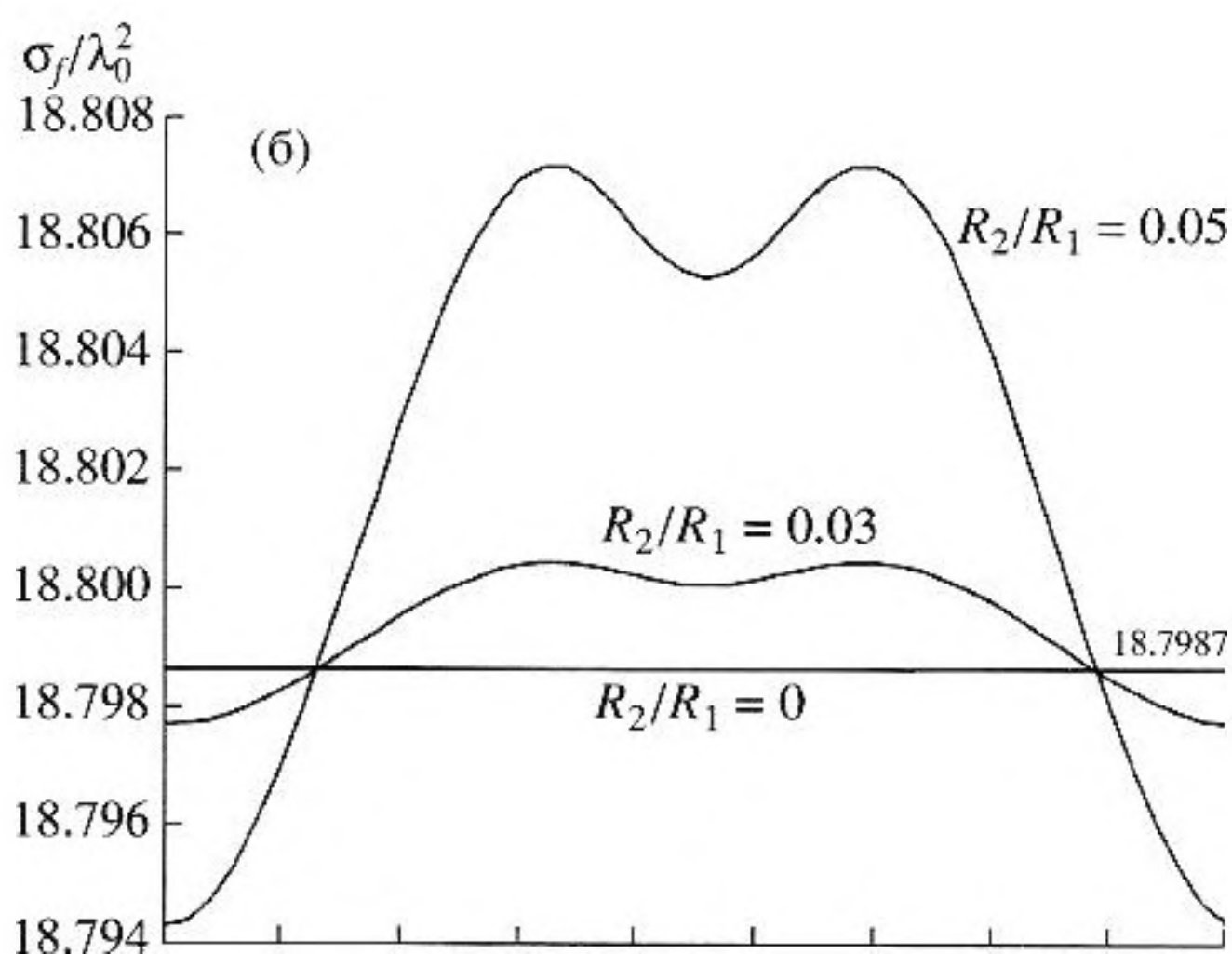
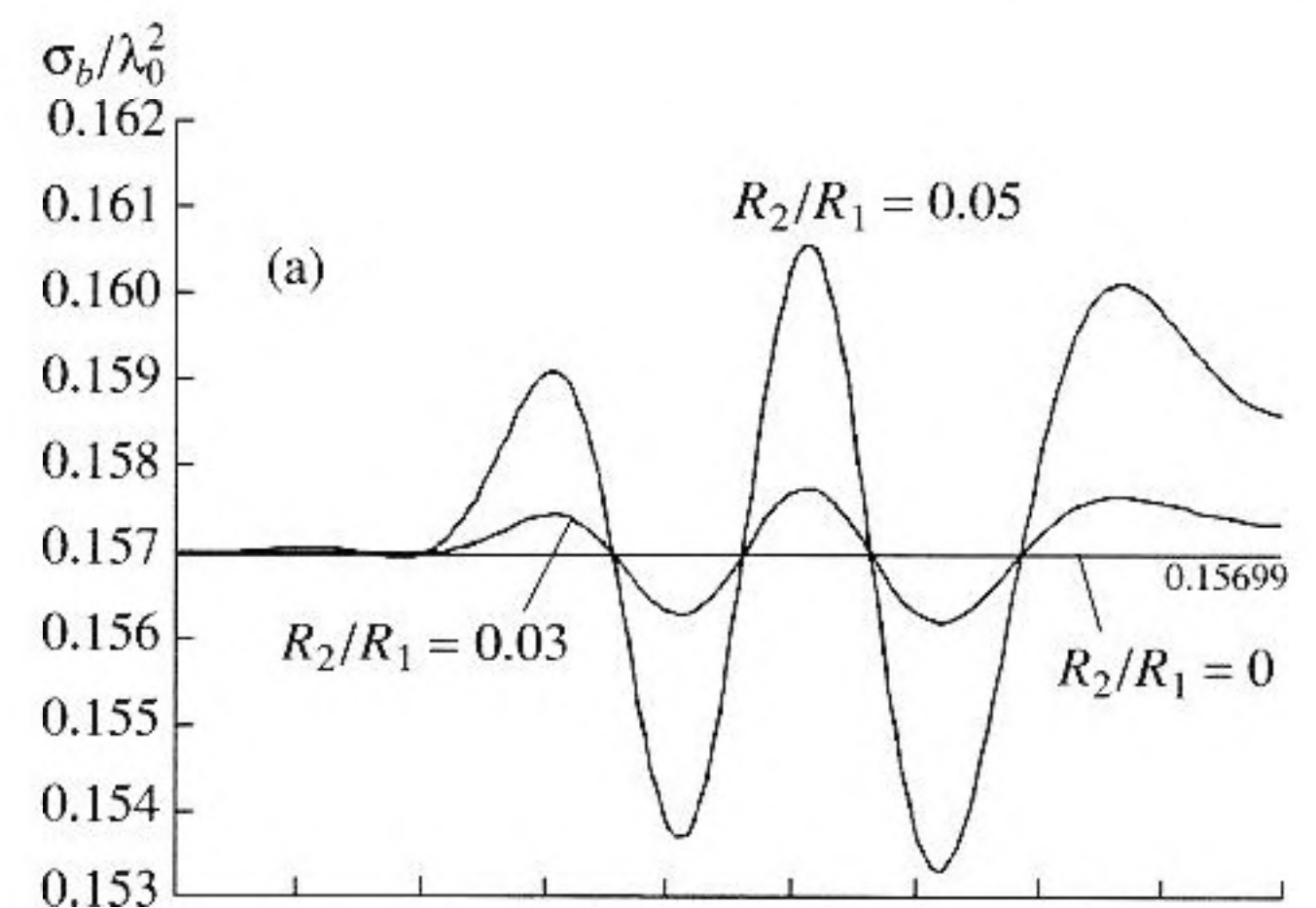
$$D_{00}^s = -jw \left[ \sum_{s=0}^{\infty} B_s^s(0) h_s(k_0 d) P_s(\cos \theta_0) + \right.$$

$$\left. + \exp(jk_0 d \cos \theta_0) \right].$$

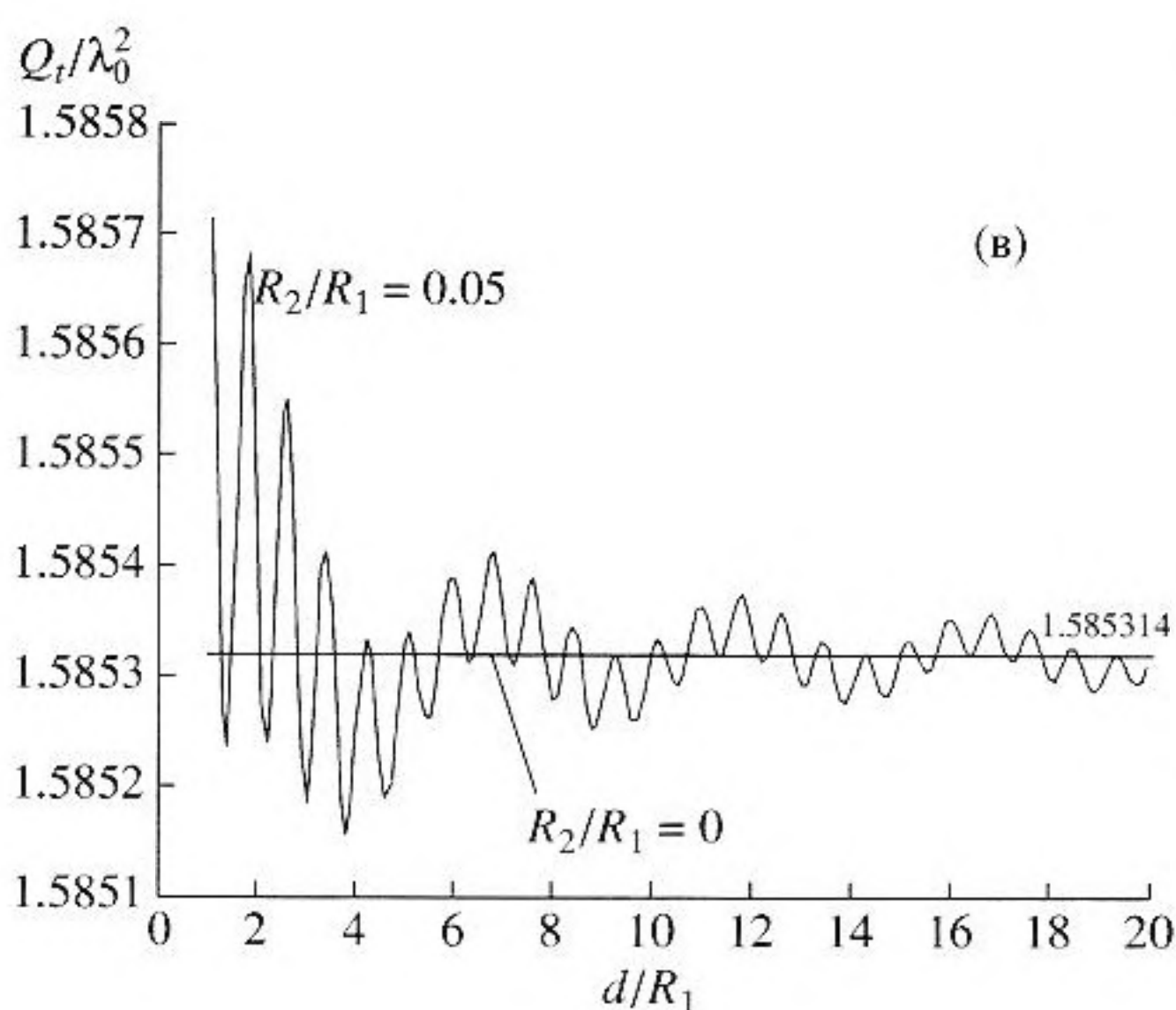
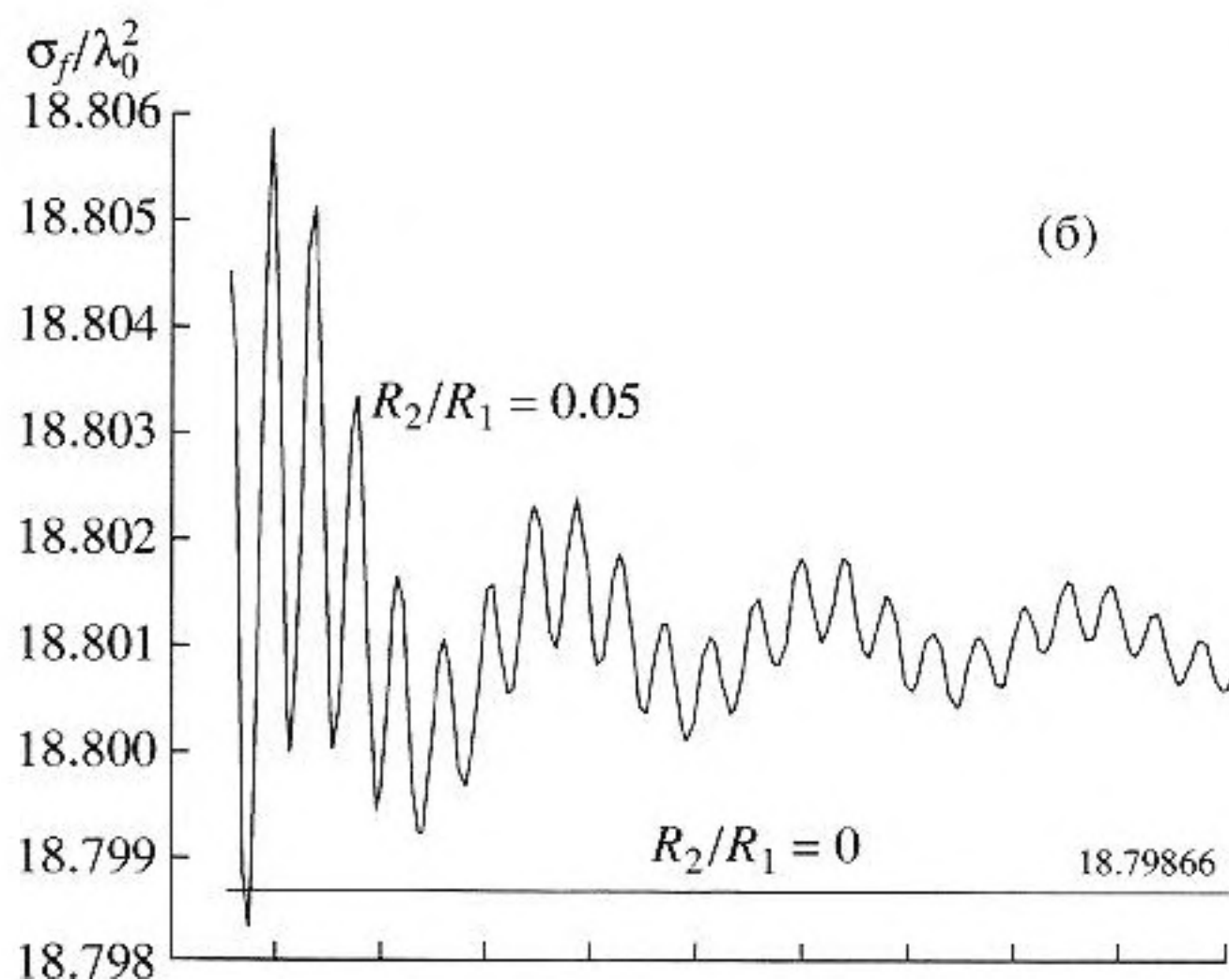
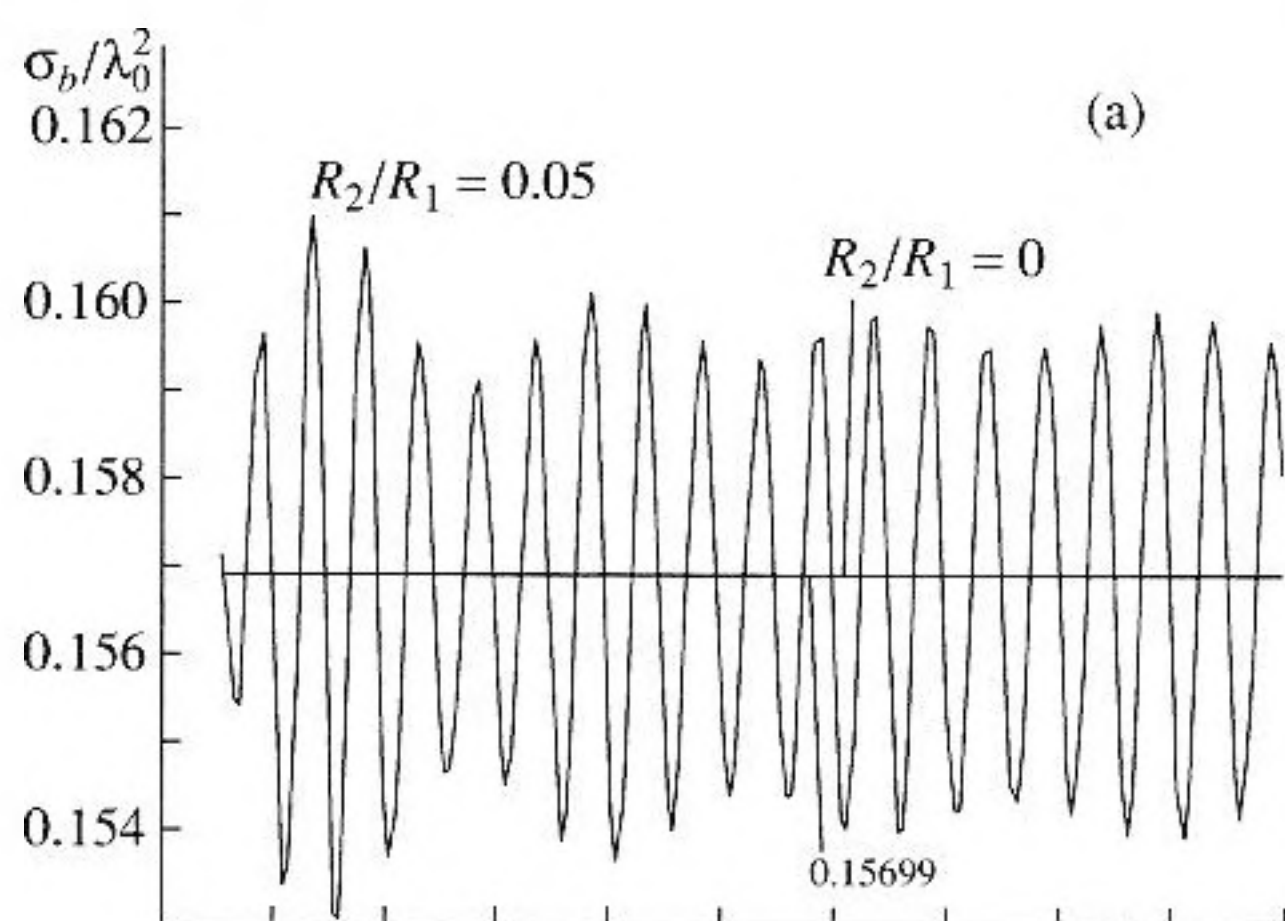
Из выражений (17) и (18) получаем

$$\delta B_n^s = j^{-n} B_n(0) D_{00}^s h_n(k_0 d) P_n(\cos \theta_0), \quad n \geq 0.$$

Очевидно, что в (27), (29) и (37) также сохранится только  $D_{00}^s$ .



**Рис. 2.** Сечения рассеяния для проницаемых сфер с параметрами  $R_1/\lambda_0 = 0.7$ ,  $d/R_1 = 1.1$ ,  $\rho_1/\rho_0 = 1.22$ ,  $c_1/c_0 = 1.27$ ,  $\rho_2/\rho_0 = 2.7$ ,  $c_2/c_0 = 4.3$ . (а) Обратное рассеяние, (б) рассеяние вперед и (в) полное рассеяние.



**Рис. 3.** Сечения рассеяния для проницаемых сфер с параметрами  $R_1/\lambda_0 = 0.7$ ,  $\theta_0 = 45^\circ$ ,  $\rho_1/\rho_0 = 1.22$ ,  $c_1/c_0 = 1.27$ ,  $\rho_2/\rho_0 = 2.7$ ,  $c_2/c_0 = 4.3$ . (а) Обратное рассеяние, (б) рассеяние вперед и (в) полное рассеяние.

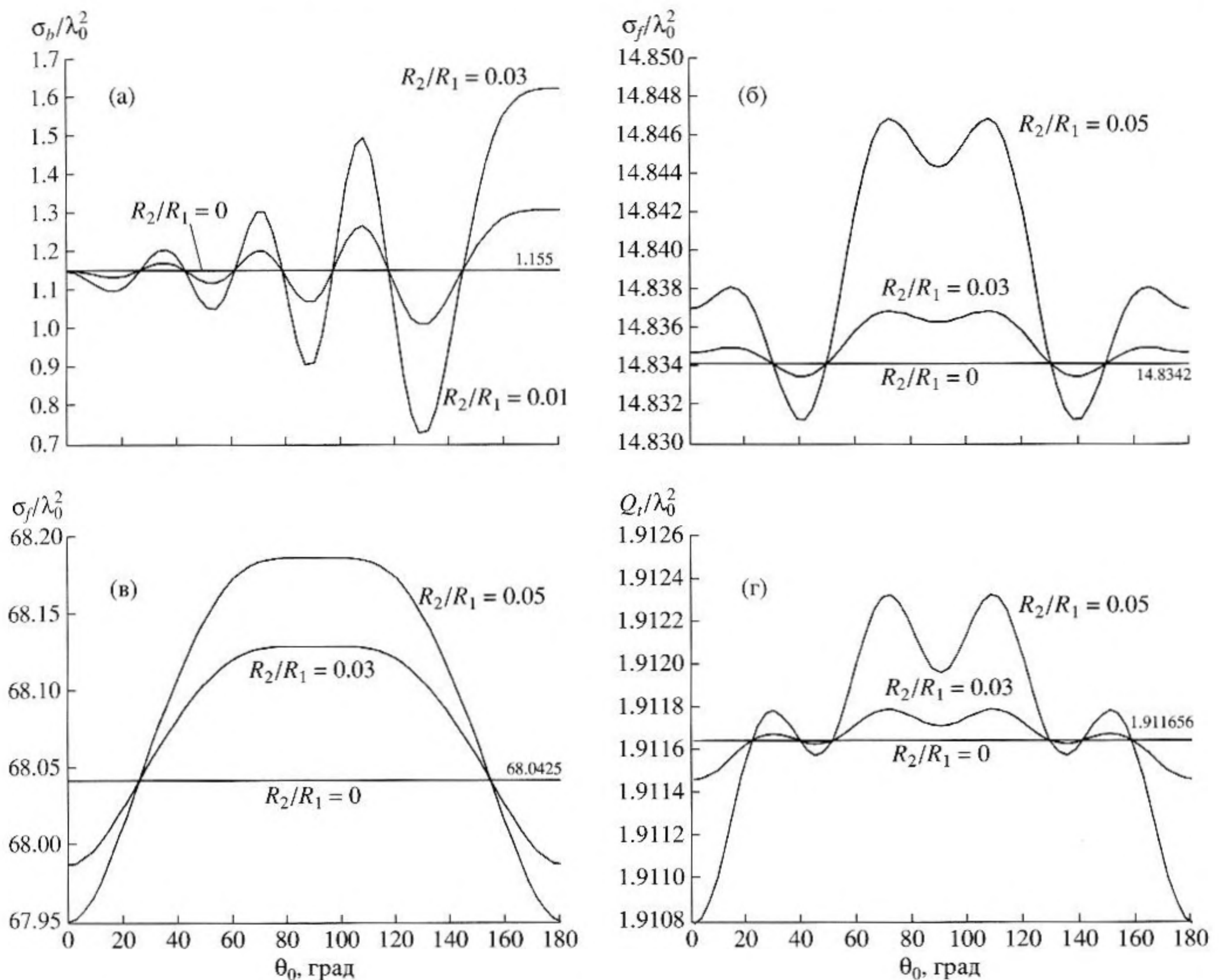


Рис. 4. Сечения рассеяния при  $R_1/\lambda_0 = 0.7$  и  $d/R_1 = 1.1$ . (а) Обратное рассеяние для случая непроницаемых сфер, первая из которых твердая, а вторая мягкая. (б) Рассеяние вперед для случая твердых непроницаемых сфер. (в) Рассеяние вперед для случая мягких непроницаемых сфер. (г) Полное рассеяние для случая твердых непроницаемых сфер.

Для твердой малой сферы формулы (27)–(37) справедливы при  $\rho_2 \rightarrow \infty$ , т.е. при  $f^h = 1$  и  $g_1^h = -1/2$ .

**(с) Обе сферы непроницаемы**

В этом случае используется  $\rho_v \rightarrow 0$  для мягкой сферы и  $\rho_v \rightarrow \infty$  для твердой;  $c_v$  конечно в обоих случаях ( $v = 1, 2$ ). Таким образом, изменение результатов по сравнению с Разделом 2 включает в себя все изменения, описанные для двух предыдущих случаев (а) и (б).

**4. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ**

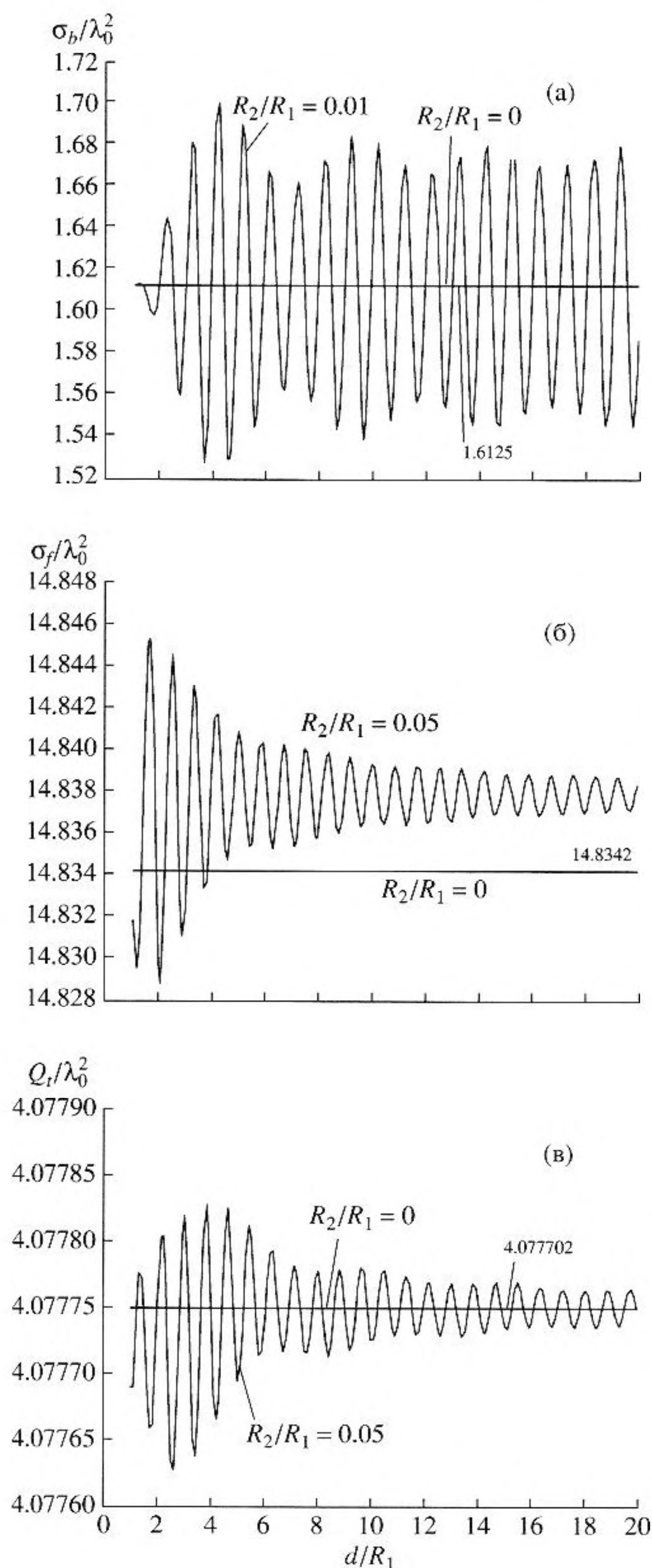
На рис. 2–5 показаны различные сечения рассеяния для конфигурации, изображенной на рис. 1, с проницаемыми и непроницаемыми (мягкими и твердыми) сферами. Рисунки 2 и 3 относятся к

проницаемым сферам, а рис. 4 и 5 – к непроницаемым. Случай  $R_2/R_1 = 0$  соответствует присутствию одной только первой сферы с радиусом  $R_1$ .

Результаты не зависят от угла  $\phi_0$  благодаря геометрии рассеивателя. Результат, ожидаемый исходя из принципа взаимности и наблюдаемый на рис. 2б, 2в и рис. 4б–4г, состоит в том, что  $\sigma_f$  и  $Q_t$  имеют одни и те же значения для  $\theta_0$  и  $\pi - \theta_0$ . Из рис. 3а–3в и 5а–5в видно, что, как и ожидалось, различные сечения рассеяния быстро меняются в зависимости от  $d/R_1$ . Эти изменения происходят значительно быстрее, чем в задаче, где малая сфера находится внутри большой сферы [19].

Из разных рисунков очевидна более высокая чувствительность величины  $\sigma_b$  к присутствию малой сферы по сравнению с чувствительностью величин  $\sigma_f$  и  $Q_t$ , в особенности в случае мягкой ма-





**Рис. 5.** Сечения рассеяния при  $R_1/\lambda_0 = 0.7$  и  $\theta_0 = 45^\circ$ . (а) Обратное рассеяние для случая мягких непроницаемых сфер. (б) Рассеяние вперед для случая твердых непроницаемых сфер. (в) Полное рассеяние для непроницаемых сфер, из которых первая мягкая, а вторая твердая.

лой сферы. Аналогичные особенности были замечены в [19, 20].

Видно, что присутствие малой сферы увеличивает или уменьшает сечение рассеяния другой сферы на несколько процентов, обычно в зависимости от величин параметров, и вызывает дополнительно осцилляции величины сечения. Эти изменения оказываются больше для случая мягкой сферы (пропорциональны  $R_2/R_1$ ) и меньше для случая твердой или проникаемой сферы (пропорциональны  $(R_2/R_1)^3$ ), в соответствии с пояснениями, данными ниже. Они также больше для  $\sigma_b$ , чем для  $\sigma_f$  и  $Q_t$ . Для некоторых особых значений параметров изменения, вносимые малой сферой, отсутствуют, что делает малую сферу "невидимой". Это имеет место в точках пересечения кривых, характеризуемых  $R_2/R_1 \neq 0$ , и линии, соответствующей  $R_2/R_1 = 0$ .

Формулы, полученные в данной статье, позволяют рассчитывать различные сечения рассеяния для любого малого значения отношения  $R_2/R_1$  при постоянных значениях остальных параметров просто путем использования результатов, представленных на рис. 2–5. Дело в том, что  $\delta\sigma$  и  $\delta Q_t$  пропорциональны  $w^3$ , т.е. пропорциональны  $(R_2/R_1)^3$  (или пропорциональны  $w$ , т.е.  $R_2/R_1$ , для случая мягкой малой сферы). То же самое верно для рис. 2а–2в и 3а–3в при различных значениях  $\rho_2 \neq \rho_0$ , когда  $\kappa_2 = \kappa_0$  ( $\kappa_2 \neq \kappa_0$  при  $\rho_2 = \rho_0$ ), где  $\kappa = 1/\rho c^2$  сжимаемость материала. В этом случае  $\delta B_n \sim g_1 [\delta B_n \sim f]$  для каждого  $n \geq 0$ , и, окончательно,  $\delta\sigma$  и  $\delta Q_t$  оказываются пропорциональны этим величинам, что упрощает вычисление различных сечений рассеяния для каждого отдельного значения  $\rho_2/\rho_0$  ( $\kappa_2/\kappa_0$ ) при условии, что остальные параметры задачи остаются постоянными. Эти замечания остаются в силе для обратной задачи вычисления радиуса  $R_2$ , плотности, или сжимаемости малой сферы по измеренному полю рассеяния (см. [19, 20]).

Наконец, на рис. 6а–6в показана формфункция обратного рассеяния ( $FF$ ), определенная в [6, 7]:

$$FF(\pi, \phi_1) = \lim_{r_1 \rightarrow \infty} \frac{2r_1}{R_1} \left| \frac{p_s(\pi, \phi_1)}{p_i} \right| = \frac{2}{k_0 R_1} |G(\pi, \phi_1)|.$$

Здесь использованы соотношения (1) и (32). Мы приводим  $FF$  вместо  $\sigma_b$ , поскольку, из-за присутствия  $|G(\pi, \theta_1)|^2$  в выражении для  $\sigma_b$ , влияние малой сферы оказывается скрытым. Рисунок 6а дает график  $FF$  в зависимости от  $k_0 R_1$  для двух проникаемых сфер, а рис. 6б и 6в показывают такие же зависимости для двух твердых и двух мягких сфер, соответственно. Поведение формфункции зависит от интерференции волн, рассеянных на двух сферах. На рис. 6а можно видеть резонансы рассеяния для двух проникаемых сфер. Присутствие проникаемой или твердой малой сферы становится более заметным на высоких частотах (изменение, пропорциональное  $w^3 = (k_0 R_2)^3$ , см.

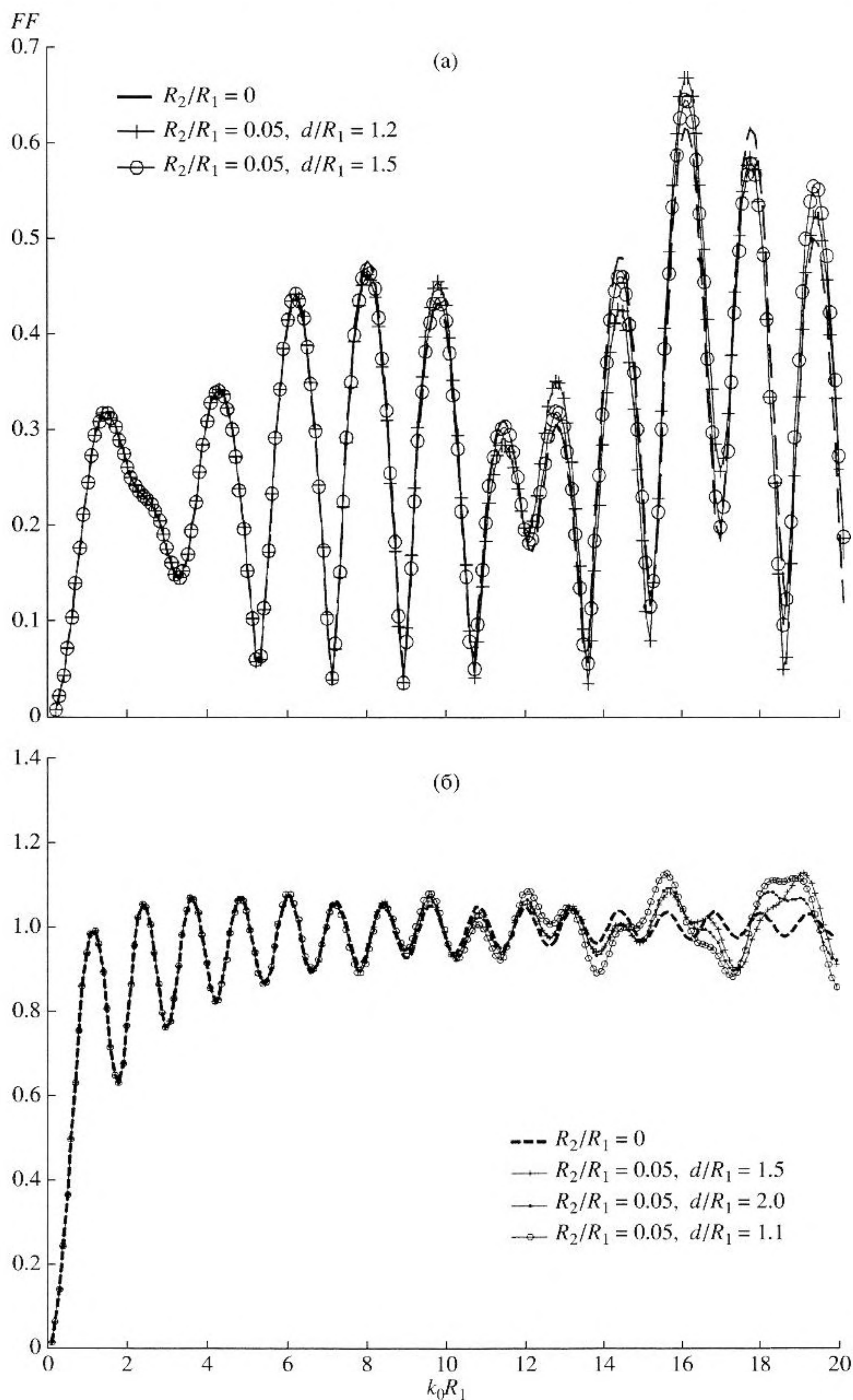


Рис. 6. Формфункции обратного рассеяния для  $\theta_0 = 90^\circ$ . (а) Проницаемые сферы с параметрами  $\rho_1/\rho_0 = 1.22$ ,  $c_1/c_0 = 1.27$ ,  $\rho_2/\rho_0 = 2.7$ ,  $c_2/c_0 = 4.3$ . (б) Твердые непроницаемые сферы. (в) Мягкие непроницаемые сферы.

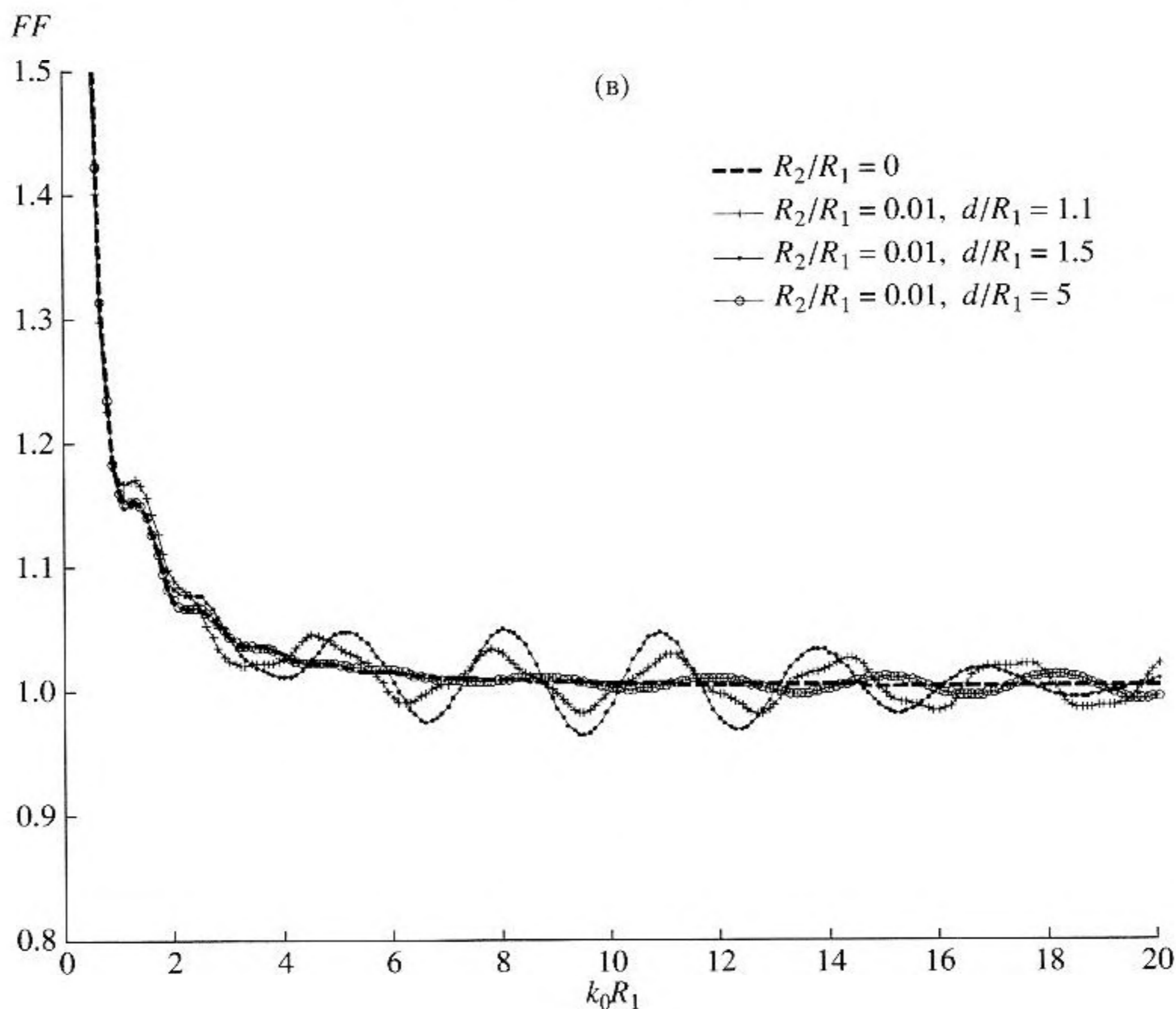


Рис. 6. Продолжение.

рис. 6а, 6б), в то время как присутствие мягкой малой сферы более заметно на низких частотах (изменение, пропорциональное  $w = k_0 R_2$ , см. рис. 6в) вследствие дополнительных осцилляций, которые она вызывает в  $FF$  большой сферы.

Пределы применимости нашего метода и пределы ошибок приближения  $w \rightarrow 0$  были исследованы в [19] (а также в [20] для случая двух цилиндров). Было найдено, что ошибки достаточно малы для значений  $w$  вблизи 1, особенно для  $\sigma_f$  и  $Q_t$  и для твердой или проницаемой малой сферы. Например, в [19] ошибка для  $\sigma_b$  составляла менее 3% при  $w \square 0.25$  в случае мягкой малой сферы и около 6% при  $w \square 0.55$  в случае твердой или проницаемой малой сферы. Ошибка для  $\sigma_f$  была менее 6% для  $w \square 0.4$  и мягкой малой сферы, так же, как и для  $w \square 1.0$  в случае твердой или проницаемой малой сферы. Ошибка для  $Q_t$  была порядка 6% для  $w \square 0.75$  и мягкой малой сферы и порядка 2.5% для  $w \square 1.1$  в случае твердой или проницаемой малой сферы.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Elsherbani A.Z., Kisk A.A. "Modeling of cylindrical objects by circular dielectric and conducting cylinders", IEEE Transactions on Antennas and Propagation. 1992. V. 40. P. 96–99.
2. Ragheb H.A., Hamid M. "Simulation of a cylindrical reflector by conducting circular cylinders", IEEE Transactions on Antennas and Propagation. 1987. V. 35. P. 349–353.
3. Ragheb H.A., Hamid M. "Scattering by N parallel conducting circular cylinders", International Journal of Electronics. 1985. V. 59. P. 407–421.
4. Marnevsкая L. "Diffraction of a plane scalar wave by two spheres", Soviet Physics Acoustics. 1969. V. 14. P. 356–360.
5. Marnevsкая L. "Plane wave scattering by two acoustically rigid spheres", Soviet Physics Acoustics. 1969. V. 15. P. 579–583.
6. Gaunard C.G., Huang H., Strifors H.C. "Acoustic scattering by a pair of spheres", J. Acous. Soc. Amer. 1995. V. 98. P. 495–507.
7. Gabrielli P., Mercier-Finidori M. "Acoustic scattering by two spheres: Multiple scattering and symmetry considerations", J. of Sound and Vibration. 2001. V. 241. P. 423–439.
8. Kapodistrias G., Dahl P.H. "Effects of interaction between two bubble scatterers", J. Acous. Soc. Amer. 2000. V. 107. P. 3006–3017.
9. Skaropoulos N.C., Yagridou H.D., Chrissoulidis D.P. "Interactive resonant scattering by a cluster of air bub-

- bles in water", *J. Acous. Soc. Amer.* 2003. V. 113. P. 3001–3011.
10. Huang H., Gaunard G.C. "Acoustic scattering of a plane wave by two spherical elastic shells", *J. Acous. Soc. Amer.* 1995. V. 98. P. 2149–2156,
  11. Huang H., Gaunard G.C. "Acoustic scattering of a plane wave by two spherical elastic shells above the coincidence frequency", *J. Acous. Soc. Amer.* 1997. V. 101. P. 2659–2668.
  12. Germogenova O.A. "The scattering of a plane electromagnetic wave by two spheres", *Izvestia Akademia Nauk. USSR Seria Geofizika.* 1963. 4. P. 403–405.
  13. Liang C., Lo Y.T. "Scattering by two spheres", *Radio Science.* 1967. V. 2. P. 1481–1495.
  14. Levine S., Olaofe G. "Scattering of electromagnetic waves by two equal spherical particles", *Journal of Colloid and Interface Science.* 1968. V. 27. P. 442–457.
  15. Bruning J.H., Lo Y.T. "Multiple scattering of EM waves by spheres. Part I – multipole expansion and ray-optical solutions", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation.* 1971. V. 19. P. 378–390.
  16. Bruning J.H., Lo Y.T. "Multiple scattering of EM waves by spheres. Part II – numerical and experimental results", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation.* 1971. V. 19. P. 391–400.
  17. Ludwig A.C. "Scattering by two and three spheres computed by the generalized multipole technique", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation.* 1991. V. 39. P. 703–705.
  18. Ioannidou M.P., Skaropoulos N.C., Chrissoulidis D.P. "Study of interactive scattering by clusters of spheres", *J. of the Optical Soc. Amer. A.* 1995. V. 12. P. 1782–1789.
  19. Kakogiannos N.B., Roumeliotis J.A. "Acoustic scattering from a sphere of small radius coated by a penetrable one", *J. Acous. Soc. Amer.* 1995. V. 98. P. 3508–3515.
  20. Roumeliotis J.A., Ziotopoulos A.-G.P., Kokkorakis G.C. "Acoustic scattering by a circular cylinder parallel with another one of small radius", *J. Acous. Soc. Amer.* 2001. V. 109. P. 870–877.
  21. Morse P.M., Ingard K.U. *Theoretical Acoustics*, McGraw-Hill, New York, 1968, Chapter 8. P. 419, 427.
  22. Abramowitz M., Stegun I.A. *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, New York, 1972, Chapter 10. P. 437.
  23. Cruzan O.K. "Translational addition theorems for spherical vector wave functions", *Quarterly of Applied Mathematics.* 1962. V. 20. P. 33–40.

## Acoustic Scattering from Two Spheres, One with a Small Radius

**J. A. Roumeliotis and A. D. Kotsis**

*School of Electrical and Computer Engineering National Technical University of Athens 9 Iroon  
Polytehnion Str. Athens 15773, Greece  
e-mail : iroumel@cc.ece.ntua.gr*

**Abstract**—The scattering of a plane acoustic wave from an acoustically penetrable or impenetrable (soft or hard) sphere separated at a distance from another sphere, also penetrable or impenetrable (soft or hard), of acoustically small radius, is examined. The penetrable spheres and the surrounding medium are fluids or fluid-like; i.e., they do not support shear waves. Separation of variables, in conjunction with translational addition theorems for spherical wave functions, is used. Analytical expressions are obtained for the scattered pressure field and the scattering cross sections. Numerical results are given for penetrable and impenetrable spheres, showing the influence of the small sphere on the scattering cross sections of the other sphere.