

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ
ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК 534.26:537.874.6

РЕШЕНИЕ ТРЕХМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ ВОЛН
НА ГРУППЕ ОБЪЕКТОВ

© 2007 г. А. Г. Кюркчан, Е. А. Скородумова

Московский технический университет связи и информатики

111024 Москва, ул. Авиамоторная 8а

E-mail: kyurkchan@yandex.ru

Поступила в редакцию 8.12.05 г.

Метод диаграммных уравнений распространен на трехмерные задачи дифракции волн на группе тел. Основу метода составляет сведение исходной задачи к системе из N (N – количество рассеивателей) интегрооператорных уравнений второго рода относительно диаграмм рассеяния отражателей. С использованием разложений диаграмм рассеяния в ряды по сферическим угловым гармоникам задача сводится к алгебраической системе уравнений относительно коэффициентов этих разложений. Получено явное (асимптотическое) решение задачи в случае, когда рассеивающие тела достаточно далеки друг от друга. Показано, что метод может быть применен для моделирования характеристик рассеяния волн телами сложной геометрии.

PACS: 43.20.Fn, 43.20.Bi

ВВЕДЕНИЕ

Задача рассеяния на группе отражателей остается одной из наиболее сложных краевых задач, и в то же время является весьма актуальной, что подтверждает наличие довольно свежих публикаций, таких, как, например, [1]. Однако при этом большинство известных методов ее решения характеризуется слабой сходимостью при малых расстояниях между объектами [1, 2]. Метод диаграммных уравнений (МДУ), впервые предложенный в работе [3] и апробированный позднее на целом ряде задач дифракции, оказался универсальным и высокоэффективным методом решения краевых задач для уравнения Гельмгольца. В его основе лежит сведение исходной задачи к решению системы из N (по количеству отражателей) интегрооператорных уравнений второго рода относительно диаграмм рассеяния отдельных отражателей. Принципиальное отличие МДУ при решении задачи рассеяния на группе объектов и от [1], и от метода Тверского [2], состоит в том, что в МДУ не требуется знания диаграммы рассеяния одиночного тела без учета его взаимодействия с другими.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим трехмерную задачу дифракции первичного волнового поля U^0 на группе из двух тел. Переход к произвольной совокупности отражателей совершенно очевиден.

Полное поле U представим в виде

$$U = U^0 + U_1^1 + U_2^1, \quad (1)$$

где $U_j^1, j = 1, 2$, – поле, порожденное “токами”, распределенными на S_j – поверхности j -го тела.

В настоящей работе рассматривается краевая задача с импедансными краевыми условиями:

$$\Delta U_j^1 + k^2 U_j^1 = 0, \quad (2)$$

$$U|_{S_j} = \frac{W_j}{k} \frac{\partial U}{\partial n_j} \Big|_{S_j}, \quad (3)$$

где $\frac{\partial}{\partial n_j}$ – дифференцирование в направлении внешней к S_j нормали, $k = \frac{\omega}{c}$, $W_j = \frac{Z_j}{ic\rho}$, причем c – скорость звука, ρ – плотность среды, Z_j – локальный акустический импеданс, постоянный на S_j – границе рассеивателя.

Для полного поля по аналогии с [4] можно ввести следующее представление:

$$U = U^0 + \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2 + i\infty} \exp(-ikr_j \cos \alpha) \hat{g}_j(\alpha, \beta; \theta_j, \varphi_j) \sin \alpha d\alpha d\beta + \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2 + i\infty} \exp(-ik\mathbf{p}_j \cdot \mathbf{r}_i) g_i(\psi_i, \beta) \sin \alpha d\alpha d\beta, \quad (4)$$

$\psi_j = \alpha$, если $j = 1$, $\psi_j = \pi - \alpha$, если $j = 2$, $i, j = 1, 2, j \neq i$,

$$\mathbf{p}_j = \{ \sin \alpha \cos \beta; \sin \alpha \sin \beta; (-1)^j \cos \alpha \}.$$

В этом выражении $g_j(\theta_j, \varphi_j)$ – диаграмма рассеяния j -го тела, т.е. функция, связанная с U_j^1 соотношением вида

$$U_j^1 = \frac{\exp(-ikr_j)}{kr_j} \left[g_j(\theta_j, \varphi_j) + O\left(\frac{1}{kr_j}\right) \right].$$

Диаграмма рассеяния g_j выражается следующим интегралом [4]:

$$g_j(\alpha, \beta) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} V_j(\theta_j, \varphi_j) K_j(\gamma_j; \theta_j, \varphi_j) \exp\{ik\rho_j(\theta_j, \varphi_j) \times (5) \\ \times [\sin \alpha \sin \theta_j \cos(\beta - \varphi_j) + \cos \alpha \cos \theta_j]\} d\theta_j d\varphi_j,$$

в котором $r_j = \rho_j(\theta_j, \varphi_j)$ – уравнение поверхности S_j в сферической системе координат j -го тела,

$$V_j(\theta_j, \varphi_j) = -\frac{k}{4\pi} \left[\rho_j^2(\theta_j, \varphi_j) \sin \theta_j \frac{\partial U}{\partial r_j} - \rho'_{j\theta_j} \sin \theta_j \frac{\partial U}{\partial \theta_j} - \frac{\rho'_{j\varphi_j}}{\sin \theta_j} \frac{\partial U}{\partial \varphi_j} \right] \Big|_{r_j = \rho_j},$$

$$K_j(\gamma_j; \theta_j, \varphi_j) = \left\{ 1 - i \frac{W_j}{\kappa_j} \left[\rho_j \cos \gamma_j \sin \theta_j - \rho'_{j\theta_j} \sin \theta_j \frac{\partial \cos \gamma_j}{\partial \theta_j} - \frac{\rho'_{j\varphi_j}}{\sin \theta_j} \frac{\partial \cos \gamma_j}{\partial \varphi_j} \right] \right\}, \quad (6)$$

$$\cos \gamma_j = \sin \theta_j \sin \alpha \cos(\varphi_j - \beta) + \cos \theta_j \cos \alpha,$$

$$\kappa_j = \sqrt{[\rho_j^2(\theta_j, \varphi_j) + \rho_{j\theta_j}^{\prime 2}] \sin^2 \theta_j + \rho_{j\varphi_j}^{\prime 2}}.$$

$\hat{g}_j(\alpha, \beta; \theta_j, \varphi_j)$ – диаграмма рассеяния j -го тела в системе координат, повернутой так, что ось z совмещена с направлением в точку наблюдения, т.е.

$$\hat{g}_j(\alpha, \beta; \theta_j, \varphi_j) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} V_j(\theta'_j, \varphi'_j) K_j(\hat{\gamma}_j; \theta'_j, \varphi'_j) \times \\ \times \exp(ik\rho_j(\theta'_j, \varphi'_j) \cos \hat{\gamma}_j) d\theta'_j d\varphi'_j, \\ \cos \hat{\gamma}_j = \{ \sin \theta'_j \sin(\varphi'_j - \varphi_j) \sin \alpha \cos \beta + \\ + [\sin \theta_j \cos \theta'_j - \cos \theta_j \sin \theta'_j \cos(\varphi'_j - \varphi_j)] \sin \alpha \sin \beta + \\ + [\cos \theta_j \cos \theta'_j + \sin \theta_j \sin \theta'_j \cos(\varphi'_j - \varphi_j)] \cos \alpha \} = \\ = \mathbf{p}^T A_j \mathbf{i}_{r'_j},$$

где

$$\mathbf{p}^T = (\sin \alpha \cos \beta, \sin \alpha \sin \beta, \cos \alpha),$$

$$\mathbf{i}_{r'_j} = \frac{\mathbf{r}'_j}{|\mathbf{r}'_j|},$$

$$A_j = \begin{pmatrix} -\sin \varphi_j & \cos \varphi_j & 0 \\ -\cos \varphi_j \cos \theta_j & -\sin \varphi_j \cos \theta_j & \sin \theta_j \\ \cos \varphi_j \sin \theta_j & \sin \varphi_j \sin \theta_j & \cos \theta_j \end{pmatrix}$$

– матрица поворота j -й системы координат, в результате которого ось z совмещается с направлением в точку наблюдения.

Представление (4) позволяет найти функцию U всюду в $R^3 \setminus \bar{E}$, где \bar{E} – выпуклая оболочка особенностей аналитического продолжения волнового поля U [3].

С использованием соотношений (4) и (5) для диаграмм рассеяния может быть получена следующая система интегрооператорных уравнений второго рода:

$$g_j(\alpha, \beta; \theta_0, \varphi_0) = g_j^0(\alpha, \beta; \theta_0, \varphi_0) +$$

$$+ \frac{1}{8\pi^2 i} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2} + i\infty} K_j(\gamma_j; \theta_j, \varphi_j) \times$$

$$\times \left[ik^2 \rho_j^2(\theta_j, \varphi_j) \hat{g}_j(\alpha', \beta'; \theta_j, \varphi_j) \sin \theta_j \cos \alpha' + \right. \\ \left. + k\rho'_{j\theta_j} \sin \theta_j \hat{g}'_{j\theta_j} + \frac{k\rho'_{j\varphi_j}}{\sin \theta_j} \hat{g}'_{j\varphi_j} \right] \times \quad (7)$$

$$\times \exp[ik\rho_j(\theta_j, \varphi_j)(\cos \gamma_j - \cos \alpha')] \times$$

$$\times \sin \alpha' d\alpha' d\beta' d\theta_j d\varphi_j + \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\frac{\pi}{2} + i\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2} + i\infty} \exp(-ik\mathbf{p}'_j \mathbf{r}_{ij}) \times$$

$$\times g_{j0}^0(\alpha, \beta; \psi'_i, \beta') g_i(\psi'_i, \beta'; \theta_0, \varphi_0) \sin \alpha' d\alpha' d\beta'.$$

Здесь

$$g_j^0(\alpha, \beta; \theta_0, \varphi_0) = R_j g_{j0}^0(\alpha, \beta; \theta_0, \varphi_0),$$

а функция $g_{j0}^0(\alpha, \beta; \theta_0, \varphi_0)$ определяется соотношениями (5), (6), в которых величина U должна быть заменена на U^0 . При этом

$$R_j = \exp(-ik\mathbf{q}\mathbf{r}_{0j}), \quad i, j = 1, 2, \quad j \neq i,$$

$$\mathbf{q} = \{ \sin \theta_0 \cos \varphi_0; \sin \theta_0 \sin \varphi_0; \cos \theta_0 \}.$$

При $r_{ij} \rightarrow \infty$ система (7) распадается на два независимых уравнения, из которых могут быть

определены диаграммы рассеяния каждого из тел где
без учета взаимодействия между ними.

АЛГЕБРАИЗАЦИЯ

Сведем задачу к системе алгебраических уравнений. Для этого подставим в систему (7) разложения диаграмм рассеяния в обобщенные ряды Фурье:

$$\begin{aligned}
 g_j(\alpha, \beta; \theta_0, \varphi_0) &= \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n a_{nm}^j(\theta_0, \varphi_0) P_n^m(\cos \alpha) \exp(im\beta), \\
 \hat{g}_j(\alpha, \beta; \theta, \varphi) &= \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \hat{a}_{nm}^j(\theta, \varphi) P_n^m(\cos \alpha) \exp(im\beta), \quad (8) \\
 g_j^0(\alpha, \beta; \theta_0, \varphi_0) &= \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n a_{nm}^{j0}(\theta_0, \varphi_0) P_n^m(\cos \alpha) \exp(im\beta),
 \end{aligned}$$

где [4]

$$\begin{aligned}
 \hat{a}_{nm}^j(\theta, \varphi) &= \sum_{s=-n}^n a_{ns}^j(\theta_0, \varphi_0) \times \\
 &\times i^s \sqrt{\frac{(n+s)!}{(n-s)!}} P_{ms}^n(\cos \theta) \exp(is\varphi),
 \end{aligned}$$

$P_n^m(\cos \alpha)$ – присоединенные функции Лежандра,
 $P_{ms}^n(\cos \theta)$ – обобщенные функции Лежандра [5].

В результате получим следующую систему алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}
 a_{nm}^j &= a_{nm}^{j0} + \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\nu}^{\nu} [G_{nm, \nu\mu}^{jj} a_{\nu\mu}^j + G_{nm, \nu\mu}^{ji} a_{\nu\mu}^i], \\
 i, j &= 1, 2; \quad i \neq j.
 \end{aligned}$$

С использованием известного разложения [6]

$$\begin{aligned}
 \exp[ik\rho_j(\theta_j, \varphi_j) \cos \gamma_j] &= \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n i^n (2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \times \\
 &\times j_n(k\rho_j) P_n^m(\cos \alpha) P_n^m(\cos \theta_j) \exp[im(\beta - \varphi_j)]
 \end{aligned}$$

нетрудно установить, что

$$a_{nm}^{j0}(\theta_0, \varphi_0) = R_j R_{nm}^j(\theta_0, \varphi_0),$$

$$\begin{aligned}
 R_{nm}^j(\alpha, \beta) &= i^n (2n+1) \frac{(n-m)! ik^2}{(n+m)! 4\pi} \times \\
 &\times \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} Q_{nm}^j \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{p=-q}^q (-i)^q (2q+1) \frac{(q-p)!}{(q+p)!} \times \\
 &\times \left[i\rho_j^2(\theta, \varphi) \sin \theta j_q'(k\rho_j) P_q^p(\cos \theta) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{i\rho_j'}{k} \sin \theta j_q(k\rho_j) \frac{dP_q^p(\cos \theta)}{d\theta} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{p\rho_j'}{k \sin \theta} j_q(k\rho_j) P_q^p(\cos \theta) \right] \exp^{ip\varphi} d\theta d\varphi \times \\
 &\times P_q^p(\cos \alpha) \exp(-ip\beta).
 \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned}
 G_{nm, \nu\mu}^{jj} &= i^{n-\nu} (2n+1) \frac{(n-m)! i}{(n+m)! 4\pi} \times \\
 &\times \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left[k^2 \rho_j^2(\theta, \varphi) h_{\nu}^{(2)}(k\rho_j) P_{\nu}^{\mu}(\cos \theta) \sin \theta - \right. \\
 &\quad \left. - h_{\nu}^{(2)}(k\rho_j) (\sin \theta) k\rho_j' \frac{d}{d\theta} P_{\nu}^{\mu}(\cos \theta) - \right. \\
 &\quad \left. - i\mu \frac{k\rho_j'}{\sin \theta} h_{\nu}^{(2)}(k\rho_j) P_{\nu}^{\mu}(\cos \theta) \right] Q_{nm}^j d\theta d\varphi, \\
 G_{nm, \nu\mu}^{ji} &= i^n (2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \times \\
 &\times \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{p=-q}^q (-i)^q (2q+1) \frac{(q-p)!}{(q+p)!} S_{\nu\mu, qp}^{ji}(\mathbf{r}_{ij}) \times \\
 &\times \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} Q_{nm}^j \left[-k^2 \rho_j^2(\theta, \varphi) \sin \theta j_q'(k\rho_j) P_q^p(\cos \theta) + \right. \\
 &\quad \left. + k\rho_j' \sin \theta j_q(k\rho_j) \frac{dP_q^p(\cos \theta)}{d\theta} + \right. \\
 &\quad \left. + i \frac{pk\rho_j'}{\sin \theta} j_q(k\rho_j) P_q^p(\cos \theta) \right] \exp(ip\varphi) d\theta d\varphi,
 \end{aligned}$$

причем

$$Q_{nm}^j(\theta, \varphi) = \left\{ j_n(k\rho_j)P_n^m(\cos\theta) + \frac{W_j}{\kappa_j} \left[(-1)\rho_j(\theta, \varphi) \sin\theta j_n'(k\rho_j)P_n^m(\cos\theta) + \frac{\rho_{j\theta}' \sin\theta}{k\rho_j(\theta, \varphi)} j_n(k\rho_j) \frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta} - \frac{im\rho_{j\varphi}'}{k\rho_j \sin\theta} j_n(k\rho_j)P_n^m(\cos\theta) \right] \right\} \exp(-im\varphi),$$

$$S_{\nu\mu, qp}^{ji}(\mathbf{r}_{ij}) = \sum_{s=|\nu-q|}^{\nu+q} b_s^{(\nu\mu qp)} (-i)^{s+1} \times h_s^{(2)}(kr_{ij}) P_s^{\mu-p}(\cos\theta_{ij}) \exp[i(\mu-p)\varphi_{ij}],$$

$$b_s^{(\nu\mu qp)} = (-1)^p \left\{ \frac{(\nu+\mu)!(q+p)!(s-\mu+p)!}{(\nu-\mu)!(q-p)!(s+\mu-p)!} \right\}^{1/2} \times (\nu q 0 0 | s 0) (\nu q \mu, -p | s, \mu - p),$$

$(n_1 n_2 m_1 m_2 | n, m_1 + m_2)$ – коэффициенты Клебша–Гордана [5], $j_n(k\rho_j)$, $h_n^{(2)}(kr_{ij})$ – сферические функции Бесселя первого и третьего рода соответственно, φ_{ij} – полярный угол в i -й системе координат начала координат (“центра” O_j) j -го тела, $r_{12} = r_{21}$ – расстояние между рассеивателями. Коэффициенты $b_s^{(\nu\mu qp)} = 0$, если хотя бы одно из выражений

$$(\nu + \mu), (q + p), (s - \mu + p),$$

$$(\nu - \mu), (q - p), (s + \mu - p)$$

меньше нуля [7].

Найдя диаграммы $g_1(\theta, \varphi; \theta_0, \varphi_0)$ и $g_2(\theta, \varphi; \theta_0, \varphi_0)$, определим общую диаграмму рассеяния двух тел по следующей формуле

$$g(\alpha, \beta; \theta, \varphi) = \bar{R}_1 g_1(\alpha, \beta; \theta, \varphi) + \bar{R}_2 g_2(\alpha, \beta; \theta, \varphi),$$

где черта означает комплексное сопряжение.

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

Введем линейные операторы L_j , такие что

$$L_j[g_j(\alpha, \beta; \theta_0, \varphi_0)] = R_j g_{j0}^0(\alpha, \beta; \theta_0, \varphi_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi/2+i\infty} \int_0^{\pi/2+i\infty} \exp(-ik\mathbf{p}'_j \mathbf{r}_{ij}) g_{j0}^0(\alpha, \beta; \psi'_i, \beta') \times g_i(\psi'_i, \beta'; \theta_0, \varphi_0) \sin\alpha' d\alpha' d\beta', \quad (9)$$

Пусть $G_j(\alpha, \beta; \theta_0, \varphi_0)$ – диаграмма рассеяния одиночного тела, которая удовлетворяет уравнению [4]

$$L_j[G_j(\alpha, \beta; \theta_0, \varphi_0)] = g_{j0}^0(\alpha, \beta; \theta_0, \varphi_0).$$

Тогда в силу линейности операторов L_j имеем

$$g_j(\alpha, \beta; \theta_0, \varphi_0) = R_j G_j(\alpha, \beta; \theta_0, \varphi_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi/2+i\infty} \int_0^{\pi/2+i\infty} \exp(-ik\mathbf{p}'_j \mathbf{r}_{ij}) G_j(\alpha, \beta; \psi'_i, \beta') \times g_i(\psi'_i, \beta'; \theta_0, \varphi_0) \sin\alpha' d\alpha' d\beta', \quad i, j = \overline{1, 2}, \quad i \neq j. \quad (10)$$

Выражения (10) представляют собой систему интегральных уравнений Тверского [2]. Как видно в (10), при решении задачи дифракции на группе тел методом Тверского необходимо сначала определить диаграммы рассеяния одиночных рассеивателей $G_j(\alpha, \beta; \theta, \varphi)$. При использовании МДУ в процессе решения задачи сразу определяются диаграммы рассеяния тел с учетом их взаимного влияния.

При $kr_{12} = kr_{21} = kl \gg 1$, оценивая интегралы по методу перевала, получаем, что

$$g_j(\mathbf{p}; \mathbf{q}) \approx R_j G_j(\mathbf{p}; \mathbf{q}) + Q G_j(\mathbf{p}; \mathbf{q}_{ij}) g_i(\mathbf{q}_{ij}; \mathbf{q}), \quad (11)$$

$$\text{где } \mathbf{q}_{ij} = \frac{\mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}}, \quad Q = \frac{\exp(-ikl)}{kl},$$

$$g_j(\mathbf{q}_{ji}; \mathbf{q}) = \frac{R_j G_j(\mathbf{q}_{ji}; \mathbf{q}) + R_i G_i(\mathbf{q}_{ij}; \mathbf{q}) \cdot Q G_j(\mathbf{q}_{ji}; \mathbf{q}_{ij})}{1 - Q^2 G_j(\mathbf{q}_{ji}; \mathbf{q}_{ij}) G_i(\mathbf{q}_{ij}; \mathbf{q}_{ji})}. \quad (12)$$

Формулы (11), (12) дают асимптотическое решение задачи при условии, что нам известны функции $G_j(\mathbf{p}; \mathbf{q})$.

Полученное решение позволяет проводить вычисления с приемлемой точностью при выполнении неравенства [8]

$$\frac{l}{a_1 + a_2} > \frac{2}{\pi} \max_j(ka_j). \quad (13)$$

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

1. Сравнение МДУ с методом Тверского

Сравним изложенный метод с методом В. Тверского. Для этого рассмотрим в качестве примера трехмерную задачу дифракции на двух сферах, т.е. при

$$\rho_j(\theta_j, \varphi_j) = a_j = \text{const.}$$

Диаграмма рассеяния для уединенной сферы известна:

$$G_j(\mathbf{p}; \mathbf{q}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n A_{nm}^{sj} P_n^m(\cos \alpha) P_n^m(\cos \theta_0) \exp[im(\beta - \varphi_0)], \quad (14)$$

где

$$A_{nm}^{sj} = -i(2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{j_n(ka_j) - W_j j_n'(ka_j)}{h_n^{(2)}(ka_j) - W_j (h_n^{(2)})'(ka_j)}$$

В результате для системы Тверского получаем:

$$a_{nm}^j = A_{nm}^{sj} \left(R_j P_n^m(\cos \theta_0) \exp(-im\varphi_0) + \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{p=-q}^q S_{qp, nm}^{ji} a_{qp}^i \right),$$

а для системы уравнений МДУ соответственно имеем:

$$\begin{aligned} a_{nm}^j \{ 1 - ih_n^{(2)}(ka_j)(ka_j)^2 [j_n(ka_j) - W_j j_n'(ka_j)] \} = \\ = -R_j (2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} (ka_j)^2 j_n'(ka_j) P_n^m(\cos \theta_0) \times \\ \times \exp(-im\varphi_0) [j_n(ka_j) - W_j j_n'(ka_j)] + \\ + (2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} j_n'(ka_j) (ka_j)^2 \times \end{aligned}$$

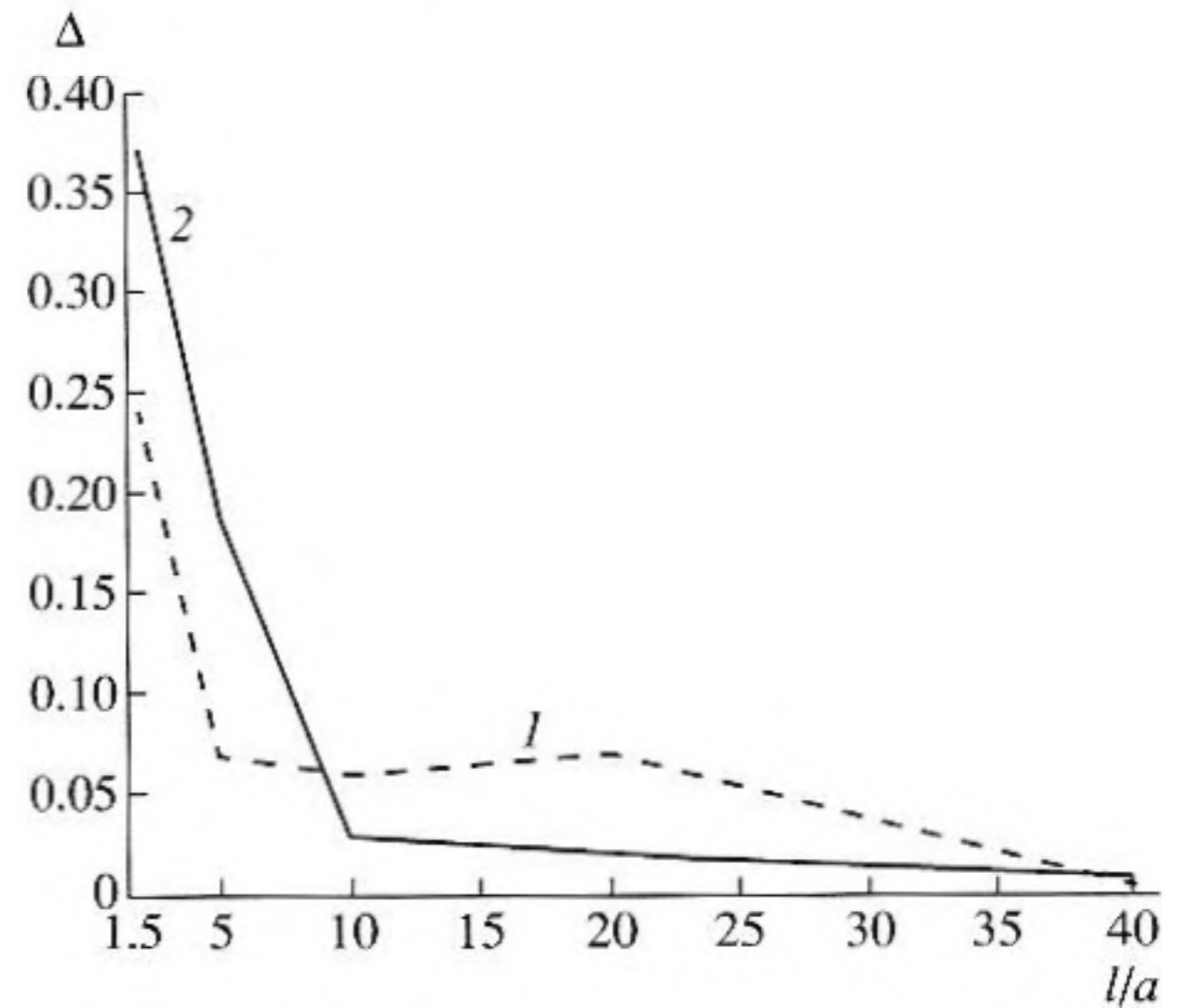


Рис. 1. Проверка выполнения оптической теоремы для асимптотического решения.

$$\times [j_n(ka_j) - W_j j_n'(ka_j)] \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{\mu=-v}^v S_{v\mu, nm}^{ji} a_{v\mu}^i.$$

Были проведены соответствующие расчеты для случая $W_{1,2} = 0$, $ka_{1,2} = 2\pi$, $kr_{12} = kr_{21} = 20\pi$. Рассматривался случай падения плоской единичной волны под углами $\theta_0 = \pi/2$, $\varphi_0 = \pi/2$. Вычисления показали, что разность результатов расчетов по МДУ и по методу Тверского при одних и тех же размерах алгебраических систем не более 10^{-7} .

2. Численное исследование асимптотического решения

Подставив $G_j(\mathbf{p}; \mathbf{q})$ из (14) в уравнения (11) и (12), получим асимптотическое решение поставленной задачи для двух сфер. Исследуем правильность полученных результатов при помощи проверки выполнения оптической теоремы, согласно которой [6]

$$\text{Im}g(\theta_0, \varphi_0) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} |g(\theta, \varphi)|^2 \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (15)$$

Были проведены соответствующие расчеты для сфер с $ka_{1,2} = 2\pi$ и $ka_{1,2} = \pi$ в случае, когда $W_{1,2} = 0$. Рассматривался случай падения единичной плоской волны под углами $\theta_0 = \pi/2$, $\varphi_0 = \pi/2$. Результаты приведены на рис. 1. Здесь l/a — это относительное расстояние между сферами,

$$\Delta = \left| \left(4\pi \text{Im}g(\theta_0, \varphi_0) + \int_{\Omega} |g(\theta, \varphi)|^2 \sin \theta d\theta d\varphi \right) / 4\pi \text{Im}g(\theta_0, \varphi_0) \right|,$$

Таблица 1. Величины $|g(\theta, \varphi)|$ при $\theta = \pi/2$ и $\varphi = 0$ для двух сфер с $ka_{1,2} = 3$

N	$kl = 6.1$		$kl = 12$	
	$W_{1,2} = 0$	$W_{1,2} = -i$	$W_{1,2} = 0$	$W_{1,2} = -i$
9	14.4733232416376	12.3789665651589	14.7354628538649	12.7540651410606
10	14.4733307355927	12.3786856844168	14.7354628724186	12.7540651521329
11	14.4733185048094	12.3786248022575	14.7354628727455	12.7540651523673
12	14.4733199636076	12.3786206823834	14.7354628727513	12.7540651523711
13	14.4733202964274	12.3786206384598	14.7354628727514	12.7540651523712

Таблица 2. Величины $|g(\theta, \varphi)|$ при $\theta = \pi/2$ и $\varphi = 0$ для двух цилиндров с $ka_{1,2} = 3$, $kh_{1,2} = 6$

N	$kl = 6.1$		$kl = 12$	
	$W_{1,2} = 0$	$W_{1,2} = -i$	$W_{1,2} = 0$	$W_{1,2} = -i$
14	17.4522706156386	16.4533130262486	20.4427966927940	18.7320593260142
15	17.5109517912967	16.5294535616708	20.4697154059304	18.8599365846519
16	17.4382614233307	16.5471553421368	20.5552325210790	18.8883006345149
17	17.4280589370975	16.5387459470267	20.5183746428128	18.8844385225344
18	17.4366344259997	16.5327638794349	20.5087774626898	18.8612839778997

кривая 1 соответствует случаю $ka_{1,2} = \pi$, кривая 2 – $ka_{1,2} = 2\pi$.

Из графика на рис. 1 видно, что при расстояниях l между сферами, удовлетворяющих неравенству (13), оптическая теорема выполняется уже с достаточно хорошей точностью.

3. Исследование сходимости вычислительного алгоритма

В табл. 1 и 2 приведены данные, иллюстрирующие скорость сходимости вычислительного алгоритма для двух сфер с $ka_{1,2} = 3$, и двух цилиндров с $ka_{1,2} = 3$, $kh_{1,2} = 6$. Видно, что для рассеивателей с аналитической границей (сферы) шесть верных значащих цифр устанавливаются уже при $N = 9 = 1.5kd_{1,2}$ даже при минимальном расстоянии между объектами ($kl = 6.1$). В случае же тел с неаналитической границей (цилиндры) четыре верных значащих цифры устанавливаются при $N = 2.1kd_{1,2}$.

4. Исследование взаимного влияния тел

Сложность решения задачи рассеяния на группе тел заключается в необходимости учета взаимного влияния объектов, обусловленного переотражениями между ними. Рассмотрим в ка-

честве примера задачу дифракции на двух сферах с $ka_{1,2} = 3$ и на двух цилиндрах с $ka_{1,2} = 3$, $kh_{1,2} = 6$. Сравним диаграммы рассеяния вышеуказанных объектов с учетом влияния и без такового для случая акустически мягких (при $W_{1,2} = 0$) и поглощающих ($W_{1,2} = -i$) тел. Все диаграммы рассеяния рассчитывались в зависимости от угла θ в плоскости $\varphi = 0, \pi$. Рассматривался случай падения единичной плоской волны под углами $\theta_0 = \pi/2$, $\varphi_0 = 0$. На рис. 2–3 приведены диаграммы рассеяния для цилиндров, расположенных на расстоянии $k\Delta = 0.1$ друг от друга (где Δ – минимальное расстояние между точками поверхностей тел). На рисунках кривая 1 соответствует диаграмме рассеяния с учетом влияния, кривая 2 – без учета. Видно, что для поглощающих тел взаимное влияние выражено слабее, чем для акустически мягких.

Видно также, что взаимодействие сравнительно слабо сказывается на уровне и ширине главного лепестка диаграммы рассеяния, т.к. главный лепесток формируется как результат интерференции полей, рассеянных отдельными отражателями. Рассеяние же в области боковых лепестков с учетом и без учета взаимодействия отличается весьма заметно (на десятки процентов).

Рис. 4 иллюстрирует некую интегральную характеристику зависимости степени взаимодействия тел от расстояния между ними. По оси абс-

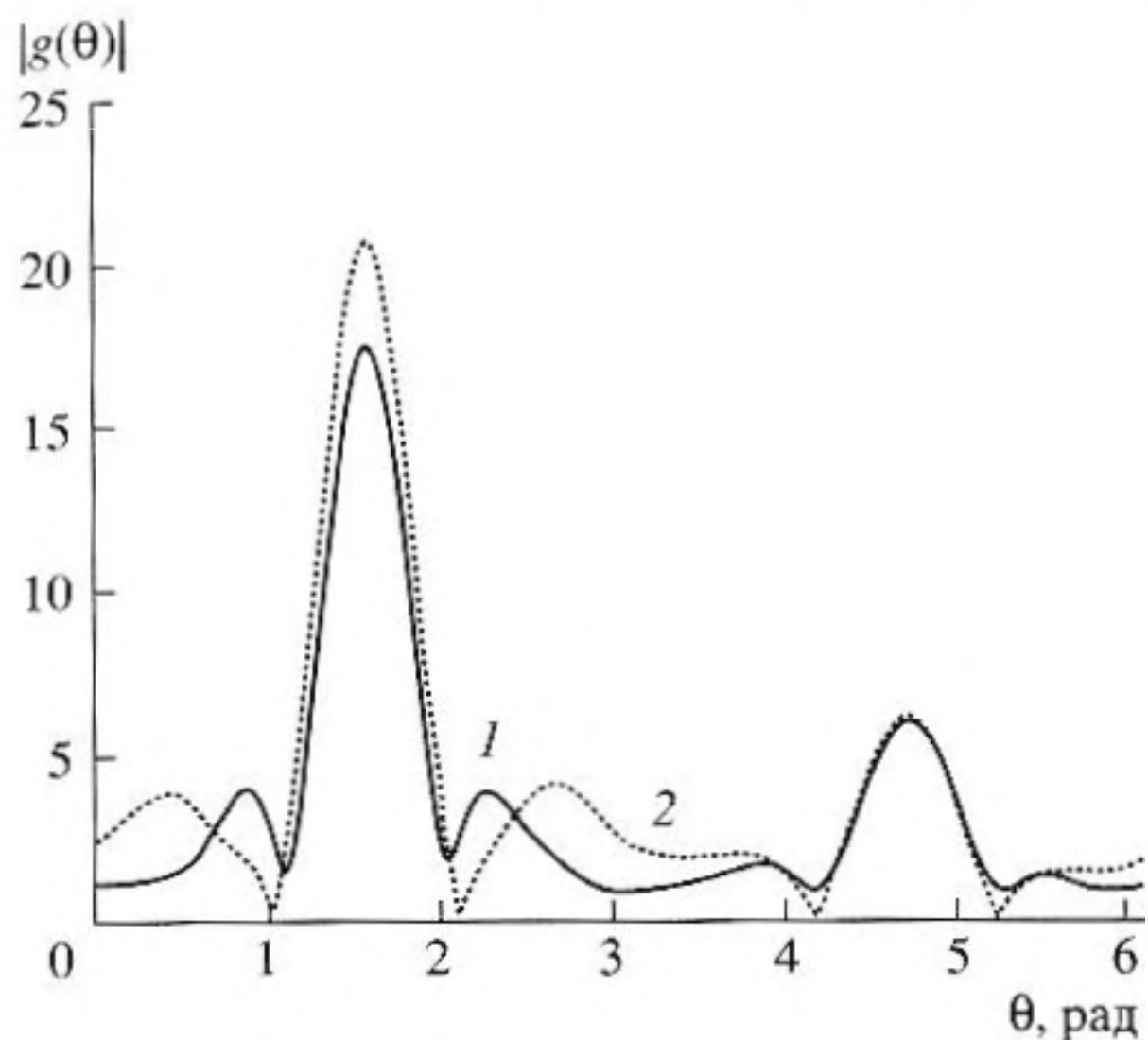


Рис. 2. Диаграммы рассеяния для двух цилиндров с $ka_{1,2} = 3, kh_{1,2} = 6 (W_{1,2} = 0)$.

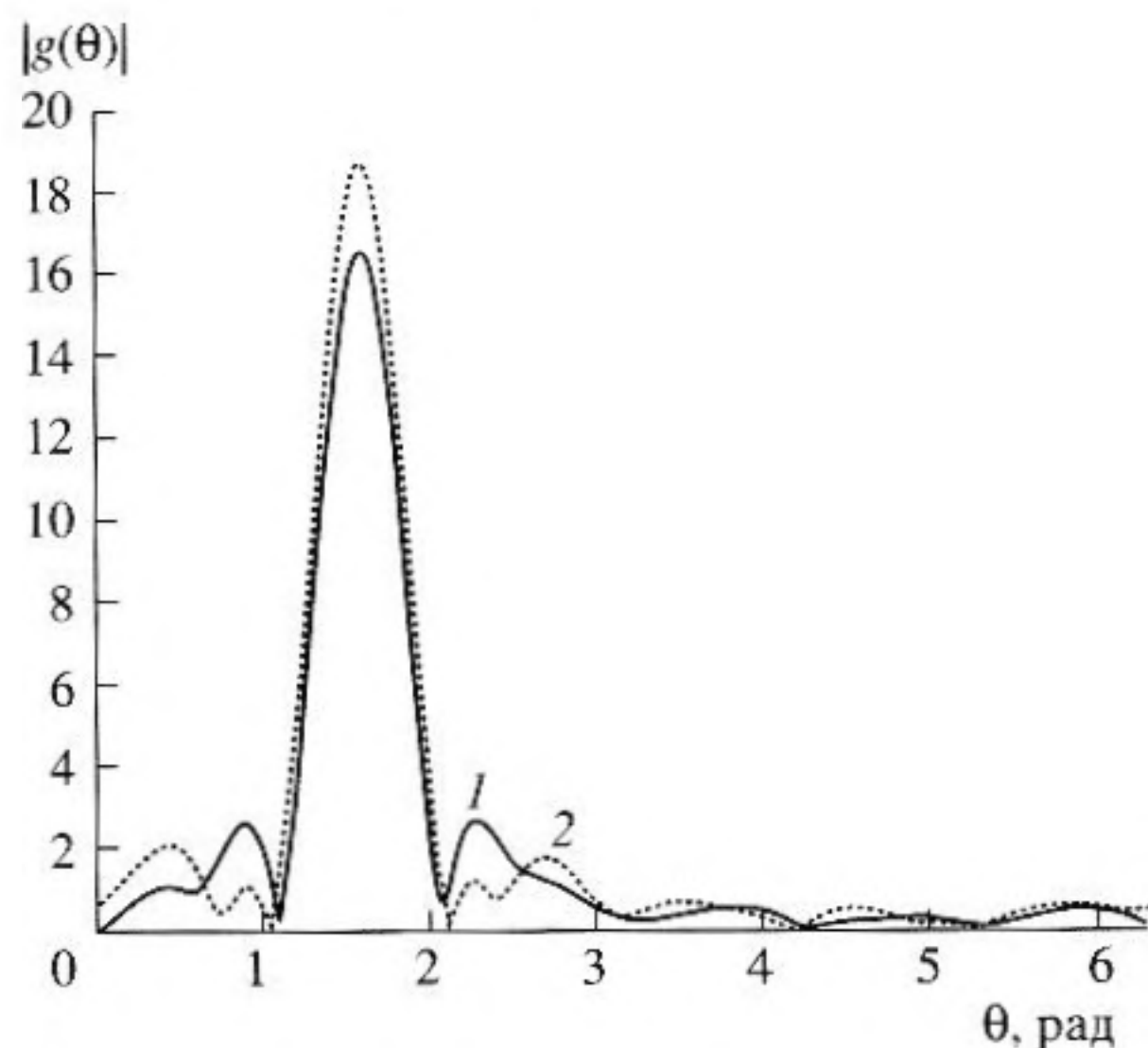


Рис. 3. Диаграммы рассеяния для двух цилиндров с $ka_{1,2} = 3, kh_{1,2} = 6 (W_{1,2} = -i)$.

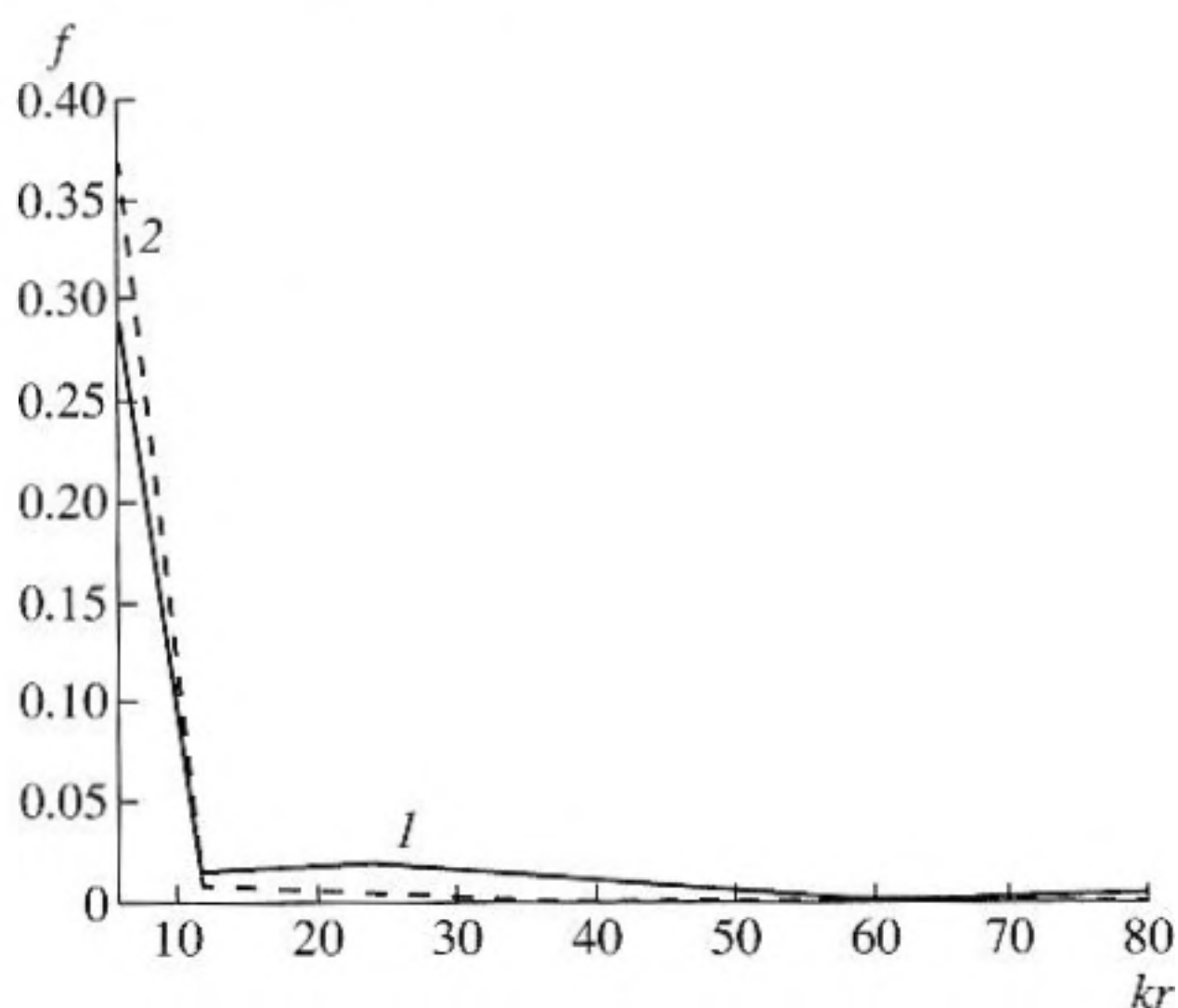


Рис. 4. График зависимости степени взаимодействия от расстояния для двух цилиндров с $ka_{1,2} = 3, kh_{1,2} = 6$.

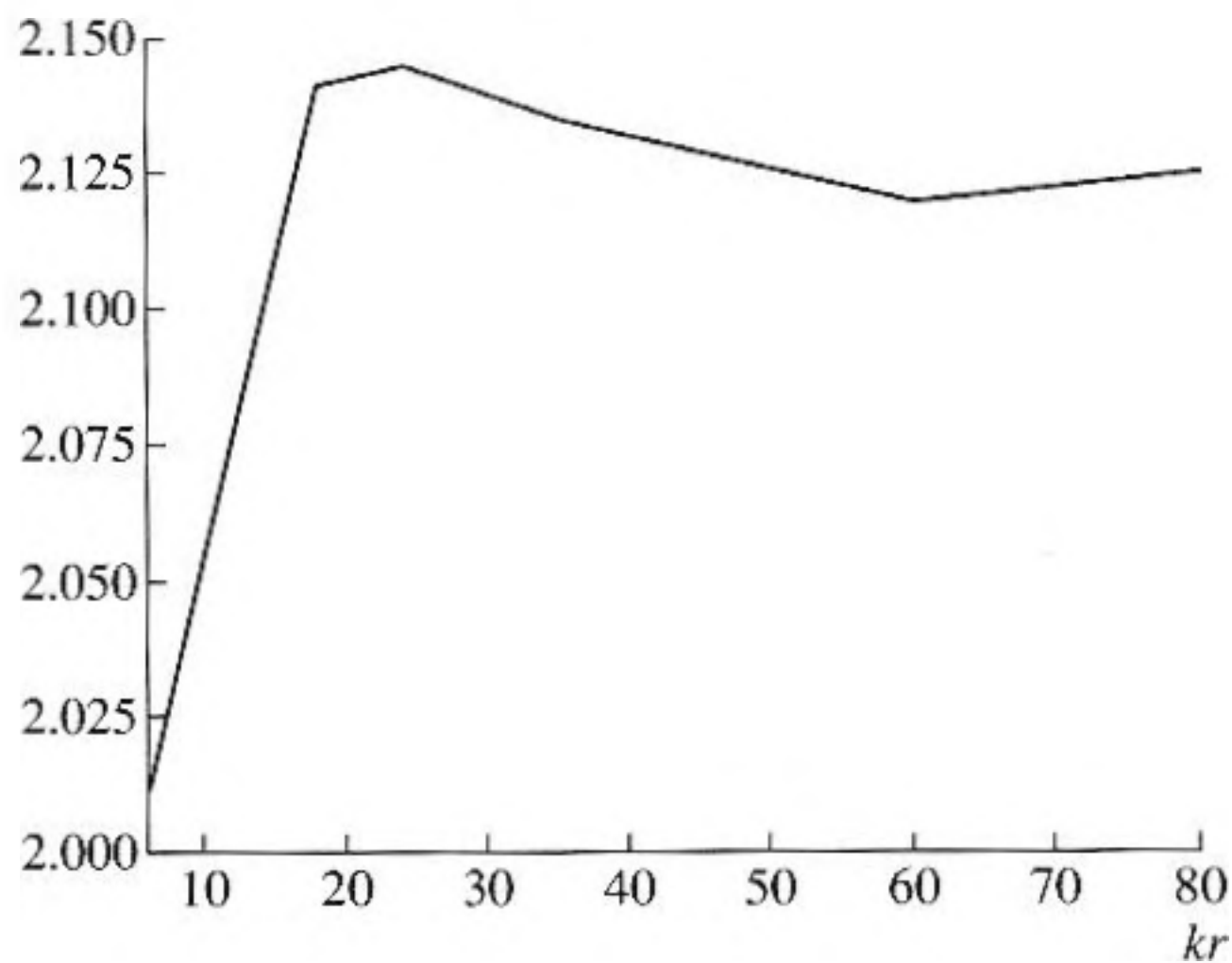


Рис. 5. Поведение отношения интегральных поперечников рассеяния для двух цилиндров с $ka_{1,2} = 3, kh_{1,2} = 6, W_{1,2} = -i$ в зависимости от расстояния между ними.

цисс отложено расстояние между рассеивателями, а по оси ординат функция f :

$$f = \left| \frac{\int_{\Omega} |g(\theta, \varphi)|^2 \sin \theta d\theta d\varphi - \int_{\Omega} |\tilde{g}(\theta, \varphi)|^2 \sin \theta d\theta d\varphi}{\int_{\Omega} |g(\theta, \varphi)|^2 \sin \theta d\theta d\varphi} \right|,$$

где $g(\theta, \varphi)$ – диаграмма рассеяния для двух тел с учетом взаимодействия, а $\tilde{g}(\theta, \varphi)$ – без учета. Кривая 1 соответствует случаю $W_{1,2} = 0$, кривая 2 – $W_{1,2} = -i$. Из рисунка видно, что степень взаимодействия между телами резко уменьшается уже

на расстоянии $2kd$ (где d – максимальный размер тела) между объектами.

5. Проверка теоремы Уфимцева

Для “черных” (или звукопоглощающих) тел имеет место теорема П.Я. Уфимцева [9], согласно которой интегральный поперечник рассеяния акустически мягкого тела ровно в 2 раза больше интегрального поперечника рассеяния “черного” тела, имеющего тот же теневой контур (т.е. границу между освещенной и теневой частями поверхности тела). Известно (см., например, [6]), что одной из моделей звукопоглощающего тела является рассеиватель с согласованным поверхностным импедансом. На рис. 5 приведен график поведения от-

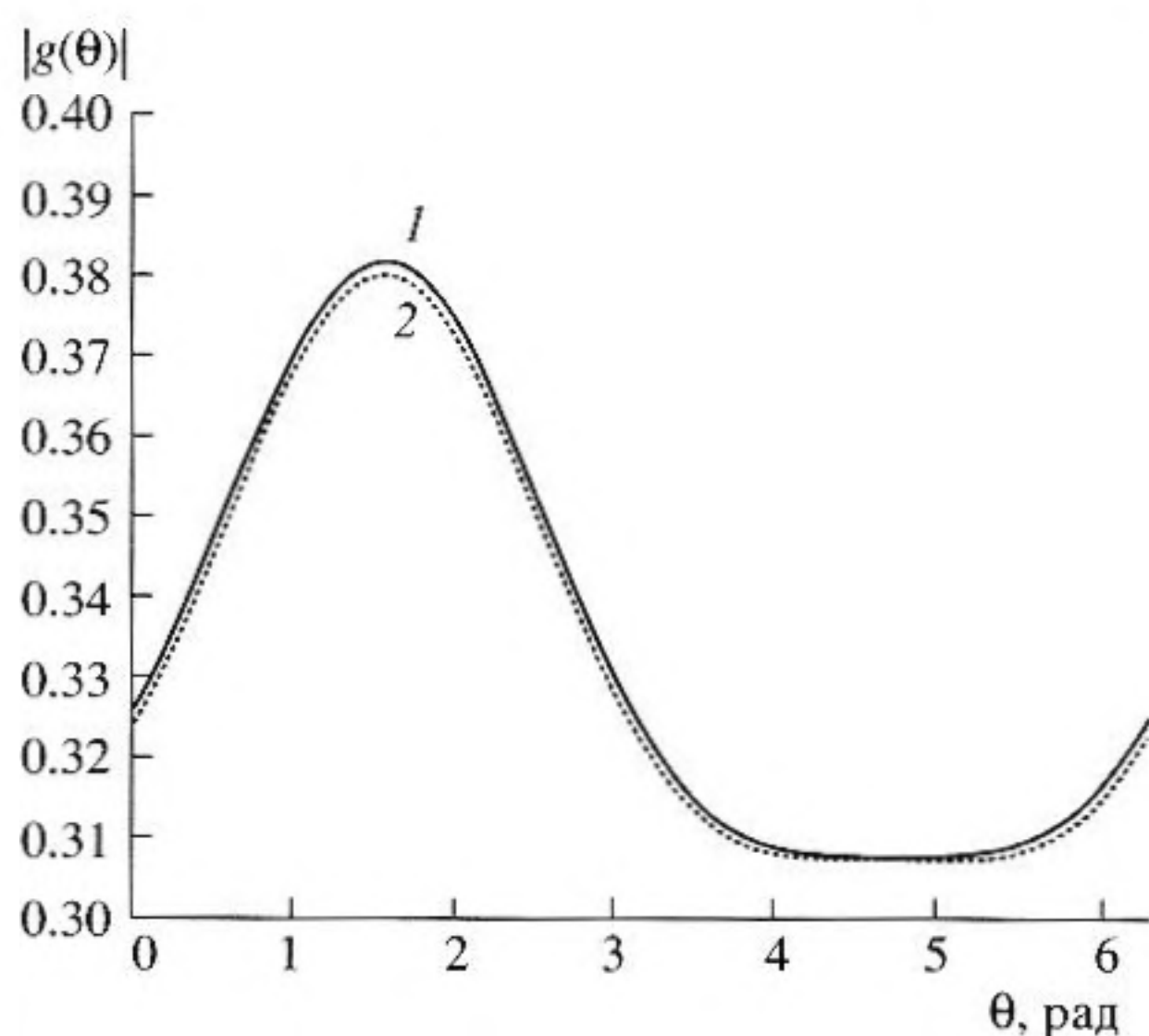


Рис. 6. Диаграммы рассеяния для двух цилиндров с радиусами $ka_{1,2} = 0.25$ и высотами $kh_{1,2} = 0.5$ (кривая 2), и для уединенного цилиндра с радиусом $ka = 0.25$ и высотой $kh = 1$ (кривая 1).

ношения интегральных поперечников рассеяния для двух цилиндров с $ka_{1,2} = 3$, $kh_{1,2} = 6$, $W_{1,2} = -i$ в зависимости от расстояния между ними.

Видно, что даже для таких сравнительно небольших тел теорема Уфимцева выполняется с достаточно хорошей точностью.

6. Моделирование характеристик рассеяния волн телами сложной структуры

Исследования показали, что скорость сходимости алгоритма МДУ слабо зависит от расстоя-

ния между отражателями. Это позволяет распространить вышеизложенный подход на решение задачи рассеяния волн телами сложной конфигурации путем представления их в виде комбинации объектов более простой геометрии.

Тестирование предложенного метода осуществим, выполнив моделирование характеристик рассеяния тел простой геометрии (цилиндра и сферы), составленных из двух близко расположенных друг к другу половин этих тел (получилиндров и полусфер). Расположим их один над другим и выберем минимальное расстояние $k\Delta$ между ними равным 0.1. Результирующую диаграмму рассеяния сравним с диаграммой рассеяния одиночного тела соответствующего размера. Во всех рассмотренных ниже примерах значения импеданса были взяты равными $W_{1,2} = 0$ (если не оговорено обратное), максимальный номер гармоники в разложениях (8) был равен 4. Рассматривался случай падения единичной плоской волны под углами $\theta_0 = \pi/2$, $\varphi_0 = 0$. Диаграмма рассеяния рассчитывалась в зависимости от угла θ в плоскости $\varphi = 0, \pi$.

На рис. 6 приведены диаграммы рассеяния для цилиндров. Расчеты были выполнены для двух цилиндров с радиусами оснований $ka_{1,2} = 0.25$ и высотами $kh_{1,2} = 0.5$ (кривая 2), а также для уединенного цилиндра с радиусом основания $ka = 0.25$ и высотой $kh = 1$ (кривая 1). Видно, что результаты весьма близки (различие не превышает 0.5%).

На рис. 7 приведены аналогичные результаты для сферы. Здесь кривая 1 изображает диаграмму рассеяния сферы радиуса $ka = 1$, а кривая 2 – соответствующий график для расположенных одна над другой полусфер, вместе “составляющих” це-

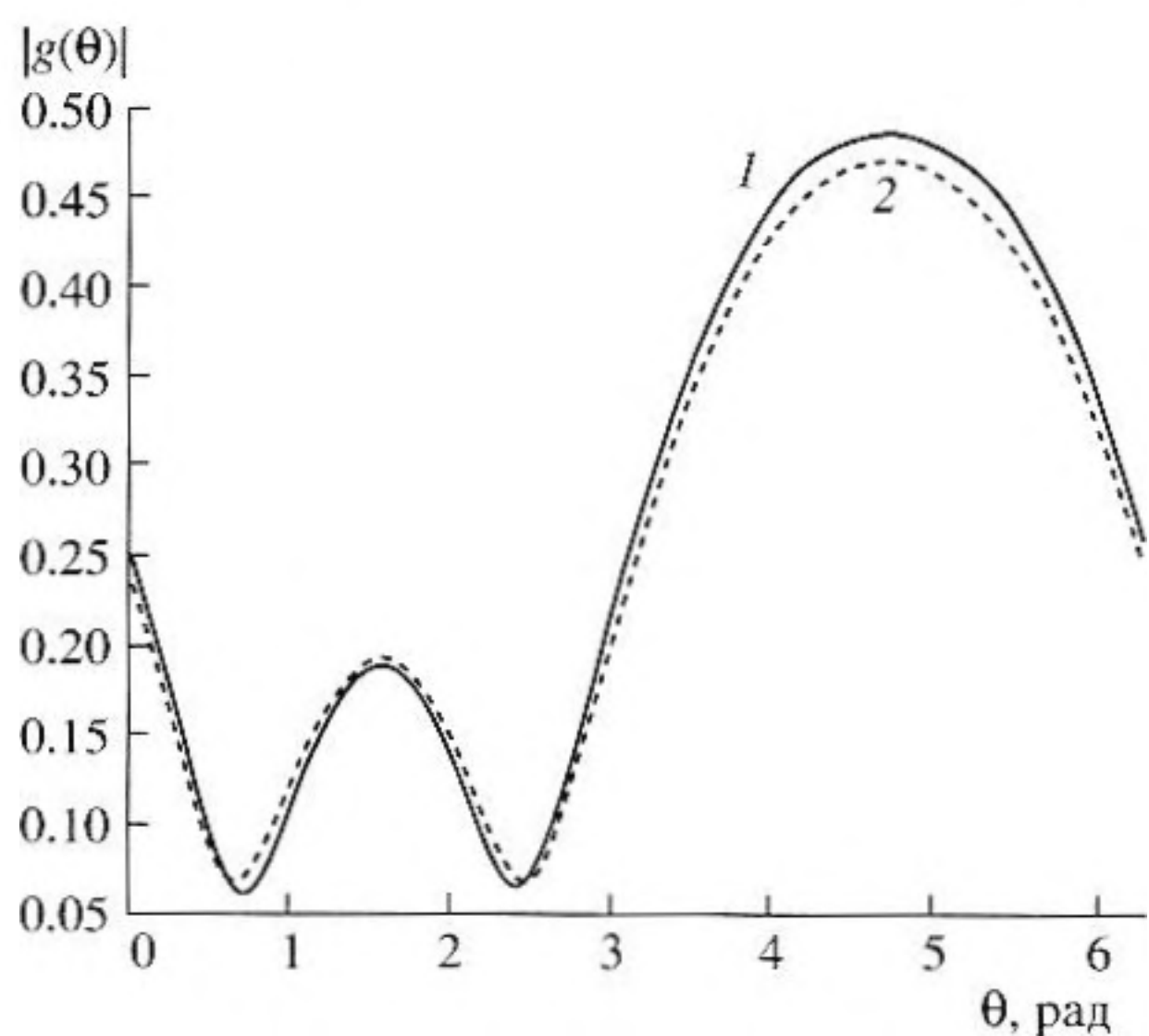


Рис. 7. Диаграммы рассеяния для расположенных одна над другой полусфер, “составляющих” вместе целую сферу (кривая 1) и для сферы с радиусом $ka = 1$ (кривая 2), $W_{1,2} = 1000$.

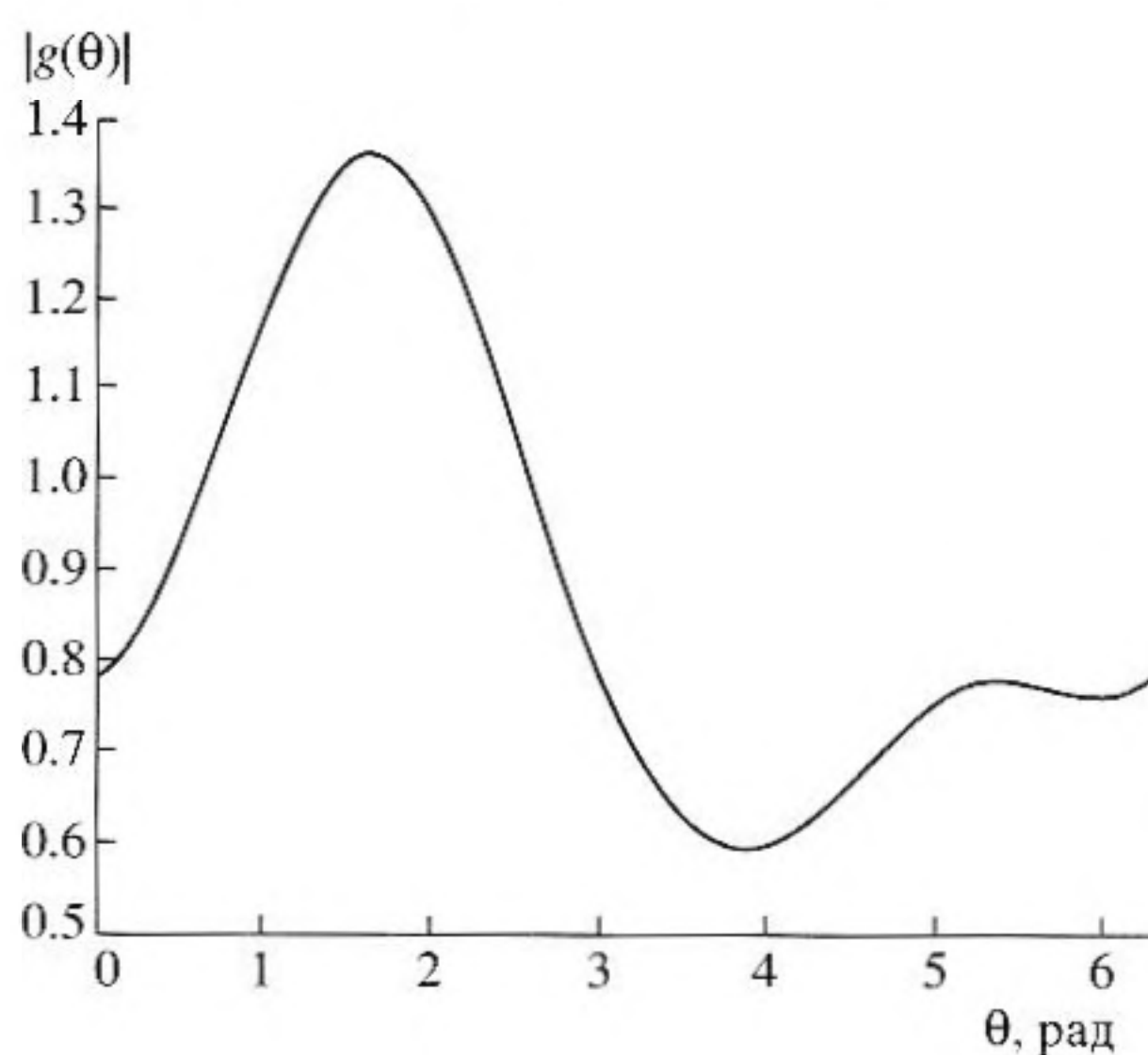


Рис. 8. Диаграмма рассеяния тела, составленного из цилиндра ($ka = 0.5$, $kh = 1$) и полусферы ($ka = 1$).

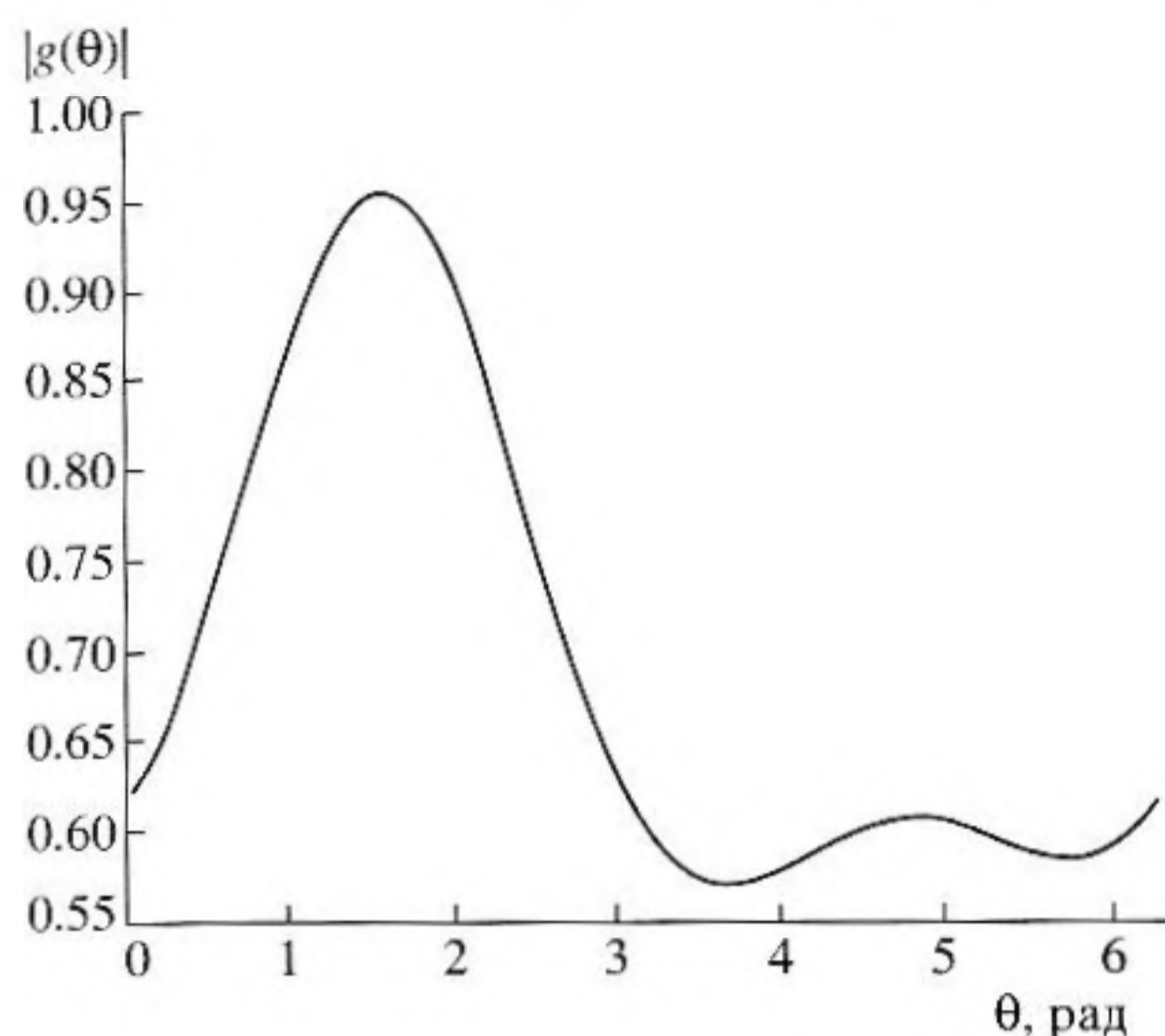


Рис. 9. Диаграмма рассеяния тела, составленного из цилиндра ($ka = 0.5$, $kh = 1$) и сферы ($ka = 0.5$).

лую сферу в случае, когда $W_{1,2} = 1000$ (акустически жесткое тело).

Обратимся теперь к задаче рассеяния волн телами сложной геометрии.

В качестве примера рассмотрим задачу дифракции на теле, имеющем форму "гриба", т.е. фигуре в виде полусферы, лежащей на цилиндрическом основании. На рис. 8 изображена диаграмма рассеяния такого тела, составленного из цилиндра ($ka = 0.5$, $kh = 1$) и полусферы ($ka = 1$).

Рис. 9 иллюстрирует другой пример сложного тела, имеющего форму "лампочки", т.е. сферы ($ka = 0.5$), лежащей на цилиндре ($ka = 0.5$, $kh = 1$).

На рис. 10 приведена диаграмма рассеяния тела, составленного из двух цилиндров, располо-

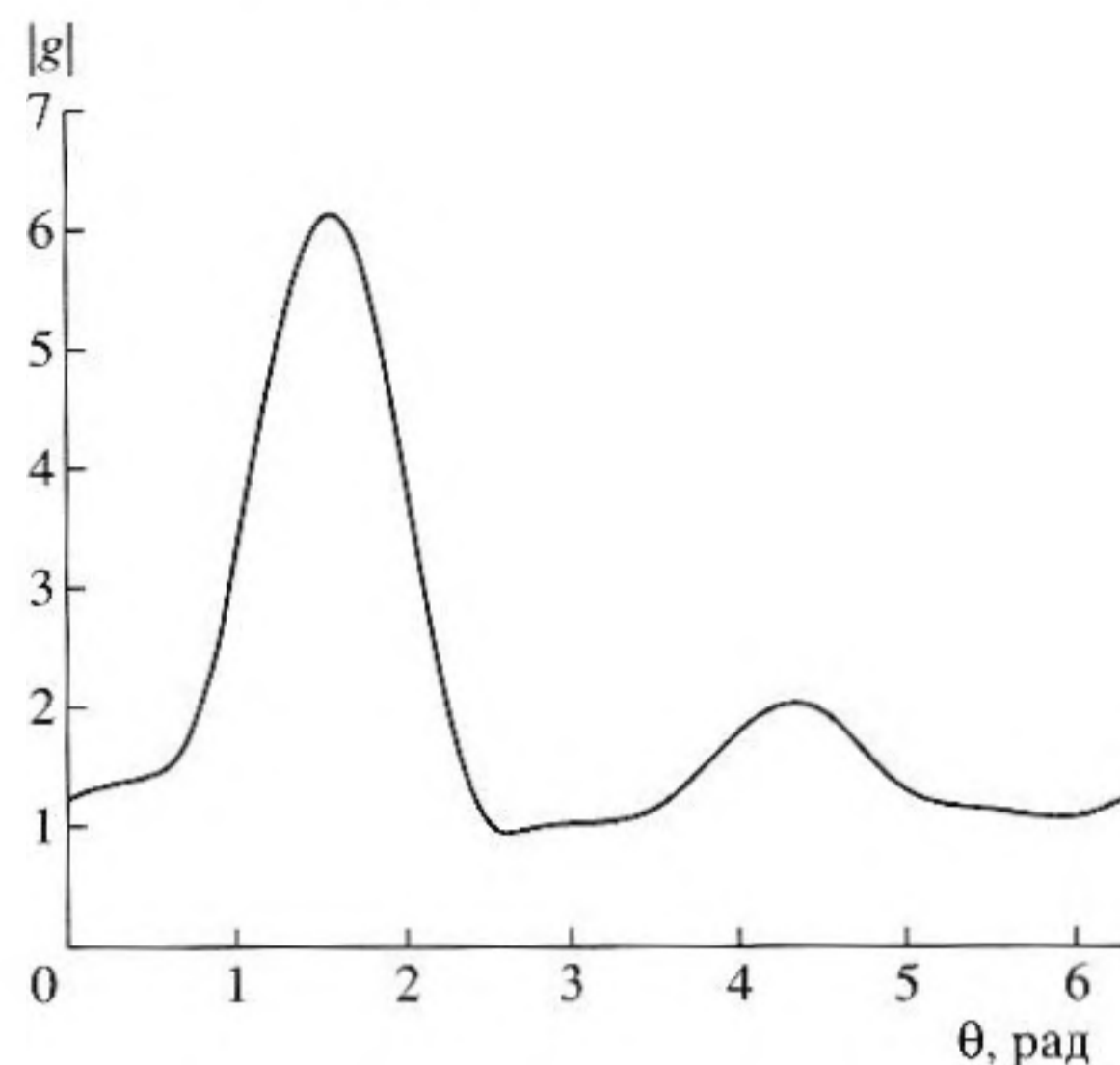


Рис. 10. Диаграмма рассеяния тела, составленного из двух цилиндров с параметрами $ka_1 = 1$, $kh_1 = 2$ и $ka_2 = 2$, $kh_2 = 4$.

женных один над другим, причем верхний меньше нижнего.

Во всех приведенных выше примерах моделирования характеристик рассеяния волн объектами, имеющими сложную структуру, расстояния между поверхностями тел, из которых они были "составлены", не превышали 0.1λ . Время работы вычислительного алгоритма практически не зависело от расстояния между рассеивателями, что позволяет говорить о высокой эффективности предложенного метода.

В табл. 3 приведены результаты проверки выполнения оптической теоремы для различных комбинаций рассеивателей.

Таблица 3

Фигуры	Параметры	$-\text{Im} g(\theta_0, \varphi_0)$	$\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} g(\theta, \varphi) ^2 \sin \theta d\theta d\varphi$
2 цилиндра	$ka_{1,2} = 0.25$ $kh_{1,2} = 0.5$	0.116062	0.113676
2 полусферы $W_{1,2} = 1000$	$ka_{1,2} = 1$	0.087495	0.087112
цилиндр и полусфера "гриб"	$ka_u = 1$ $kh_u = 1$ $ka_{\text{сф}} = 1$	1.079738	1.069127
цилиндр и сфера "лампочка"	$ka_u = 0.5$ $kh_u = 1$ $ka_{\text{сф}} = 1$	0.883861	0.861969
2 цилиндра "граната"	$ka_1 = 1, kh_1 = 2$ $ka_2 = 2, kh_2 = 4$	4.976964	4.990307

ВЫВОДЫ

1. Предложен высокоэффективный метод решения задач дифракции волн на группе тел, позволяющий выполнять исследование характеристик рассеяния таких объектов при любых расстояниях между телами (вплоть до соприкосновения) при минимальных затратах ресурсов ЭВМ.

2. Получено аналитическое (асимптотическое) решение задачи рассеяния волн группой тел и выполнена оценка пределов применимости такого решения.

3. Осуществлена проверка теоремы Уфимцева для случая рассеяния волн группой тел.

4. Показана возможность моделирования характеристик рассеяния волн телами сложной геометрии при помощи их замены комбинацией тел более простой формы.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 03-02-16336).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кюркчан А.Г. Об одном новом интегральном уравнении в теории дифракции // ДАН. 1992. Т. 325. № 2. С. 273–279.
2. Twersky V. Multiple scattering of electromagnetic waves by arbitrary configurations // Journal of Mathematical Physics. 1967. V. 8. № 3. P. 589–608.
3. До Дык Тханг, Кюркчан А.Г. Эффективный метод решения задач дифракции волн на рассеивателях, имеющих изломы границы // Акуст. журн. 2003. Т. 49. № 1. С. 51–58.
4. Виленкин Н.Я. Специальные функции и теория представлений групп. М.: Наука, 1965. 588 с.
5. Шендеров Е.Л. Излучение и рассеяние звука. Л.: Судостроение, 1989. 302 с.
6. Любарский Г.Я. Теория групп и ее применение в физике. М.: Гостехиздат, 1957. 354 с.
7. Кюркчан А.Г. К решению задачи рассеяния волн на нескольких телах // ДАН. 1996. Т. 348. № 5. С. 603–607.
8. Уфимцев П.Я. Три лекции по физической теории дифракции. Л.: Изд-во ЛГУ, 1972. 58 с.

Solution of the Three-Dimensional Problem of Wave Diffraction by an Ensemble of Objects

A. G. Kyurkchan and E. A. Skorodumova

*Moscow Technical University of Communication and Information Science,
ul. Aviamotornaya 8a, Moscow, 111024 Russia
e-mail: kyurkchan@yandex.ru*

Abstract—The pattern equations method is extended to solving three-dimensional problems of wave diffraction by an ensemble of bodies. The method is based on the reduction of the initial problem to a system of N (N is the number of scatterers in the ensemble) integro-operator equations of the second kind for the scattering patterns of scatterers. With the use of the series expansions of the scattering patterns in angular spherical harmonics, the problem is reduced to an algebraic system of equations in the expansion coefficients. An explicit (asymptotic) solution to the problem is obtained in the case when the scattering bodies are separated by sufficiently long distances. It is shown that the method can be used to model the characteristics of wave scattering by complex-shaped bodies.