

УДК 534.16

## ИЗМЕРЕНИЯ СДВИГОВОЙ УПРУГОСТИ И ВЯЗКОСТИ РЕЗИНОПОДОБНЫХ МАТЕРИАЛОВ

© 2007 г. В. Г. Андреев, Т. А. Бурлакова

Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова, кафедра акустики  
119992 Москва, Ленинские горы  
E-mail: andreev@acs366.phys.msu.ru

Поступила в редакцию 22.06.06 г.

Описана методика и приведены результаты измерений сдвигового модуля упругости резиноподобного полимера по деформации плоского упругого слоя. При сдвиговых деформациях, не превышающих 0.5 толщины слоя, сдвиговый модуль постоянен и имеет значение, согласующееся с результатами измерений по вдавливанию жесткого шарика. При деформациях, превышающих 0.5 толщины слоя, зависимость напряжения от деформации становится нелинейной. Коэффициент сдвиговой вязкости определялся по форме сдвиговых волн, возбуждаемых сфокусированным ультразвуком в однородном полимере.

PACS: 43.25.Ba, 43.35.Mr

### ВВЕДЕНИЕ

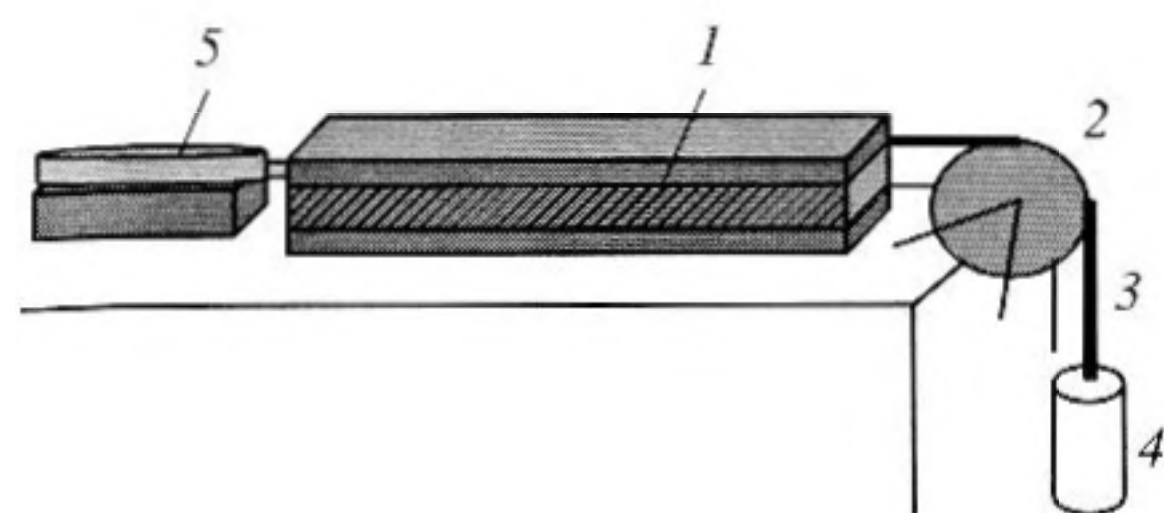
Механические напряжения, возникающие в резиноподобных средах при создании сдвиговой деформации, не зависят от направления сдвига, и поэтому квадратичная нелинейность отсутствует. Кубичная нелинейность упругого отклика, тем самым, становится основной. Это характерно для всех сред с центром инверсии. Как было показано в теоретических работах [1, 2], нелинейное искажение волн конечной амплитуды в средах с кубичной нелинейностью имеет ряд особенностей. Хорошо известно [3], что процесс распространения акустической волны конечной амплитуды в средах с квадратичной нелинейностью сопровождается каскадной генерацией гармоник, в результате чего профиль гармонической волны становится пилообразным. В средах с кубичной нелинейностью гармоническая на входе волна по мере распространения приобретает трапециевидную форму. Подобные эффекты возможны для сдвиговых волн, распространяющихся в твердых телах, однако для наблюдения таких явлений необходимо создавать очень большие сдвиговые смещения, что связано со значительными техническими трудностями. В резиноподобных средах модуль сдвиговой упругости составляет единицы килопаскалей, и скорость сдвиговой волны оказывается несколько метров в секунду, что на три порядка ниже скорости продольной волны. В таких средах вполне реально создание сдвиговых волн с колебательными скоростями, близкими к скорости распространения, и, следовательно, можно ожидать проявления нелиней-

ных эффектов на расстояниях в несколько длин волн от излучателя. В работе [4] сообщалось об экспериментальном наблюдении процесса нелинейного искажения сдвиговой волны конечной амплитуды в гелеобразном образце, изготовленном из желатина и агара. Для изучения и моделирования нелинейных волновых процессов в резиноподобной среде необходимо иметь данные о нелинейном сдвиговом модуле среды и затухании сдвиговых волн, обусловленном вязкостью.

Нелинейная упругость мягких биологических тканей может быть использована при медицинской диагностике. Мягкие биологические ткани, так же, как и полимеры, становятся более жесткими по мере их растяжения или сжатия. Такая способность мягких тканей обеспечивает сохранение жизнеспособности органов при экстремальных механических напряжениях. В статье [5] приведены результаты измерений нелинейной упругости биотканей, состоящих из фибриновых, коллагеновых и других белковых волокон. Показано, что при относительных деформациях порядка 0.5 и выше нелинейная упругость становится заметной.

В настоящей работе предложена методика измерения сдвигового модуля упругости резиноподобных материалов в диапазоне деформаций, при которых проявляются нелинейные свойства. Был использован слой полимера, заключенного между двумя пластинами. Сдвиговая деформация создавалась путем смещения одной пластины относительно другой.





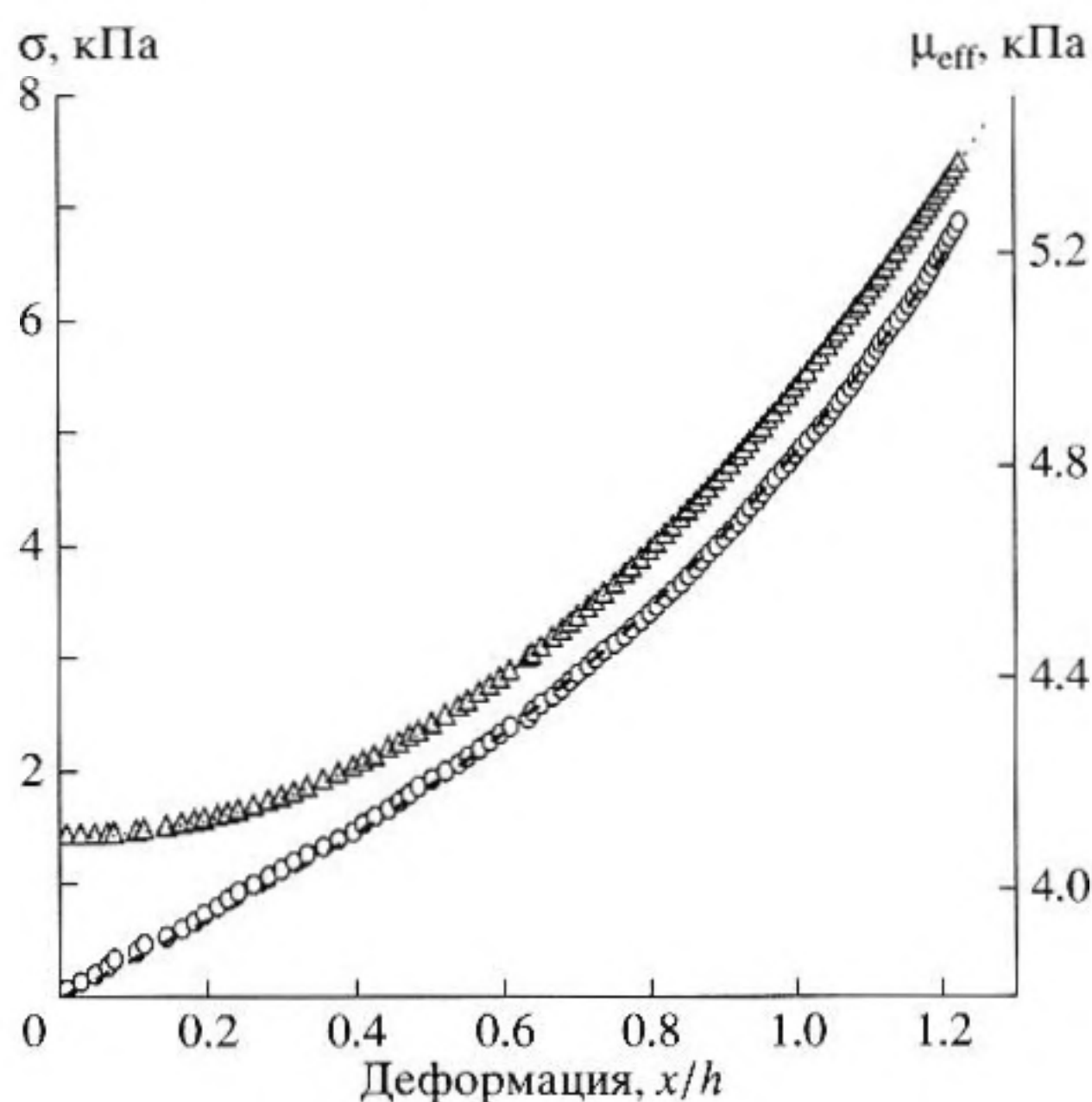
**Рис. 1.** Экспериментальная установка для измерения сдвигового модуля резиноподобного полимера: 1 – слой пластисола толщиной 5 мм между двух жестких пластин, 2 – блок, 3 – металлический тросик, 4 – пластиковая емкость, 5 – микрометрический индикатор.

### ИЗМЕРЕНИЕ МОДУЛЯ УПРУГОСТИ ПРИ СТАТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ ПЛОСКОГО СЛОЯ

Схема измерений показана на рис. 1. Слой исследуемого резиноподобного полимера толщиной  $h = 5$  мм был заключен между двумя жесткими пластинами с размерами  $7.5 \times 4$  см. В экспериментах был использован полимерный материал пластисол (производитель – компания M-F Manufacturing, США), упругость которого могла варьироваться в процессе полимеризации путем добавления в исходный полимер размягчителя. Пластины были изготовлены из дерева, адгезия пластисола к которому была достаточно хорошей.

Нижняя пластина образца (1), в которой создавались сдвиговые деформации, жестко крепилась к столу. К верхней пластине образца (в центре ее боковой грани) одним из своих концов крепился металлический тросик (3), перекинутый через блок (2). К свободному концу тросика прикреплялась пластиковая емкость (4), которая в ходе эксперимента наполнялась водой. Под действием силы тяжести воды в упругом слое создавалась сдвиговая деформация. Смещение верхней пластины  $x$  измерялось с помощью микрометрического индикатора (5), установленного с противоположной стороны пластины.

Экспериментальная зависимость механического напряжения  $\sigma$  от сдвиговой деформации  $\epsilon$  показана на рис. 2 кружками. Характер зависимости типичен для резины и резиноподобных материалов: по мере увеличения деформации упругость образца увеличивалась. В процессе измерений масса нагрузки увеличивалась с шагом 40 г, при этом время между двумя последующими измерениями составляло не менее минуты, поэтому можно было считать, что измерения были выполнены в квазистатическом режиме. Производились измерения как при увеличении нагрузки, так и при последующем пошаговом снятии нагрузки. В результате проведения циклических изменений нагрузки в диапазоне сдвиговых деформаций до 6 мм (1.2 толщины слоя) изменений зависимости



**Рис. 2.** Экспериментальная зависимость (кружки) механического напряжения  $\sigma$  от относительной сдвиговой деформации слоя полимера толщиной 5 мм. Эффективный сдвиговый модуль (треугольники), вычисленный по измеренной зависимости и его аппроксимация параболой (пунктирная линия). Аппроксимация экспериментальных данных кубической параболой показана штриховой линией.

$\sigma(\epsilon)$  обнаружено не было. Это позволило сделать вывод о том, что измерения были выполнены в диапазоне упругих деформаций, при этом не происходило отклеивания пластисола от пластин или каких-либо других необратимых изменений в упругом слое.

При сдвиговых деформациях, не превышающих 0.5 толщины слоя, зависимость напряжения от деформации линейна. Для относительных деформаций  $\epsilon = x/h > 0.5$  проявляется нелинейный характер зависимости, который хорошо аппроксимируется кубической параболой  $\sigma = \mu(\epsilon + \beta\epsilon^3)$ , показанной штриховой линией. По измеренной зависимости напряжения от сдвиговой деформации производилось определение эффективного сдвигового модуля

$$\mu_{eff} = \frac{\sigma}{\epsilon} = \mu + \mu\beta\epsilon^2, \quad (1)$$

где  $\mu\beta$  – нелинейный сдвиговый модуль. В области относительных деформаций  $\epsilon < 0.3$  эффективный модуль сдвига практически постоянен и равен  $\mu_{eff} = (4.1 \pm 0.2)$  кПа (треугольники на рис. 2). Это значение хорошо соответствует результатам измерений сдвигового модуля данного материала по вдавливанию жесткого шарика  $\mu = (4.4 \pm 0.4)$  кПа. Значение нелинейного сдвигового модуля, определенное по аппроксимации кривой



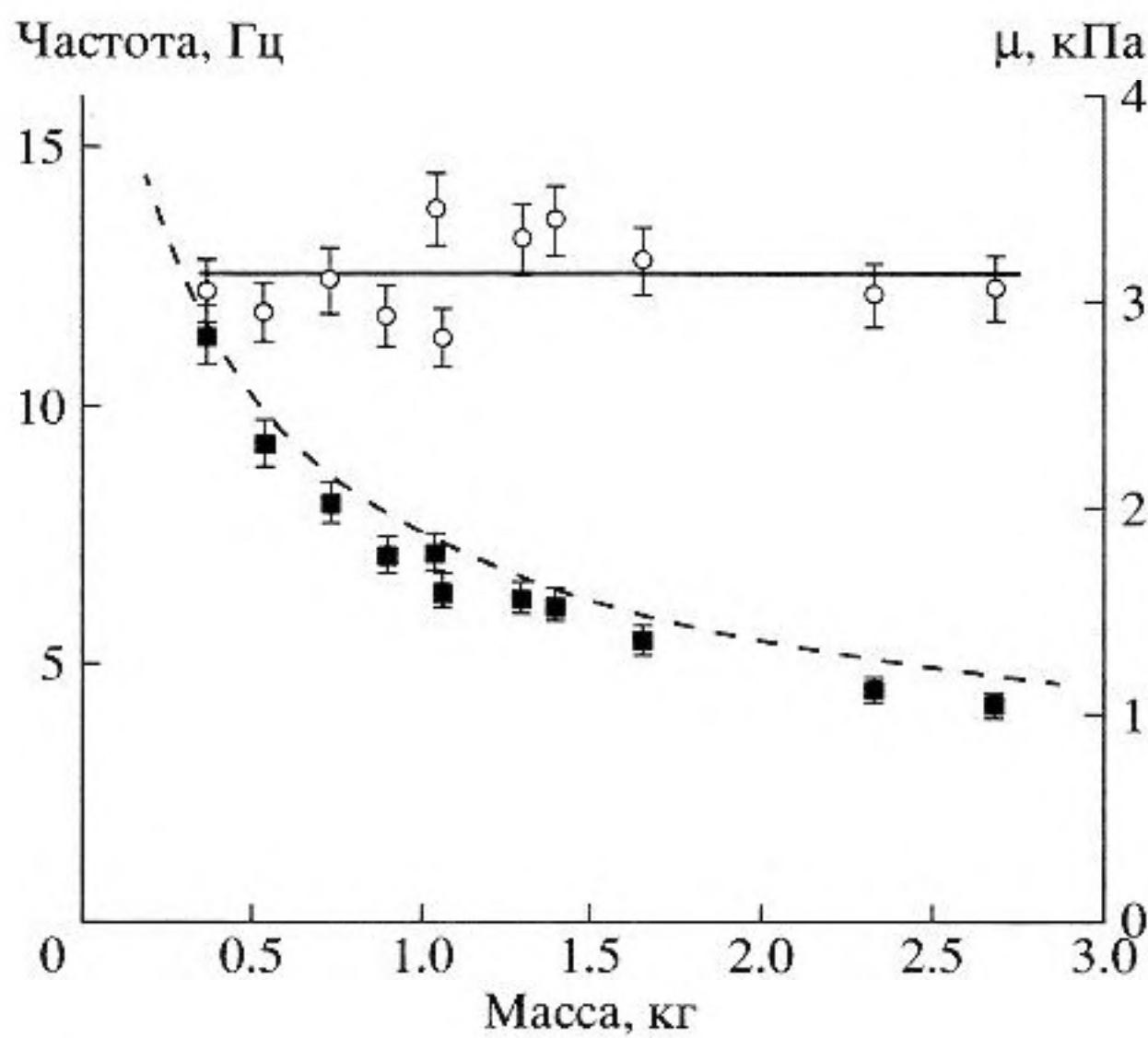


Рис. 3. Зависимость частоты сдвиговых колебаний жесткой пластины от ее массы. Точками обозначены экспериментальные значения, штриховой кривой показан результат теоретического расчета. Модуль сдвига, вычисленный по результатам измерений частоты колебаний, показан кружками. Сплошная линия проведена по методу наименьших квадратов.

$\mu_{eff}(\epsilon)$  зависимостью (1), показанной пунктирной линией, составило  $\mu\beta = (0.86 \pm 0.02)$  кПа.

### КОЛЕБАНИЯ ТВЕРДОЙ ПЛАСТИНЫ НА УПРУГОМ СЛОЕ

Измерения сдвигового модуля упругости на низких частотах были проведены по измерениям периода колебаний твердой пластины на упругом слое. Рассмотрим жесткую пластину массой  $m$  и площадью  $S$ , лежащую на упругом слое толщиной  $h$ . При смещении пластины в направлении оси  $x$  возникает упругая сила, стремящаяся вернуть пластину в положение равновесия. В результате вдоль оси  $x$  возникают колебания пластины, частота которых определяется сдвиговой упругостью материала слоя и погонной плотностью пластины. Уравнение движения частиц в слое имеет вид [6]:

$$\rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}, \quad (2)$$

где  $u_x$  – смещение частицы вдоль оси  $x$ ,  $\rho$  – плотность среды. Граничные условия: частицы на нижней границе ( $z = 0$ ) неподвижны; при  $z = h$  частицы совершают движение вместе с жесткой пластиной,

$$u_x|_{z=0} = 0, \quad m \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = -\mu S \frac{\partial u_x}{\partial z} \Big|_{z=h}. \quad (3)$$

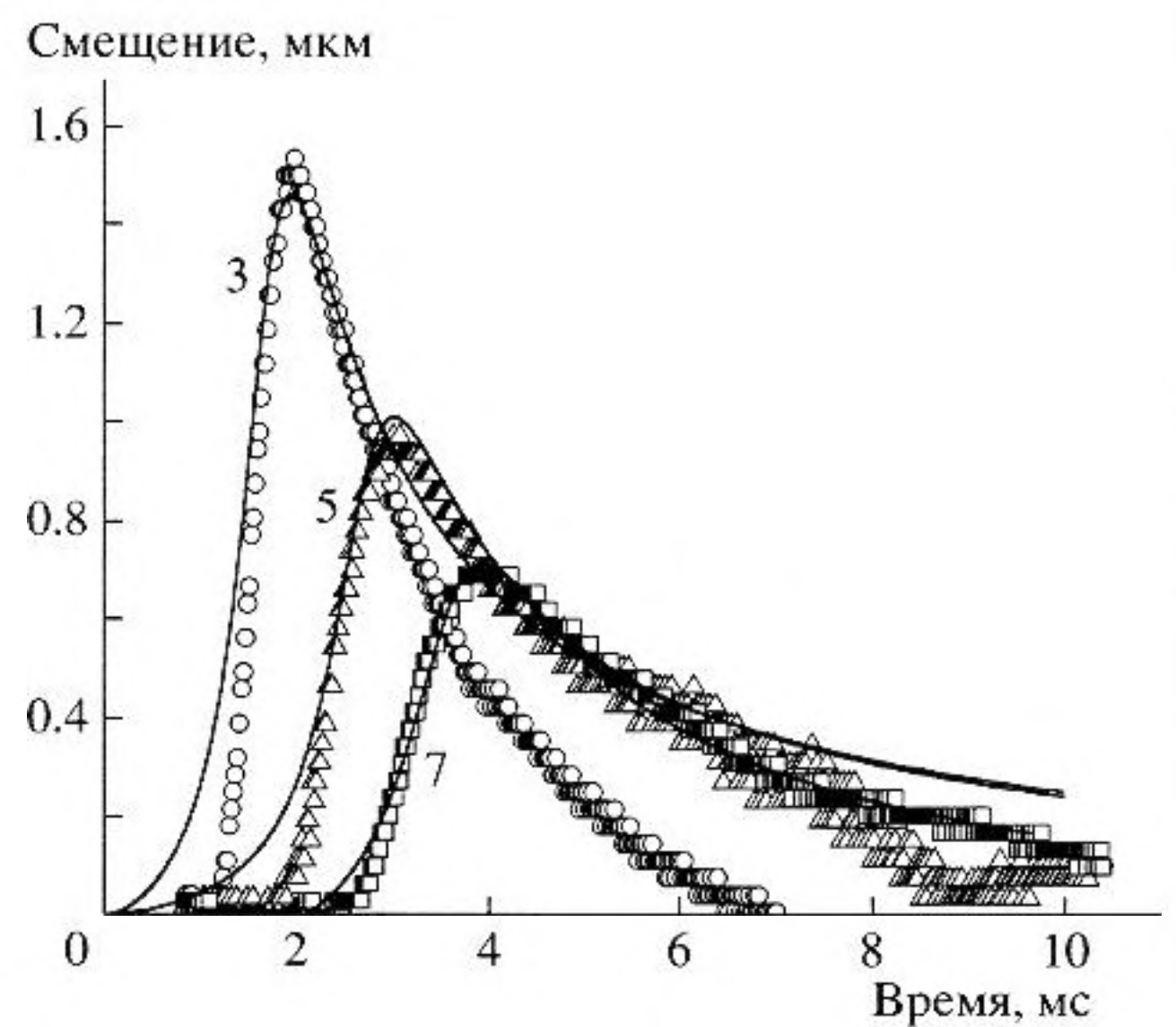


Рис. 4. Экспериментальные профили сдвиговых импульсов (значки), зарегистрированные в однородном образце на расстояниях 3, 5 и 7 мм (цифры у кривых) от оси ультразвукового пучка. Сплошные линии соответствуют результатам расчета для значения сдвиговой вязкости 0.3 Па·с.

Решение уравнения (2) с граничными условиями (3) имеет вид гармонических колебаний, при этом собственная частота колебаний  $\omega_0$  находится из уравнения:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\omega_0 h}{c_t}\right) = \frac{\mu}{\rho_s c_t \omega_0}, \quad (4)$$

где  $c_t = \sqrt{\mu/\rho}$  – скорость сдвиговой волны,  $\rho_s = m/S$  – погонная плотность пластины. Если частота колебаний достаточно низкая, то значение тангенса можно заменить его аргументом. В таком приближении выражение для частоты имеет вид:

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \approx \frac{c_t}{2\pi} \sqrt{\frac{\rho}{h\rho_{\text{пор}}}}. \quad (5)$$

Собственная частота колебаний пластины зависит от ее погонной плотности, поэтому значение частоты можно изменять путем изменения массы пластины, нагружая ее дополнительными грузами. На рис. 3 график теоретической зависимости частоты колебаний от массы пластинки показан штриховой линией. В вычислениях были использованы следующие значения параметров:  $h = 5$  мм,  $c_t = 2$  м/с,  $\rho = 980$  кг/м<sup>3</sup>,  $S = 30$  см<sup>2</sup>. С ростом массы пластины (или груза на ней) собственная частота колебаний пластины уменьшается как  $m^{-1/2}$ . Значения экспериментально измеренных частот колебаний пластины (точки на рис. 4) при различных массах лежат ниже теоретической кривой. Рассчитанный с использованием соотношения (4)



модуль упругости представлен на рис. 4 кружками. Значение  $\mu$ , полученное по методу наименьших квадратов, составило  $\mu = (3200 \pm 300)$  Па, что оказалось меньше, чем полученное из статических измерений по деформации слоя. Следует отметить, что амплитуды колебаний пластины в описанных экспериментах не превышали 1 мм, поэтому нелинейными эффектами можно было пренебречь.

### ИЗМЕРЕНИЯ СДВИГОВОЙ ВЯЗКОСТИ РЕЗИНОПОДОБНОГО ПОЛИМЕРА

Измерения сдвиговой вязкости резиноподобного полимера проводились с помощью сдвиговых волн, возбужденных сфокусированным ультразвуковым пучком. Методика возбуждения и регистрации сдвиговых волн, а также схема экспериментальной установки подробно описаны в работах [7, 8]. Ультразвуковой импульс длительностью 300 мкс с частотой заполнения 3 МГц фокусировался в образец полимерного материала, выполненный в форме кубика со стороной 4 см и помещенный в воду. Сдвиговая волна возбуждалась за счет силы радиационного давления и представляла собой однополярный импульс длительностью порядка 2 мс. Сдвиговой импульс имел ярко выраженный максимум, распространяющийся со скоростью сдвиговой волны. При увеличении расстояния от оси ультразвукового пучка (рис. 4) пиковое значение импульса уменьшается, а его длительность увеличивается. Уменьшение амплитуды волны связано как с цилиндрической расходимостью, так и с влиянием сдвиговой вязкости. Значение сдвиговой вязкости было вычислено путем сравнения экспериментально зарегистрированных профилей импульсов, показанных значками на рис. 5, с теоретическими, рассчитанными для тех же условий возбуждения, что были в эксперименте. Сдвиговая вязкость при этом использовалась как свободный параметр. Теоретические профили сдвиговой волны, представленные сплошными линиями на рис. 4, были рассчитаны по формулам, приведенным в статье [9]. Наилучшее совпадение эксперимента и теории было отмечено при значении сдвиговой вязкости, равной  $(0.30 \pm 0.03)$  Па · с.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Измерения сдвиговой упругости и вязкости резиноподобного полимера позволяют сделать вывод, что наблюдение нелинейных волновых эффектов в этой среде возможно при относительных сдвиговых деформациях, превышающих 0.5. Для создания таких деформаций можно использовать электромеханические вибраторы, обеспечи-

вающие колебания с постоянным ускорением небольших грузов. Вибраторы сравнительно небольших размеров способны создавать ускорения  $(20-30)g$  ( $g = 9.8 \text{ м/с}^2$  – ускорение свободного падения) грузов с массой 30–40 г. Сдвиговые смещения, создаваемые вибраторами на частоте 100 Гц, составляют (3–5) мм, в то время как длина волны в полимерном образце со значением сдвигового модуля 4 кПа равна 20 мм. Относительные деформации, которые можно оценить как отношение сдвигового смещения к четверти длины волны, на частоте 100 Гц могут составлять от 0.6 до 1 при выбранных режимах колебаний вибратора. Это позволяет сделать вывод о возможности наблюдения нелинейных волновых эффектов в выбранном полимерном материале.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 04-02-16264.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Руденко О.В., Сапожников О.А. Волновые пучки в кубично-нелинейных средах без дисперсии // ЖЭТФ. 1994. Т. 106. Вып. 2(8). С. 395–413.
2. Zabolotskaya E.A., Hamilton M.F., Ilinskii Y.A., Meedan G.D. Modeling of nonlinear shear waves in soft solids // J. Acoust. Soc. Amer. 2004. V. 116. № 5. P. 2807–2813.
3. Руденко О.В., Солуян С.И. Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975.
4. Catheline S., Gennisson J.-L., Tanter M., Fink M. Observation of shock transverse waves in elastic media // Phys. Rev. Lett. 2003. V. 91. P. 164301-1–164301-4.
5. Storm C., Pastore J., MacKintosh F.C., Lubensky T.C., Janmey P. Nonlinear elasticity in biological gels // Nature. 2005. V. 435. P. 191–194.
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости. М.: Наука, 1987.
7. Андреев В.Г., Дмитриев В.Н., Пищальников Ю.А., Руденко О.В., Сапожников О.А., Сарвазян А.П. Наблюдение сдвиговых волн, возбужденных сфокусированным ультразвуком в резиноподобной среде // Акуст. журн. 1997. Т. 43. № 2. С. 123–128.
8. Андреев В.Г., Ведерников А.В. Измерение распределения сдвигового модуля упругости в неоднородных резиноподобных средах // Вестн. Моск. унив. Сер. 3. Физика. Астрон., 2006. № 3.
9. Sarvazyan A.P., Rudenko O.V., Swanson S.D., et al. Shear wave elasticity imaging: a new ultrasonic technology of medical diagnostics // J. Ultrasound in Med. and Biol. 1998. V. 24. № 9. P. 1419.



## Measurement of Shear Elasticity and Viscosity of Rubberlike Materials

V. G. Andreev and T. A. Burlakova

*Faculty of Physics, Moscow State University, Vorob'evy gory, Moscow, 119992 Russia*  
*e-mail: andreev@acs366.phys.msu.ru*

**Abstract**—The method and results of measuring the shear elastic modulus of a rubberlike polymer by the deformation of a plane elastic layer are described. For shear deformations not exceeding 0.5 of the layer thickness, the shear modulus is constant and its value is in agreement with the value determined by pressing a rigid ball against the polymer layer. For deformations exceeding 0.5 of the layer thickness, the stress–strain dependence becomes nonlinear. The coefficient of shear viscosity is determined from the shear wave form generated by focused ultrasound in a homogeneous polymer sample.