АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2007, том 53, № 2, с. 185–190

НЕЛИНЕЙНАЯ АКУСТИКА

УДК 534.2

# НЕЛИНЕЙНОЕ ПОГЛОЩЕНИЕ ЗВУКА ЗВУКОМ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ВОЛН С КРАТНЫМИ ЧАСТОТАМИ

**© 2007 г. А. М. Гаврилов, А. К. Батрин**

*Таганрогский государственный радиотехнический университет*
*347928 Ростовская обл., г. Таганрог, ГСП-17А, пер. Некрасовский 44*
*Тел.: (86344) 37-17-95; 321-483*
*E-mail: gavr_am@mail.ru*

Поступила в редакцию 17.11.05 г.

Рассмотрена роль фазозависимых нелинейных процессов при взаимодействии слабой сигнальной волны с интенсивной накачкой, частота которой кратна частоте сигнала. Определены фазовые соотношения, при которых поглощение звука звуком максимально. Показано, что с ростом соотношения частот роль фазозависимого поглощения быстро ослабевает и может не приниматься во внимание.

PACS: 43.25.Cb, 43.25.Lj, 43.30.Lz

Под нелинейным поглощением звука звуком (ПЗЗ) понимается необратимое уменьшение амплитуды (энергии) волны, называемой сигналом, происходящее в результате нелинейного взаимодействия с другой волной в среде распространения. Именно такой механизм поглощения лежит в основе расчета коэффициента затухания в твердых телах, где уменьшение энергии звуковой волны происходит в результате взаимодействия с высокочастотными тепловыми дебаевскими фононами [1]. Другим примером ПЗЗ может служить поглощение звука внешним низкочастотным шумовым полем в жидкостях и газах [2–5]. Примечательно, что поглощение звука за счет вязкости и теплопроводности, описываемое линейными членами уравнений гидродинамики и теплопроводности, можно считать результатом взаимодействия акустического сигнала с шумом, проявляющегося при микроскопических нелинейных процессах перекачки энергии волны в поступательные и внутренние степени свободы молекул. Считается, что именно ПЗЗ может быть одной из причин аномального поглощения звука в океане [2, 5].

Понимание многих особенностей этого процесса может быть найдено при изучении коллинеарного взаимодействия двух плоских регулярных волн. Примером такого рассмотрения являются результаты теоретического и экспериментального исследования [6, 7] нелинейного взаимодействия мощной низкочастотной ($\omega_H \ll \omega_C$) накачки $v_H$ со слабой сигнальной волной $v_C$ ($v_C \ll v_H$), подтвердившие наличие значительного дополнительного затухания высокочастотного сигнала. Такое поведение сигнальной волны в присутствии накачки является результатом интенсивной перекачки ее энергии в волны комбинационных частот.

При взаимодействии высокочастотной накачки ($\omega_H \gg \omega_C$) и низкочастотного сигнала в бездисперсионной среде эффективность ПЗЗ значительно ослабевает из-за сильного нелинейного затухания самой накачки, происходящего в результате быстрого превращения ее в пилообразную волну благодаря генерации собственных гармоник [8]. Эта закономерность справедлива только в тех случаях, когда не проявляются фазозависимые нелинейные процессы, эффективность и направление проявления которых определяется соотношением начальных фаз взаимодействующих волн. Роль последних в процессе ПЗЗ может быть весьма значительной и многократно превышать вклад фазонезависимых нелинейных процессов. Рассматриваемая ситуация наблюдается, в частности, при выраженном параметрическом взаимодействии (ВПВ), когда частота накачки вдвое превышает частоту сигнала ($\omega_H = 2\omega_C$) [9–12].

Целью данной работы является анализ роли фазозависимых нелинейных процессов при поглощении звука звуком в случае, когда частоты сигнальной волны и накачки кратны, т.е. $F = \omega_H/\omega_C \in N$, где $N = 2, 3, 4, \ldots$ Особый интерес представляет зависимость этих процессов от величины частотного параметра $F$.

Рассмотрение задачи проведем на основе уравнения простых волн, описывающего взаимодействие плоских волн, распространяющихся в идеальной квадратично-нелинейной среде без дисперсии. Аналогичный подход для аналогичных задач использован в учебном пособии [13] (см. раздел 5.1). Граничное условие (в точке $x = 0$) за-

пишется в виде суммы колебаний с частотами сигнала $\omega_C$ и накачки $\omega_H$:

$$v(t, x = 0) = v_C \sin(\omega_C t + \varphi_C) + \\ + v_H \sin(\omega_H t + \varphi_H), \quad (1)$$

где $v_C$, $v_H$ и $\varphi_C$, $\varphi_H$ – начальные амплитуды и фазы колебательной скорости взаимодействующих волн. Для упрощения дальнейшего анализа введем безразмерные параметры: $V = v/v_H$, $B = v_C/v_H$, $z_0 = x(\varepsilon\omega v_H/c_0^2) = x/x_0$, где $\varepsilon$ – параметр нелинейности среды; $c_0$ – скорость звука в невозмущенной среде; $\tau = (t - x/c_0)$ – время в сопровождающей системе координат.

С учетом принятых обозначений для (1) получаем

$$V(\tau, z_0 = 0) = B\sin(\omega\tau) + \sin(N\omega\tau + \varphi_0), \quad (2)$$

где $\omega_C = \omega$; $\omega_H = N\omega$; $\varphi_0 = (\varphi_C - N\varphi_H)$ – фазовый инвариант бигармонической волны. Для волн малой амплитуды фазовый инвариант не зависит от времени и пройденного расстояния, однозначно характеризуя фазовые соотношения в спектре и форму бигармонической волны. Заметим, что отношение начальных амплитуд сигнала и накачки в выражении (2) является малым параметром, т.е. $B \ll 1$.

На расстояниях, предшествующих образованию разрывов в волновом профиле, поведение бигармонической волны описывается решением в виде неявно заданной функции

$$V(z_0, \tau) = B\sin(\omega\tau + Vz_0) + \\ + \sin(N\omega\tau + NVz_0 + \varphi_0). \quad (3)$$

Для дальнейшего анализа амплитуды сигнальной волны выполним спектральное разложение решения (3). Для этого перейдем от неявной функции $\Phi$ к явной, воспользовавшись новой переменной $\xi = \omega\tau + z_0\Phi(\xi)$. Тогда

$$\Phi(\xi) = B\sin\xi + \sin(N\xi + \varphi_0). \quad (4)$$

Частота $\omega$ является наименьшим общим кратным для частот сигнала и накачки, поэтому период функции $v(t)$ и $\Phi(\xi)$ равен $2\pi$. Для функции с периодом $2\pi$ спектр выражается известным соотношением [13, 14]

$$C_k(z_0) = -\frac{j}{2\pi k z_0}\int_{-\pi}^{\pi}[\exp(jkz_0\Phi(\xi)) - 1]\times \\ \times \exp(-jk\xi)d\xi = \quad (5) \\ = -\frac{j}{2\pi k z_0}\int_{-\pi}^{\pi}\exp(jkz_0\Phi(\xi))\exp(-jk\xi)d\xi.$$

Подставим в (5) выражение (4)

$$C_k(z_0) = -\frac{j}{2\pi k z_0}\int_{-\pi}^{\pi}\exp\{jkz_0[B\sin\xi + \\ + \sin(N\xi + \varphi_0)]\}\exp(-jk\xi)d\xi.$$

Для дальнейшего упрощения полученного выражения используем соотношение

$$\exp(jnz_0\sin\xi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(nz_0)\exp(jk\xi),$$

тогда

$$C_k(z_0) = -\frac{j}{2\pi k z_0}\sum_{p=-\infty}^{\infty} J_p(kBz_0)\sum_{s=-\infty}^{\infty} J_s(kz_0)\times \\ \times \exp(js\varphi_0)\int_{-\pi}^{\pi}\exp[j(p + sN - k)\xi]d\xi.$$

Здесь

$$\int_{-\pi}^{\pi}\exp[j(p + sN - k)\xi]d\xi = \\ = \begin{cases} 2\pi \text{ при } p + sN - k = 0; \\ 0 \text{ при } p + sN - k \neq 0. \end{cases}$$

Для $k$-й гармоники в спектре распространяющейся в среде бигармонической волны получаем выражение

$$C_k(z_0) = -\frac{j}{kz_0}\sum_{\substack{p,s=-\infty \\ p+sN-k=0}}^{\infty} J_p(kBz_0)J_s(kz_0)\exp(js\varphi_0),$$

которое применительно к сигнальной волне ($k = 1$) принимает вид

$$C_1(z_0) = -\frac{j}{z_0}\sum_{s=-\infty}^{\infty} J_{1-sN}(Bz_0)J_s(z_0)\exp(js\varphi_0).$$

Выразив безразмерную величину $z_0$ через координату $z = Nz_0$, нормированную на расстояние образования разрыва в накачке ($x_{PH}$), получим

$$C_1(z) = -\frac{jN}{z}\sum_{s=-\infty}^{\infty} J_{1-sN}\left(\frac{Bz}{N}\right)J_s\left(\frac{z}{N}\right)\exp(js\varphi_0) \quad (6)$$

или в вещественной форме записи

$$\frac{v_C(z, \tau)}{v_H} = V_1(z, \tau) = \\ = \frac{2N}{z}\sum_{s=-\infty}^{\infty} J_{1-sN}\left(\frac{Bz}{N}\right)J_s\left(\frac{z}{N}\right)\sin(\omega_C\tau + s\varphi_0). \quad (7)$$

Учитывая ограничение $0 \le z < 1$, накладываемое условием идеальности среды, а также следующие из условия задачи соотношения $B \ll 1$, $N \ge 2$ и быструю сходимость ряда (6), пределы суммирования можно ограничить. Так, в частности, при $N = 2$ достаточно учесть члены ряда с $s = (0; 1)$, чтобы максимальная погрешность в указанном диапазоне расстояний для $B \le 0.1$ и любых значений $\varphi_0$ не превышала $10^{-5}$:

$$V_1(z, \tau) = \frac{4}{z}\left[J_1\left(\frac{Bz}{2}\right)J_0\left(\frac{z}{2}\right)\sin(\omega_C\tau) + J_{-1}\left(\frac{Bz}{2}\right)J_1\left(\frac{z}{2}\right)\sin(\omega_C\tau + \varphi_0)\right]. \quad (8)$$

Из выражения (8) очевидно, что максимальное ослабление сигнальной волны достигается в случае сдвига фаз между первым и вторым слагаемыми на $\pi$, что достигается при условии $\varphi_0 = 0$. При выполнении этого условия для амплитуды сигнальной волны получаем

$$V_1(z, \tau) = \frac{4}{z}J_1\left(\frac{Bz}{2}\right)\left[J_0\left(\frac{z}{2}\right) - J_1\left(\frac{z}{2}\right)\right]\sin(\omega_C\tau).$$

Для $N \ge 3$ в силу быстрой сходимости ряда при $B \ll 1$ достаточно рассмотреть сумму при $s = (0; \pm 1)$

$$V_1(z, \tau) \cong \frac{2N}{z}\left[J_1\left(\frac{Bz}{N}\right)J_0\left(\frac{z}{N}\right)\sin(\omega_C\tau) + J_{1-N}\left(\frac{Bz}{N}\right)J_1\left(\frac{z}{N}\right)\sin(\omega_C\tau + \varphi_0)\right]. \quad (9)$$

В выражениях (8) и (9) первое и второе слагаемые описывают влияние фазонезависимых ($V_C$) и фазозависимых ($\Delta V_C$) нелинейных процессов на амплитуду сигнальной волны

$$V_1(z, \tau) = V_C(z, \tau) - \Delta V_C(z, \tau), \quad (10)$$

причем наличие последних приводит к дополнительному ослаблению при условии

$$\varphi_0 = 0 \text{ для } N = 2n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots;$$

$$\varphi_0 = \pi \text{ для } N = 2n - 1.$$

Проявление фазонезависимого нелинейного поглощения, обусловленного взаимодействием с накачкой и описываемое первым слагаемым в (9) и (10), показано на примере изменения амплитуды сигнальной волны на рис. 1а для $B = 0.1$. В основе этого процесса лежит отток энергии в волны комбинационных частот ($m\omega_H \pm \omega_C$). При увеличении $N$ влияние накачки на сигнальную волну быстро ослабевает, что можно рассматривать как снижение энергообмена между ними по мере роста соотношения их частот.

Также быстро уменьшается и дополнительное ослабление сигнальной волны за счет фазозависимой добавки $\Delta V_C$ с увеличением $N$, рис. 1б. Во всех случаях, кроме $N = 2$, появление фазозависимой добавки происходит с запаздыванием по координате, что объясняется инерционным характером образования спектра $N$-го порядка, содержащего компоненту с частотой $\omega_C$. Чем больше $N$, тем дальше от излучателя (для нормированной на $x_{PH}$ координаты) образуется $\Delta V_C$. Этот процесс аналогичен пространственному запаздыванию генерации высших гармоник гармонической волной конечной амплитуды [14] в силу каскадного характера нелинейных процессов.

Отметим особенности рассматриваемых механизмов нелинейного поглощения:

1. фазонезависимое поглощение начинает проявляться в спектре второго порядка вне зависимости от величины $N$ и является результатом взаимодействия волн комбинационных частот $\omega_H \pm \omega_C$ с накачкой;

2. добавка $\Delta V_C$, отвечающая за фазозависимое поглощение, появляется с запаздыванием – на этапе генерации в среде спектра $N$-го порядка и образуется в результате многократной трансформации спектра вниз по частоте, что в силу правила Мэнли–Роу при $(N - 1)$-м преобразовании частоты очень быстро понижает ее амплитуду.

Для $N \ge 3$ поведение сигнальной волны достаточно точно описывается выражением (7) при $s = 0$:

$$V_1(z, \tau) \approx \frac{2N}{z}J_1\left(\frac{Bz}{N}\right)J_0\left(\frac{z}{N}\right)\sin(\omega_C\tau), \quad (11)$$

в котором отсутствует зависимость от $\varphi_0$. Погрешность при расчетах по (11) для $B \le 0.1$ и $z \le 1$ не превышает 0.15%.

Параметром, характеризующим ПЗЗ, является нелинейный коэффициент поглощения

$$\alpha_C(z) = \alpha_{C0} + \alpha_C(\varphi_0) = -\frac{1}{v_C}\frac{dv_C(z)}{dz},$$

пространственные зависимости которого приведены на рис. 1в. Здесь кривыми *1* и *2* показаны суммарный коэффициент поглощения $\alpha_C$ и его фазонезависимая компонента $\alpha_{C0}$ при $N = 2$, где видна доминирующая роль фазозависимой компоненты $\alpha_C(\varphi_0)$. Кривая *3* и точки в ее окрестности соответствуют аналогичным зависимостям при $N = 3$, но, как видно, здесь роль фазозависимой составляющей пренебрежимо мала. Для $N \ge 4$ пространственные распределения $\alpha_C$ и $\alpha_{C0}$ практически совпадают (кривые *4* и *5*). Таким образом, при $N \ge 3$ имеет место преимущественно фазонезависимый механизм ПЗЗ.

Результаты экспериментального исследования ПЗЗ в волнах с соотношением частот $N = 2$ приведены в работе [9], где показано, что благодаря фазозависимым нелинейным процессам

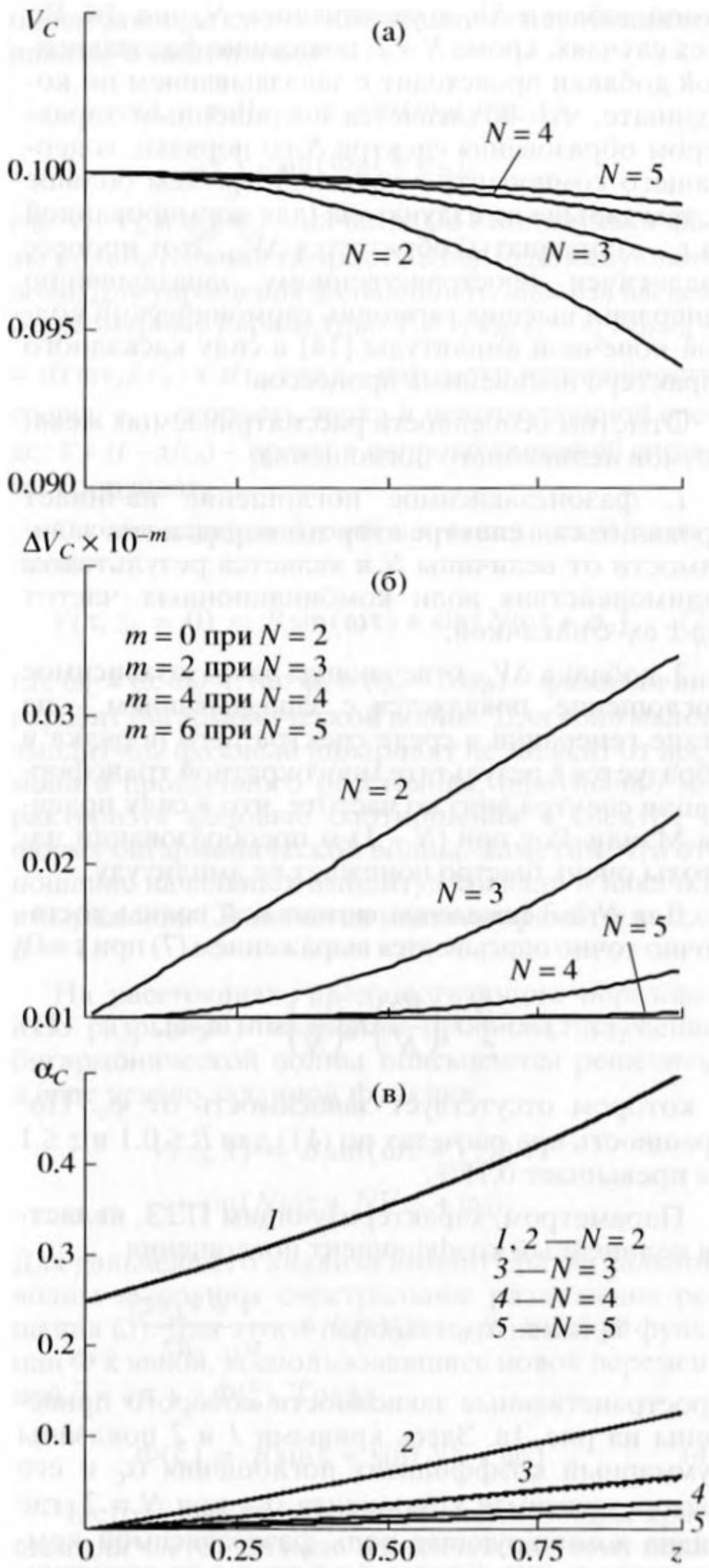


**Рис. 1.** Пространственные распределения амплитуды сигнальной волны и ее коэффициента поглощения.

а) изменение амплитуды сигнальной волны в результате фазонезависимых нелинейных процессов ($B = 0.1$),
б) фазозависимая добавка к сигнальной волне ($B = 0.1$),
в) пространственное распределение коэффициента поглощения сигнальной волны при различных $N$.

ослабление сигнальной волны может достигать 20 дБ и более. Об амплитудной и пространственной зависимости поглощения сигнальной волны в этом случае можно получить представление на примере осциллограмм для частот $\omega_C/2\pi = 1.4$ МГц и $\omega_H/2\pi = 2.8$ МГц, приведенных на рис. 2. Эксперимент проводился в воде с плоским пьезокерамическим излучателем диаметром 30 мм. Для наглядности импульс накачки задержан относительно импульса сигнальной волны на половину длительности импульса. В результате с накачкой взаимодействует только вторая половина импульса сигнальной волны, а первая его часть распространяется в отсутствие накачки. Изменение сигнальной волны в зависимости от амплитуды накачки на расстоянии $x = 63$ см от излучателя показано на рис. 2а, где напряжению $U_H = 130$ В соответствует $2\varepsilon \mathrm{Re}_H = 83.4$. На рис. 2б приведены осциллограммы сигнальной волны на разных расстояниях вдоль акустической оси при неизменных амплитудах сигнала и накачки: $2\varepsilon \mathrm{Re}_C = 8.2$ и $2\varepsilon \mathrm{Re}_H = 83.4$. Здесь $\mathrm{Re}_C$ и $\mathrm{Re}_H$ – начальные значения ($x = 0$) акустических чисел Рейнольдса сигнальной волны и накачки.

Для случая $N = 3$ наблюдение ПЗЗ проводилось на экспериментальной установке, описанной в [15], с использованием круглого плоского пьезокерамического преобразователя диаметром $a = 15$ мм и резонансной частотой $\omega_C/2\pi = 1310$ кГц, частота накачки составляла $\omega_H/2\pi = 3930$ кГц. Измерялись осевые распределения амплитуды сигнальной волны в отсутствие и при одновременном излучении с накачкой. Амплитуда сигнальной волны на поверхности излучателя оставалась неизменной ($2\varepsilon \mathrm{Re}_C = 0.55$), а амплитуда накачки изменялась, но всегда выполнялось условие $B \ll 1$.

Результаты измерений приведены на рис. 3. Кривая *1* представляет собой осевое распределение амплитуды сигнальной волны без накачки ($2\varepsilon \mathrm{Re}_H = 0$). В присутствии накачки (кривые *2–4*) наблюдается дополнительное затухание сигнала, обусловленное их нелинейным взаимодействием. При максимальной амплитуде накачки ($2\varepsilon \mathrm{Re}_H = 32.4$) ослабление сигнальной волны составило порядка 1.1 дБ (кривая *4*).

В эксперименте не удалось обнаружить нелинейное фазозависимое затухание сигнала, что объяснятся весьма малой его величиной и вполне согласуется с теоретическими оценками. Так, в частности, из рис. 1б следует, что величина фазозависимой нелинейной добавки к сигнальной волне $\Delta V_C$ для $N = 3$ более чем на два порядка меньше по сравнению с ВПВ. Чтобы экспериментально зарегистрировать фазозависимое поглощение сигнала, необходимо излучать более высокую амплитуду накачки, чем это позволяла сделать измерительная установка. Отметим, что в отличие от плосковолновой теоретической модели эксперимент проводился в условиях дифрагирующих пучков, где, начиная с расстояния $x > 0.1$ м, начинает сказываться сферическое расхождение сигнальной волны, приводящее к ослабле-

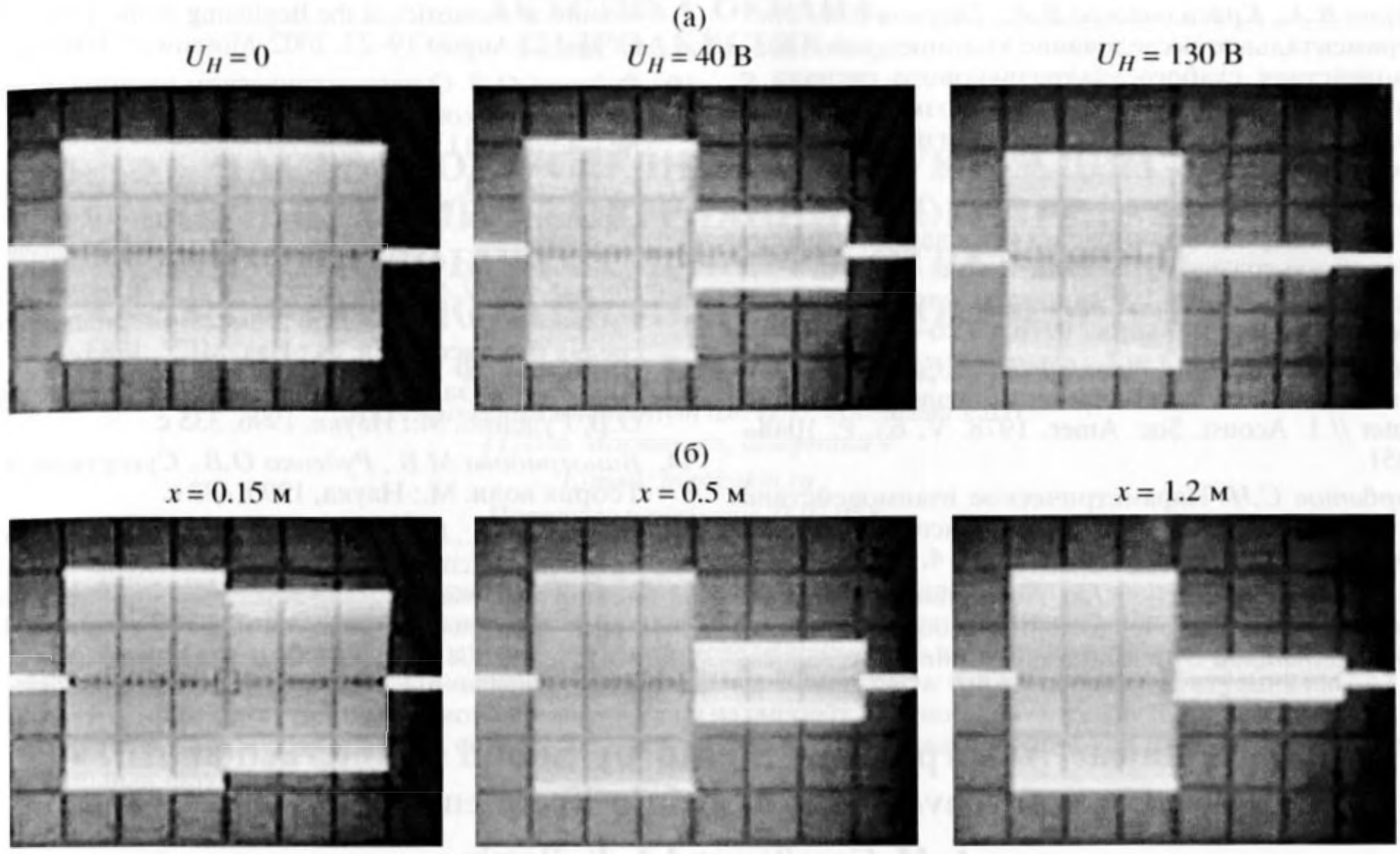


**Рис. 2.** Амплитудная (а) и пространственная (б) зависимости поглощения сигнальной волны при $N = 2$ и $\varphi_0 = 0$.

нию нелинейного поглощения звука звуком. Фазовые соотношения между сигналом и накачкой устанавливались по результатам измерений в дальнем поле на оси пучка для режима малых амплитуд обеих волн. Несмотря на влияние дифракции, в эксперименте достаточно хорошо прослеживается быстро ослабевающее с ростом $N = \omega_H/\omega_C$ влияние фазонезависимых и фазозависимых нелинейных процессов на распространение низкочастотной сигнальной волны.

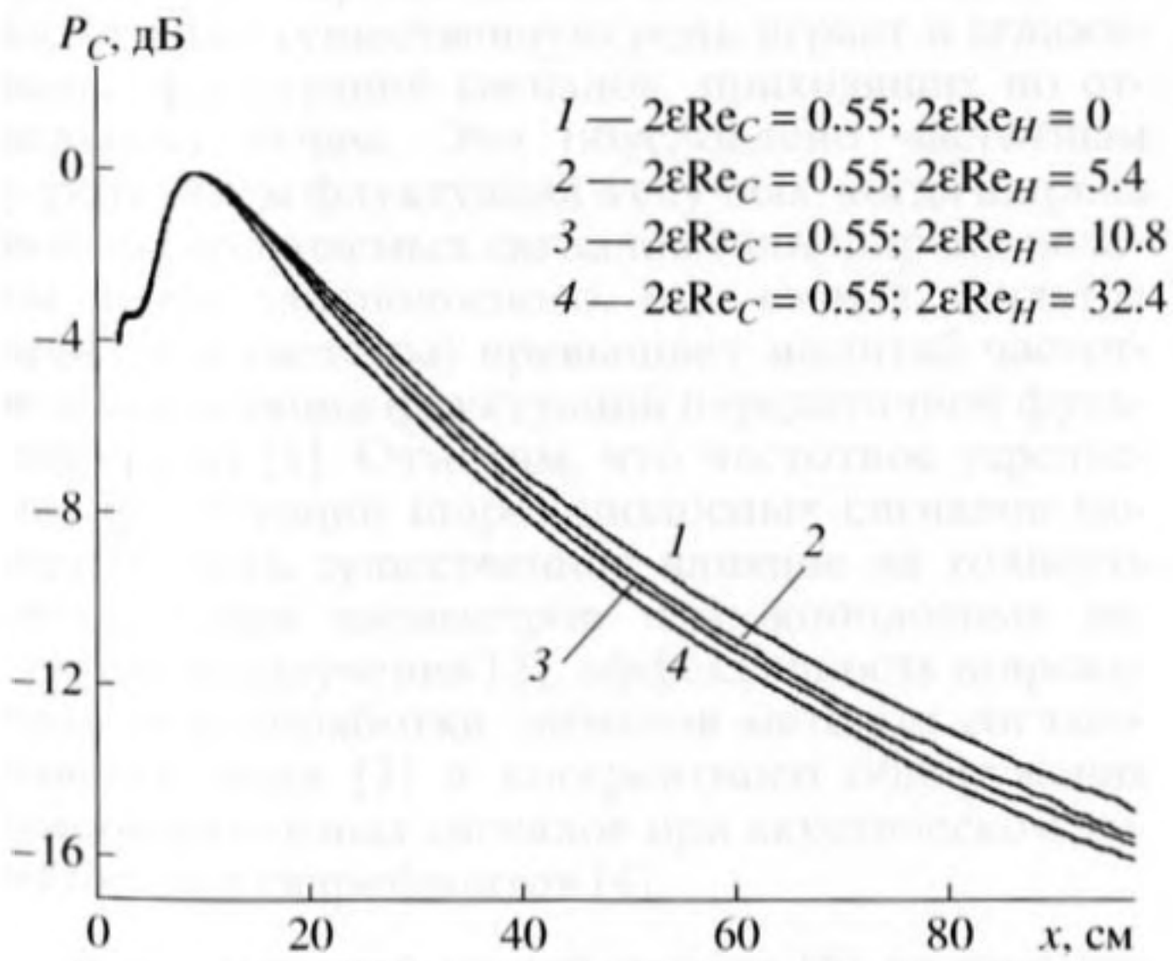


**Рис. 3.** Осевые распределения амплитуды сигнальной волны при различных амплитудах накачки ($N = 3$).

Результаты теоретического анализа и эксперимента указывают на случай ВПВ, как наиболее эффективный при реализации задачи ПЗЗ. В рамках единого теоретического подхода показано, что с увеличением соотношения частот между низкочастотной сигнальной волной и высокочастотной накачкой (при условии их кратности) производительность фазозависимых нелинейных процессов быстро спадает и при $N \geq 3$ ими можно пренебречь.

Работа выполнена в рамках гранта CRDF, поддержанного Американским акустическим обществом.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ландау Л.Д.* Собрание трудов. Т. 1. М.: Наука, 1969. С. 227–240.
2. *Красильников В.А., Руденко О.В., Чиркин А.С.* О поглощении звука малой амплитуды, вызываемом взаимодействием с шумом // Акуст. журн. 1975. Т. 21. № 1. С. 124–126.
3. *Павлов В.И.* О поглощении звука звуком в среде с шумом // Акуст. журн. 1976. Т. 22. № 4. С. 580–585.
4. *Наугольных К.А., Рыбак С.А.* Затухание слабонелинейных волн // Акуст. журн. 1976. Т. 22. № 5. С. 735–741.

5. *Буров В.А., Красильников В.А., Тагунов Е.Я.* Экспериментальное исследование коллинеарного взаимодействия слабого ультразвукового сигнала с интенсивными низкочастотными возмущениями в воде // Вестн. Моск. ун-та. Сер. "Физика, астрономия". 1978. Т. 19. № 4. С. 53–58.
6. *Буров В.А., Красильников В.А., Тагунов Е.Я.* О коллинеарном взаимодействии слабой и интенсивной ультразвуковых волн в воде // Труды 3-й Всесоюзной конф. по вопросам ультразвуковой спектроскопии. Вильнюс. 1976. С. 26–30.
7. *Moffett M.B., Konrad W.L., Carlton L.F.* Experimental demonstration of the absorption of sound by sound in water // J. Acoust. Soc. Amer. 1978. V. 63. P. 1048–1051.
8. *Гурбатов С.Н.* Параметрическое взаимодействие и усиление случайных волн в недиспергирующей среде // Акуст. журн. 1980. Т. 26. № 4. С. 551–559.
9. *Gavrilov A.M., Savitskij O.A.* Absorption of sound by sound at degenerative interaction of acoustical waves // 16th International Symposium on Nonlinear Acoustics. Nonlinear Acoustics at the Beginning of the 21st Century. Vol. 2. August 19–23. 2002. Moscow. P. 1043–1046.
10. *Руденко О.В.* О параметрическом взаимодействии бегущих звуковых волн // Акуст. журн. 1974. Т. 20. № 1. С. 108–111.
11. *Руденко О.В.* Нелинейная акустика: достижения, перспективы, проблемы // Природа. 1986. № 7. С. 16–26.
12. *Васильева О.А., Карабутов А.А., Лапшин Е.А., Руденко О.В.* Взаимодействие одномерных волн в средах без дисперсии. М.: Изд. МГУ, 1983.
13. Акустика в задачах / Под ред. С.Н. Гурбатова и О.В. Руденко. М.: Наука, 1996. 335 с.
14. *Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П.* Теория волн. М.: Наука, 1990. 432 с.
15. *Батрин А.К., Гаврилов А.М.* Измерительный комплекс для экспериментальных исследований нелинейного взаимодействия акустических волн с кратными частотами // Известия ТРТУ. Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2004. № 6 (41). С. 167–175.

# Nonlinear Absorption of Sound by Sound at Interaction of Waves with Multiple Frequencies

**A. M. Gavrilov and A. K. Batrin**

*Taganrog State Radio Engineering University, Nekrasovski@i per. 44, Taganrog, 347928 Russia*
*e-mail: gavr_am@mail.ru*

**Abstract**—The role of the phase-dependent nonlinear processes that accompany the interaction of a weak signal wave with an intense pump wave is investigated for the case of the pump frequency being a multiple of the signal frequency. Phase relations that provide the maximum absorption of sound by sound are determined. It is shown that, as the frequency ratio of the waves increases, the role of the phase-dependent absorption rapidly decreases and becomes negligible.