АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2007, том 53, № 3, с. 346–352

УДК 551.463.21

ПРИБЛИЖЕНИЕ КАСАТЕЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ И НЕКОТОРЫЕ ОБОБЩЕНИЯ ЭТОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

© 2007 г. А. Г. Воронович

NOAA/Earth System Research Laboratory, Broadway 325, Boulder, Colorado, 80305

E-mail: alexander.voronovich@noaa.gov

Поступила в редакцию 06.09.06 г.

В работе дается обзор приближения касательной плоскости (ПКП) Л.М. Бреховских. Подчеркивается преимущество ПКП по сравнению с методами, основанными на анализе интегральных уравнений для поверхностных источников. Приводится общая формула для амплитуды рассеяния скалярных плоских волн при произвольном граничном условии. Показывается, как прямое обобщение ПКП приводит к приближениям, включающим правильное описание брэгговского рассеяния и позволяющим избежать использования двухмасштабной модели.

PACS: 43.30.Hw

ВВЕДЕНИЕ

В 1951 г. Л.М. Бреховских [1] предложил метод расчета рассеяния волн на неровных поверхностях, получивший название приближения касательной плоскости (ПКП). До этого времени единственный имевшийся метод был основан на теории возмущений, которая требует малости высоты неровностей по сравнению с длиной волны. Разумеется, это требование является слишком ограничительным для нужд подводной акустики килогерцовых частот. Метод касательной плоскости явился фундаментальным продвижением в теории рассеяния волн на неровных поверхностях. Теория возмущений, описывающая брэгговское рассеяние, является одним из двух "классических" методов в общей теории рассеяния; вторым "классическим" подходом является квазиклассическое приближение, которому и соответствует ПКП.

Если теория возмущений представляет собой низкочастотную асимптотику решения задачи рассеяния, то ПКП является высокочастотной асимптотикой. В 1962 г. Б.Ф. Курьянов [2] для задачи рассеяния звука на морской поверхности предложил двухмасштабную модель, являющуюся комбинацией двух упомянутых выше подходов. В 1966 г. И.М. Фукс [3] обобщил двухмасштабную модель на случай рассеяния электромагнитных волн (в англоязычной литературе двухмасштабная модель была независимо предложена в [4] в 1968 г.). Формальное применение результатов ПКП к случаю малых по сравнению с длиной волны неровностей приводит к выражению, по форме похожему на результат теории возмущений. Именно, амплитуда рассеяния в базисе плоских волн оказывается пропорциональной спектральной компоненте неровностей, вычисленной на разности горизонтальных проекций рассеянной и падающей волн. Этот факт не является неожиданным и является общим следствием чисто геометрических соображений. Однако коэффициент при спектральной компоненте оказывается вычисленным, вообще говоря, неправильно. Правильный результат получается лишь в случае рассеяния вперед, т.е. в окрестности зеркального направления. Это вполне соответствует условию применимости метода касательной плоскости, требующему, чтобы горизонтальный масштаб рассеивающей поверхности существенно превосходил длину волны. В случае крупномасштабной плавной поверхности рассеяние на большие углы экспоненциально мало, и разница в преэкспоненциальных факторах является несущественной.

По этой причине формулы двухмасштабной модели оказываются зависящими от значения параметра, разделяющего спектр неровностей на мелкомасштабную компоненту, которая учитывается по теории возмущений, и крупномасштабную, которая рассматривается при помощи ПКП. С развитием методов дистанционного зондирования возникла потребность в более точных методах расчета рассеяния, которые, в частности, не вносили бы неопределенности, связанной с выбором параметра разделения масштабов. Целью настоящей статьи является обзор некоторых методов, решающих поставленную задачу, и являющихся непосредственным обобщением ПКП. Содержание статьи в значительной степени опирается на результаты, изложенные в [5–7].

ФОРМУЛА ГЕЛЬМГОЛЬЦА И АМПЛИТУДА РАССЕЯНИЯ

Мы будем предполагать, что неровная поверхность $\Sigma_{\mathbf{R}}$ представляет собой некомпактную, в среднем плоскую гладкую поверхность (типа неровной поверхности моря), расположенную в некоторой окрестности уровня $z = 0$ и разделяющую однородное пространство на верхнюю и нижнюю половины. Источники предполагаются расположенными в верхнем полупространстве вдали от неровной поверхности; создаваемое этими источниками падающее скалярное поле будет обозначаться u^{in}, и рассеянное поле будет обозначаться u^{sc}. Вектор единичной нормали к поверхности $\mathbf{n}_{\mathbf{R}}$, $\mathbf{R} \in \Sigma_{\mathbf{R}}$ считается направленным в сторону верхнего полупространства и является по отношению к нему внутренней нормалью. Функция Грина волнового уравнения имеет вид:

$$G(R) = -\frac{\exp(ikR)}{4\pi R} = -\frac{i}{8\pi^2}\int \exp[i\mathbf{kr} + iq_k|z|]\frac{d\mathbf{k}}{q_k}, \quad (1)$$

где K волновое число, $(\mathbf{r}, z)$ являются горизонтальной и вертикальной проекциями радиус-вектора $\mathbf{R}$, $\mathbf{k}$ – горизонтальный волновой вектор и

$$q_k = \sqrt{K^2 - k^2}, \quad \mathrm{Im}q_k \geq 0 \quad (2)$$

является вертикальным волновым числом.

Формула Гельмгольца позволяет выразить значение волнового поля в любой точке верхнего полупространства $\mathbf{R}_*$ через значения поля и его нормальной производной на неровной поверхности $\Sigma_{\mathbf{R}}$:

$$u(\mathbf{R}_*) = u^{in}(\mathbf{R}_*) - \int \frac{\partial G(\mathbf{R} - \mathbf{R}_*)}{\partial n_{\mathbf{R}}} u d\Sigma_{\mathbf{R}} + \int G(\mathbf{R} - \mathbf{R}_*)\frac{\partial u}{\partial n_{\mathbf{R}}} d\Sigma_{\mathbf{R}}. \quad (3)$$

Поверхность $\Sigma_{\mathbf{R}}$ обычно принимается совпадающей с физической границей. Последнее, однако, не является обязательным. Если предположить, что $\Sigma_{\mathbf{R}}$ является некоторой воображаемой поверхностью в безграничном однородном пространстве без рассеивающих границ, то поле u вдали от любого распределения источников будет совпадать с u^{in}, и сумма двух последних членов в (3) должна обратиться в нуль. По этой причине (3) можно переписать также в следующем виде:

$$u(\mathbf{R}_*) = u^{in}(\mathbf{R}_*) - \int \frac{\partial G(\mathbf{R} - \mathbf{R}_*)}{\partial n_{\mathbf{R}}}(u - u^{ext}) d\Sigma_{\mathbf{R}} + \int G(\mathbf{R} - \mathbf{R}_*)\left(\frac{\partial u}{\partial n_{\mathbf{R}}} - \frac{\partial u^{ext}}{\partial n_{\mathbf{R}}}\right) d\Sigma_{\mathbf{R}}. \quad (4)$$

Плотности дипольных и монопольных источников u^{ext} и $\partial u^{ext}/\partial n_{\mathbf{R}}$ в уравнении (4) могут являться граничными значениями любого волнового поля, удовлетворяющего в нижнем полупространстве однородному волновому уравнению и условию излучения (поскольку источники этого поля должны быть расположены в верхнем полупространстве). Таким образом, существуют такие распределения дипольных и монопольных источников на поверхности $\Sigma_{\mathbf{R}}$, которые в сумме не излучают в верхнее полупространство, и выбор плотности монопольных и дипольных источников в формуле Гельмгольца (3), вообще говоря, не является однозначным. В частности, можно положить $u^{ext} = u^{in}$, что приведет к замене в (3) полного поля на рассеянное поле. Если выбрать в качестве u^{ext} граничное значение решения уравнения Гельмгольца в *нижнем* полупространстве, отвечающее граничному условию $u^{ext} = u$, где u есть полное поле, получившееся в результате решения задачи рассеяния в верхнем полупространстве, то второй член в (4) исчезнет, и поле в верхнем полупространстве будет создаваться только монопольными источниками. Точно так же может быть устранено в (4) и третье (монопольное) слагаемое.

Обратимся теперь в решению задачи рассеяния, когда на поверхности $\Sigma_{\mathbf{R}}$ задано определенное граничное условие, и мы интересуемся значениями поля в верхнем полупространстве. Полное решение задачи предполагает знание соответствующей функции Грина. Функция Грина, однако, содержит в себе излишнюю информацию, поскольку вдали от поверхности она обязана удовлетворять однородному уравнению Гельмгольца и условию излучения. Поэтому для построения функции Грина, зависящей от шести аргументов (компоненты векторов положения источника и точки наблюдения) достаточно знать амплитуду рассеяния в базисе плоских волн, которая зависит от четырех аргументов, которыми являются горизонтальные проекции волновых векторов падающей и рассеянной волн. Амплитуда рассеяния (АР) вводится при помощи следующего представления для полного поля:

$$u = \frac{1}{\sqrt{q_0}}\exp[i\mathbf{k}_0\mathbf{r} - iq_0 z] + \int S(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0)\frac{1}{\sqrt{q_k}}\exp[i\mathbf{kr} - iq_k z] d\mathbf{k}, \quad (5)$$

где ось z предполагается направленной вертикально вверх и

$$q_0 = q_{k_0} = \sqrt{K^2 - k_0^2}, \quad \mathrm{Im}q_0 \geq 0. \quad (6)$$

Факторы $q_0^{-1/2}$, $q_k^{-1/2}$, в (5) приводят в более симметричной записи конечных формул; данная нормировка отвечает волнам с единичной плотностью вертикальной компоненты векторов потока энергии. Поскольку произвольное падающее поле может быть разложено в суперпозицию плоских волн, выражение для функции Грина получа-

ется из $S(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0)$ после соответствующих интегрирований по $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}_0$.

Очевидно, (5) удовлетворяет волновому уравнению при произвольной АР. Для вычисления АР необходимо использовать граничное условие. Технически наиболее простым и в то же время важным для акустики океана является граничное условие Дирихле, требующее обращения в нуль на поверхности $\Sigma_{\mathbf{R}}$ полного поля. Подставляя в (5) $z = h(\mathbf{r})$, где функция $h(\mathbf{r})$ описывает форму неровной поверхности, и приравнивая результат нулю, мы получим уравнение, из которого $S(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0)$ может быть легко вычислена в случае малых возвышений h в виде (вообще говоря, асимптотического) ряда по степеням возвышений[1]. В общем случае результат гласит:

$$\begin{gathered} S(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) = B(\mathbf{k}, \mathbf{k})\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) - \\ -2i(q_k q_0)^{1/2} B(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0)\hat{h}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) + \\ +(q_k q_0)^{1/2}\int B_2(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0; \xi)\hat{h}(\mathbf{k} - \xi)\hat{h}(\xi - \mathbf{k}_0)d\xi + \ldots \end{gathered} \tag{7}$$

Здесь

$$\hat{h}(\mathbf{k}) = \int h(\mathbf{r})\exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r})\frac{d\mathbf{r}}{(2\pi)^2} \tag{8}$$

представляет собой Фурье-компоненту возвышений, и коэффициенты B, B_2 не зависят от h и полностью определяются граничными условиями. В частности, для задачи Дирихле оказывается:

$$B(\mathbf{k}, \mathbf{k}) = -1, \quad B_2(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0; \xi) = 2q_\xi. \tag{8}$$

Если подставить в (3) представление для функции Грина в виде суперпозиции плоских волн и сравнить результат с определением (5), то получится следующее общее выражение для АР:

$$\begin{gathered} S(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) = \frac{1}{2q_k^{1/2}}\int \exp[-i\mathbf{k}\mathbf{r} - iq_k h(\mathbf{r})] \times \\ \times\left[(q_k - \mathbf{k}\nabla h)u - i\sqrt{1 + (\nabla h)^2}\frac{\partial u}{\partial n_{\mathbf{R}}}\right]\frac{d\mathbf{r}}{(2\pi)^2}. \end{gathered} \tag{9}$$

Здесь поле u соответствует плоской падающей волне $q_0^{-1/2}\exp(i\mathbf{k}_0\mathbf{r} - iq_0 z)$, и в качестве u, $\partial u/\partial n_{\mathbf{R}}$ может быть взято как полное, так и рассеянное поле.

[1] Законность подобной процедуры нередко ошибочно связывают с гипотезой Рэлея, которая выполняется далеко не всегда. Для обоснования данного способа вычисления АР достаточно заметить, что гипотеза Рэлея заведомо выполняется для аналитических профилей с достаточно малыми наклонами (см., например, [8]). Разложение АР в степенной ряд по h существует для любых неровностей, является однозначным и может быть вычислено, если ограничиться рассмотрением неровностей, принадлежащих только к классу аналитических плавных профилей.

ПРИБЛИЖЕНИЕ КАСАТЕЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ

Если бы граница $\Sigma_{\mathbf{R}}$ представляла собой плоскость, то значение рассеянного поля и его нормальной производной на $\Sigma_{\mathbf{R}}$ определялось бы по формулам:

$$\begin{gathered} u^{sc} = V(q^{(N)})\frac{\exp[i\mathbf{k}_0\mathbf{r} - iq_0 h(\mathbf{r})]}{\sqrt{q_0}}, \\ \frac{\partial u^{sc}}{\partial n_{\mathbf{R}}} = iq^{(N)}V(q^{(N)})\frac{\exp[i\mathbf{k}_0\mathbf{r} - iq_0 h(\mathbf{r})]}{\sqrt{q_0}}, \end{gathered} \tag{10}$$

где $q^{(N)}$ является взятой с обратным знаком проекцией волнового вектора падающей волны на нормаль к плоскости. Очевидно, в данном случае мы имеем:

$$q^{(N)} = \frac{q_0 + \mathbf{k}_0\nabla h}{\sqrt{1 + (\nabla h)^2}}. \tag{11}$$

ПКП заключается в использовании соотношений (10), (11) локально в каждой точке неровной поверхности, тем самым аппроксимируя эту поверхность в каждой точке касательной плоскостью (откуда и название метода).

Подставляя выражения (10)–(11) в (9), мы находим:

$$\begin{gathered} S(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) = \frac{1}{2\sqrt{q_k q_0}}\int \exp[-i\mathbf{k}\mathbf{r} - iq_k h(\mathbf{r})] \times \\ \times[q_k + q_0 - (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)\nabla h]V(q^{(N)}) \times \\ \times \exp[i\mathbf{k}_0\mathbf{r} - iq_0 h(\mathbf{r})]\frac{d\mathbf{r}}{(2\pi)^2}. \end{gathered} \tag{12}$$

Предположение о локальной связи между величинами падающего и рассеянного полей в каждой точке поверхности соответствует вычислению интеграла в (12) методом стационарной фазы. Положение стационарных точек определяется из условия равенства нулю градиента фазы, что приводит к уравнению:

$$\nabla h = \frac{\mathbf{k} - \mathbf{k}_0}{q_k + q_0}. \tag{13}$$

Значительное упрощение возникает, если, основываясь на этом обстоятельстве, аппроксимировать значение коэффициента отражения в подынтегральном выражении (12) его значением в стационарной точке и вынести его из-под знака интеграла (не прибегая при этом к вычислению (12) по явным формулам метода перевала). Член, пропорциональный ∇h, может быть преобразован

при помощи интегрирования по частям с использованием следующей формулы:

$$\nabla h \exp[-i(q_k + q_0)h] = \\ = -\frac{1}{i(q_k + q_0)} \nabla \exp[-i(q_k + q_0)h]. \quad (14)$$

Это приводит к замене в (12)

$$\nabla h \longrightarrow \frac{\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}}{q_0 + q_k}. \quad (15)$$

Простое вычисление дает:

$$S(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) = V(q^{(N)}) \frac{K^2 + q_k q_0 - \mathbf{k}\mathbf{k}_0}{(q_k + q_0)\sqrt{q_k q_0}} \times \\ \times \int \exp[-i(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)\mathbf{r} - i(q_k + q_0)h(\mathbf{r})] \frac{d\mathbf{r}}{(2\pi)^2}, \quad (16)$$

где

$$q^{(N)} = \sqrt{\frac{K^2 + q_k q_0 - \mathbf{k}\mathbf{k}_0}{2}}. \quad (17)$$

Заметим, что в предположении о наличии только одной стационарной точки нет необходимости, и уравнение (13) может иметь много решений, поскольку значение $q^{(N)}$ является одним и тем же для всех стационарных точек, и замена коэффициента отражения константой является оправданной.

Различие между (12) и (16) находится, вероятно, за пределами точности ПКП, и в этом случае выражение (16) можно считать общим результатом метода. Как видно, зависимость АР от формы неровностей описывается стандартным интегралом, не зависящим от вида граничных условий. Отметим, что ПКП удовлетворяет теореме взаимности, которая для многих типов граничных условий может быть выражена равенством:

$$S(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) = S(-\mathbf{k}_0, -\mathbf{k}). \quad (18)$$

Формула (16) может быть использована и для многокомпонентных полей. В этом случае АР $S(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0)$ является матрицей, описывающей взаимопревращение при рассеянии волн различных поляризаций. При применении ПКП следует учитывать преобразование поляризаций при переходе к локальной системе координат. По этой причине коэффициент отражения в (16) заменяется в этом случае на произведение трех матриц: двух ортогональных матриц, описывающих преобразование поляризаций при переходе от лабораторной к локальной системе координат, и одной диагональной матрицы, составленной из коэффициентов отражения волн различных поляризаций [7].

В случае малых неровностей (16) дает:

$$S(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) = \\ = V(q^{(N)}) \left(\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) - i \frac{K^2 + q_k q_0 - \mathbf{k}\mathbf{k}_0}{\sqrt{q_k q_0}} \hat{h}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \right). \quad (19)$$

Очевидно, что (19), вообще говоря, не совпадает с (7). В частности, для задачи Дирихле $V = -1$ и выражение (19) содержит по сравнению со вторым слагаемым в (7) дополнительный фактор, обращающий в единицу только в зеркальном направлении $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0$.

ОБОБЩЕНИЯ ПРИБЛИЖЕНИЯ КАСАТЕЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ

В некоторых работах, примыкающих по времени к моменту создания ПКП, можно встретить утверждение, что ПКП является ad hoc методом, не отвечающим какой-либо систематической процедуре. Такая точка зрения представляется неправильной. Задачи рассеяния на неровных поверхностях могут быть сведены к решению интегральных уравнений относительно плотностей дипольных и/или монопольных источников на поверхности. Эти уравнения могут быть приведены к виду, когда первая итерация приводит к точному решению в случае плоскости. Такой подход можно назвать приближением Кирхгофа. Для случая задач Дирихле и Неймана приближение Кирхгофа приводит к результату, совпадающему с ПКП. Однако для случая граничных условий, отвечающих зависящему от угла коэффициенту отражения, и, особенно, для случая многокомпонентных полей (как, например, электромагнитные волны), такой подход приводит к весьма громоздким формулировкам, требующим дальнейших упрощений. С другой стороны, как мы видели, ПКП позволяет получить результат в общем виде, обходя использование точных интегральных уравнений, отвечающих соответствующим краевым задачам.

Использование интегральных уравнений для расчета поправок или получения обобщений ПКП также требует громоздких вычислений и далеко не всегда позволяет получить практически полезные результаты. Поэтому для обобщения ПКП были использованы также несколько другие подходы. Очевидно, что поле u и его нормальная производная являются линейными функционалами падающего поля, и уравнение (9) может быть представлено в следующем виде:

$$S(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) = \\ = \int \exp[-i\mathbf{k}\mathbf{r} - iq_k h(\mathbf{r})] \hat{N} \exp[i\mathbf{k}_0\mathbf{r} - iq_0 h(\mathbf{r})] \frac{d\mathbf{r}}{(2\pi)^2}, \quad (20)$$

где $\hat{N}$ является некоторым линейным оператором. ПКП соответствует замене оператора $\hat{N}$ в (20) локальным фактором. Обобщение ПКП можно рассматривать как использование других приближений для оператора $\hat{N}$. При этом важно иметь в виду, что оператор $\hat{N}$ не должен меняться при вертикальном сдвиге поверхности как целого: $h(\mathbf{r}) \longrightarrow h(\mathbf{r}) + H$. Это утверждение вытекает из того, что точное преобразование АР, соответствующее вертикальному сдвигу, которое имеет вид

$$S_{h+H}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) = S_h(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0)\exp[-i(q_k + q_0)H], \quad (21)$$

обеспечивается в (20) имеющимися экспоненциальными факторами. Следовательно, оператор $\hat{N}$ должен функционально зависеть от градиента и высших производных возвышений, но не от возвышений как таковых.

Отметим, что трансформационное свойство (21) накладывает на коэффициентные функции в (7) следующее ограничение:

$$B_2(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0; \mathbf{k}) + B_2(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0; \mathbf{k}_0) + \\ + 2(q_k + q_0)B(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) = 0. \quad (22)$$

В явном виде уравнение (20) может быть записано в следующем виде:

$$S(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) = \int N(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0; [h]; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \times \\ \times \exp[-i\mathbf{k}\mathbf{r}_1 - iq_k h(\mathbf{r}_1) + i\mathbf{k}_0\mathbf{r}_2 - iq_0 h(\mathbf{r}_2)]\frac{d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2}{(2\pi)^4}. \quad (23)$$

Хотя АР является физически измеримой и, следовательно, однозначно определенной величиной, оператор $\hat{N}$ не определен однозначно. Причина этой неоднозначности заключается в произвольном выборе u^{ext} в уравнении (4). Легко видеть, что замена:

$$N \longrightarrow N + \\ + [\nabla g_1(\mathbf{r}_1) + g_1(\mathbf{r}_1)(-\mathbf{k} + q_k\nabla h(\mathbf{r}_1))]\theta_1(\mathbf{r}_2) + \\ + [\nabla g_2(\mathbf{r}_2) + g_2(\mathbf{r}_2)(\mathbf{k}_0 + q_0\nabla h(\mathbf{r}_2))]\theta_2(\mathbf{r}_1) \quad (24)$$

с произвольными функциями g_1, g_2, θ_1, θ_2, напоминающая по виду калибровочное преобразование, оставляет АР в (23) неизменной.

Зависимость ядра N в (23) от горизонтальных координат $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ может быть представлена в виде эквивалентной зависимости от разностной $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ и суммарной $(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2$ координат. Производя преобразование Фурье по разностной координате, мы получаем:

$$S(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) = \int N\left(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0; \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2}; \boldsymbol{\xi}; [h]; \right) \times \\ \times \exp[-i(\mathbf{k} - \boldsymbol{\xi})\mathbf{r}_1 - iq_k h(\mathbf{r}_1) - \\ - i(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{k}_0)\mathbf{r}_2 - iq_0 h(\mathbf{r}_2)]\frac{d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2}{(2\pi)^4}d\boldsymbol{\xi} \quad (25)$$

(мы не вводим здесь новое обозначение для Фурье-преобразованного ядра N, поскольку ядро $N(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0; [h]; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ из (23) далее использоваться не будет). Простейшее приближение для N, отличное от ПКП, можно получить, рассматривая разложение ядра этого оператора в степенной ряд [7]:

$$N = \Phi(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0; \boldsymbol{\xi}) + \\ + \int \Phi_1(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0; \boldsymbol{\xi}; \boldsymbol{\xi}_1)\hat{h}(\boldsymbol{\xi}_1)\exp\left[i\boldsymbol{\xi}_1\frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2}\right]d\boldsymbol{\xi}_1 + \\ + \int \Phi_2(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0; \boldsymbol{\xi}; \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2)\hat{h}(\boldsymbol{\xi}_1)\hat{h}(\boldsymbol{\xi}_2) \times \\ \times \exp\left[i(\boldsymbol{\xi}_1 + \boldsymbol{\xi}_2)\frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2}\right]d\boldsymbol{\xi}_1 d\boldsymbol{\xi}_2 + \ldots, \quad (26)$$

где коэффициентные функции Φ_k являются симметрическими по аргументам $\boldsymbol{\xi}_1, \ldots, \boldsymbol{\xi}_k$. Требование инвариантности оператора $\hat{N}$ по отношению к вертикальным трансляциям приводит к тому, что функции Φ_k при $\boldsymbol{\xi}_i = 0$ имеют порядок $O(\xi^k)$. Как показано в [7], используя это свойство, удается при помощи интегрирований по частям исключить в (26) вклад от Φ_1, Φ_2, модифицируя соответствующим образом ядро Φ. Приближение

$$N(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0; \boldsymbol{\xi}; [h]) \approx \Phi(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0, \boldsymbol{\xi}) \quad (27)$$

было названо в [7] нелокальным приближением малых наклонов. Явный вид функции Φ удается определить в общем виде путем сравнения (23) с разложением по степеням возвышений (7). В результате оказывается:

$$\Phi(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0, \boldsymbol{\xi}) = \frac{(q_k q_0)^{1/2}}{q_k + q_0}\left(2B(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) + \right. \\ + \frac{B_2(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0; \mathbf{k}_0) - B_2(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0; \boldsymbol{\xi})}{q_0} + \\ \left. + \frac{B_2(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0; \mathbf{k}) - B_2(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0; \boldsymbol{\xi})}{q_k}\right). \quad (28)$$

Выражение для B, B_2 для различных граничных условий можно найти в [9].

Отметим, что в 1956 г. Ю.П. Лысанов [10] и W.C. Meecham [11] предложили для задачи Дирихле приближение, которое приводит к сходному представлению для АР, хотя и с отличным выражением для ядра Φ.

Недостатком представления (23), (28) для АР является довольно высокий порядок интегриро-

вания. Этот порядок удается понизить за счет дополнительного приближения следующим образом [7]. Вклад от второго слагаемого в (28), возникающий после подстановки (28) в (23), может быть представлен в следующем виде:

$$\int(B_2(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0; \mathbf{k}_0) - B_2(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0; \boldsymbol{\xi}))\times$$
$$\times\exp[-i(\boldsymbol{\xi}-\mathbf{k}_0)\mathbf{r}_2 - iq_0h(\mathbf{r}_2)]d\mathbf{r}_2 =$$
$$= \int\exp[-iq_0h(\mathbf{r}_2)]\times$$
$$\times(B_2(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0; \mathbf{k}_0) - B_2(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0; \mathbf{k}_0 + i\nabla_{\mathbf{r}_2}))\times \tag{29}$$
$$\times\exp[-i(\boldsymbol{\xi}-\mathbf{k}_0)\mathbf{r}_2]d\mathbf{r}_2 = \int\exp[-i(\boldsymbol{\xi}-\mathbf{k}_0)\mathbf{r}_2]\times$$
$$\times(B_2(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0; \mathbf{k}_0) - B_2(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0; \mathbf{k}_0 - i\nabla_{\mathbf{r}_2}))\times$$
$$\times\exp[-iq_0h(\mathbf{r}_2)]d\mathbf{r}.$$

В результате действия оператора на $\exp[-iq_0h(\mathbf{r}_2)]$ в (29) появятся как члены, линейные по производным от h, так и члены, пропорциональные произведению производных различных порядков от возвышений. Если пренебречь этими последними, то в результате мы получим:

$$(B_2(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0; \mathbf{k}_0) - B_2(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0; \mathbf{k}_0 - i\nabla_{\mathbf{r}_2}))\exp[iq_0h(\mathbf{r}_2)] \approx$$
$$\approx -iq_0\exp[iq_0h(\mathbf{r}_2)]\times \tag{30}$$
$$\times(B_2(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0; \mathbf{k}_0) - B_2(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0; \mathbf{k}_0 - i\nabla_{\mathbf{r}_2}))h(\mathbf{r}_2).$$

Подобным же образом преобразуется и третье слагаемое в (28). Теперь интегрирование по $\boldsymbol{\xi}$ приводит к $\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$, и мы получаем в результате:

$$S(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) = \frac{2(q_kq_0)^{1/2}}{q_k+q_0}\times$$
$$\times\int\frac{d\mathbf{r}}{(2\pi)^2}\exp[-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}_0) - i(q_k+q_0)h(\mathbf{r})]\times \tag{31}$$
$$\times\left\{B(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) + \frac{i}{4}\int[B_2(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0; \mathbf{k}-\boldsymbol{\xi}) + B_2(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0; \mathbf{k}+\boldsymbol{\xi}) + \right.$$
$$\left. + 2(q_k+q_0)B(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0)]\hat{h}(\boldsymbol{\xi})\exp(i\boldsymbol{\xi}\mathbf{r})d\boldsymbol{\xi}\right\}.$$

При выводе этой формулы было использовано соотношение (22). Представление АР (31) называется приближением малых наклонов [12].

В силу (22) разложение подынтегрального выражения в (31) по степеням $\boldsymbol{\xi}$ начинается с членов порядка $O(\xi)$. Выделяя линейный по $\boldsymbol{\xi}$ член, мы можем записать:

$$B_2(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0; \mathbf{k}-\boldsymbol{\xi}) + B_2(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0; \mathbf{k}+\boldsymbol{\xi}) +$$
$$+ 2(q_k+q_0)B(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) = \tag{32}$$
$$= -\left(\frac{dB_2(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0; \boldsymbol{\eta})}{\partial\eta}\bigg|_{\boldsymbol{\eta}=\mathbf{k}} - \frac{dB_2(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0; \boldsymbol{\eta})}{\partial\eta}\bigg|_{\boldsymbol{\eta}=\mathbf{k}_0}\right)\boldsymbol{\xi} +$$
$$+ T(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0; \boldsymbol{\xi}).$$

Интегрирование по $\boldsymbol{\xi}$ в первом слагаемом (32) может быть проведено в явном виде, что приводит к появлению члена, пропорционального ∇h. Этот член может быть проинтегрирован по частям согласно (15). В итоге мы получаем:

$$S(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) = \frac{2(q_kq_0)^{1/2}}{q_k+q_0}\times$$
$$\times\int\frac{d\mathbf{r}}{(2\pi)^2}\exp[-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}_0) - i(q_k+q_0)h(\mathbf{r})]\times \tag{33}$$
$$\times\left[R(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) + \frac{i}{4}\int T(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0; \boldsymbol{\xi})\hat{h}(\boldsymbol{\xi})e^{-i\boldsymbol{\xi}\mathbf{r}}d\boldsymbol{\xi}\right],$$

где

$$R(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) = B(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) + \tag{34}$$
$$+\frac{1}{4}\left(\frac{dB_2(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0; \boldsymbol{\eta})}{\partial\eta}\bigg|_{\boldsymbol{\eta}=\mathbf{k}} - \frac{dB_2(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0; \boldsymbol{\eta})}{\partial\eta}\bigg|_{\boldsymbol{\eta}=\mathbf{k}_0}\right)\frac{\mathbf{k}-\mathbf{k}_0}{q_k+q_0}.$$

Подынтегральное выражение во втором члене (33) имеет порядок $O(\xi^2)$, то есть он зависит от производных профиля второго и более высоких порядков. Если пренебречь этим членом, то в результате получается выражение, совпадающее по форме с выражением для АР, полученным в рамках ПКП (16) с, вообще говоря, иным предынтегральным фактором. Для случая задачи Дирихле эти два фактора оказываются полностью совпадающими. Действительно, согласно (8) в этом случае $dB_2/d\boldsymbol{\xi} = -2\boldsymbol{\xi}/q_\xi$ и

$$R(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) = -1 + \frac{1}{4}\left(-2\frac{\mathbf{k}}{q_k} + 2\frac{\mathbf{k}_0}{q_0}\right)\frac{\mathbf{k}-\mathbf{k}_0}{q_k+q_0} =$$
$$= -\frac{K^2 + q_kq_0 - \mathbf{k}\mathbf{k}_0}{2q_kq_0}. \tag{35}$$

Точное совпадение является здесь случайным, и в общем случае оно должно иметь место лишь с точностью до членов порядка $O(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)$. Для случая электромагнитных волн это обстоятельство было проверено в [13].

По самому способу построения приближение малых наклонов совпадает с результатом теории возмущений (7) с точностью до членов порядка $O(h^2)$ (в чем легко убедиться и непосредственно). С другой стороны, для плавных на масштабе длины волны неровностей (31) сводится к ПКП. Таким образом, приближение малых наклонов поз-

воляет получить как длинно-, так и коротковолновую асимптотику для АР в рамках единого теоретического описания.

Приближенное вычисление АР, связанное с аппроксимацией оператора $\hat{N}$ по изложенной выше схеме приближения малых наклонов, не является, конечно, единственной возможностью. Выбор калибровки, не существенный при точном вычислении АР, влияет на результат при приближенном вычислении ядра оператора N в (25). В частности, можно потребовать, чтобы в низшем порядке выражение (25) в точности сводилось к ПКП; в этом случае поправочный член в (33) оказывается несколько иным. Это приближение получило название приближения локальной кривизны [14].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе прослежено, как ПКП, предложенное Л.М. Бреховских, может быть обобщено с тем, чтобы охватить случай брэгговского рассеяния. Ключевым моментом является нахождение приближенного выражения для оператора, родственного нелокальному оператору, преобразующему значение поля на границе в значение его нормальной производной. Такая возможность является характерной для случая рассеяния на неровных поверхностях, когда процесс рассеяния ограничен двумерным многообразием, и вряд ли допускает обобщение на общий случай трехмерного рассеяния. При этом своеобразная калибровочная инвариантность этого оператора позволяет (при приближенном вычислении АР) получать различные приближения, обладающие теми или иными преимуществами. Анализ большого количества имеющихся теорий рассеяния волн на неровных поверхностях, большинство которых так или иначе примыкают к приближению касательной плоскости Л.М. Бреховских, опубликован в недавнем обзоре [15].

Этой статьей моя жена В.В. Вавилова, принимавшая значительное участие в подготовке рукописи, и я хотели бы отдать дань уважения и глубокой признательности памяти нашего старшего товарища, учителя и коллеги Леонида Максимовича Бреховских.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бреховских Л.М.* Дифракция звуковых волн на неровной поверхности // ДАН СССР. 1951. Т. 79. Вып. 4. С. 585–588.
2. *Курьянов Б.Ф.* Рассеяние звука на шероховатой поверхности с двумя типами неровностей // Акуст. журн. 1962. Т. 8. С. 325–333.
3. *Фукс И.М.* К теории рассеяния радиоволн на взволнованной поверхности моря // Изв. ВУЗов. Сер. Радиофизика. 1966. Т. 9. С. 876–887.
4. *Valenzuela G.R.* Scattering of electromagnetic waves from a tilted slightly rough surface // Radio Sci. 1968. V. 3. P. 1057–1066.
5. *Voronovich A.G.* Non-local small-slope approximation for wave scattering from rough // Waves in Random Media. 2002. V. 6. P. 151–167.
6. *Voronovich A.G.* Non-classical approaches in the theory of wave scattering from rough surfaces. in: Proc. IV Int. Conf. on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation, Golden, CO, June 1–5, 1998. P. 84–88.
7. *Voronovich A.G.* The Kirchhoff and related approximations, in: Light Scattering and Nanoscale Roughness. A.A. Maradudin (ed.). New York: Springer, 2006.
8. *Voronovich A.G.* Rayleigh Hypothesis, in: Light Scattering and Nanoscale Roughness. A.A. Maradudin (ed.). New York: Springer, 2006.
9. *Voronovich A.G.* Wave scattering from rough surfaces. 2nd ed. Berlin: Springer, p. 236.
10. *Лысанов Ю.П.* Об одном приближенном решении задачи о рассеянии звуковых волн на неровной поверхности // Акуст. журн. 1956. Т. 2. С. 182–187.
11. *Meecham W.C.* Fourier transform method for treatment of the problem of the reflection of radiation from irregular surfaces // J. Acoust. Soc. Amer. 1956. V. 28. P. 370–377.
12. *Воронович А.Г.* Приближение малых наклонов в теории рассеяния волн на на неровных поверхностях // ЖЭТФ. 1985. Т. 89. С. 116–125.
13. *Voronovich A.G.* The effect of modulation of Bragg scattering in small-slope approximation // Waves in Random Media. 2002. V. 12. P. 341–349.
14. *Elfouhaily T., Guignard S., Thompson D.* Local and nonlocal curvature approximations: a new asymptotic theory for wave scattering // Waves in Random Media. 2003. V. 13. P. 321–337.
15. *Elfouhaily T., Guerin C.-A.* A critical survey of approximate scattering wave theories from random rough surfaces // Waves in Random Media. 2004. V. 14. P. R1–R40.

Tangential Plane Approximation and Some of Its Generalizations

A. G. Voronovich

NOAA/Earth System Research Laboratory, Broadway 325, Boulder, Colorado, 80305 USA
e-mail: alexander.voronovich@noaa.gov

Abstract—A review of the tangential plane approximation proposed by L.M. Brekhovskikh is presented. The advantage of the tangential plane approximation over the methods based on the analysis of integral equations for surface sources is emphasized. A general formula is given for the scattering amplitude of scalar plane waves under an arbitrary boundary condition. The direct generalization of the tangential plane approximation is shown to yieldapproximations that include a correct description of the Bragg scattering and allow one to avoid the use of a two-scale model.