АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2007, том 53, № 3, с. 377–385

УДК 534.23

# ПОЛЕ ЭКВИВАЛЕНТНОГО МУЛЬТИПОЛЬНОГО СОСТАВНОГО ИЗЛУЧАТЕЛЯ В ВОЛНОВОДЕ

**© 2007 г. Г. Н. Кузнецов, А. Н. Степанов**

*Институт общей физики им. А.М. Прохорова РАН*

*123007 Москва, ул. 5-я Магистральная 11*

*E-mail: KuznetsovGN@ncvi.ru, skbmortex@mail.ru*

Поступила в редакцию 24.10.06 г.

Рассматривается возможность замены объемного пространственно развитого низкочастотного источника звука, формирующего в дальней зоне трехмерное направленное поле, эквивалентным мультипольным источником. В развитие идей Л.М. Бреховских, получившего решения для монополя, приведены точные и упрощенные модели поля источника в виде суперпозиции мультиполей различных порядков в интегральном, модовом и лучевом приближениях применительно к неограниченному пространству, однородному и плоскослоистому волноводам. Представлены результаты расчетов и делается вывод об уменьшении вклада вертикальных дипольных и квадрупольных компонент в интерференционную структуру амплитуды поля в волноводе при увеличении расстояния от источника. Отмечается устойчивость фазовой структуры, независимо от типа сложного мультипольного источника.

PACS: 43.20.Mv

При выполнении измерений шумовых полей от точечных или объемных источников в волноводе необходимо учитывать не только свойства волновода, но и характеристики источников звукового поля. Для теоретических исследований в рамках прямых и обратных задач и обработки экспериментальных данных необходимы адекватные реальным условиям модели источников. Очевидно, что заменить одной моделью разнообразные источники невозможно. Ниже исследуется вариант построения параметрической эквивалентной модели, которая рекомендуется для использования при моделировании и экспериментальных исследованиях низкочастотных шумовых полей объемных пространственно развитых тел в волноводе. Эквивалентность модели понимается в том смысле, что уровни давления и интерференционные структуры амплитуды и фазы объемного низкочастотного источника и точечного мультиполя должны быть достаточно близкими для обеспечения заданной точности измерений.

**Модели гидроакустических излучателей.** Для описания пространственно-частотно-временных характеристик звуковых полей в волноводе применяются различные модельные представления. В качестве источника для расчета поля в волноводе обычно используется модель монополя – точечного ненаправленного излучателя, потенциал поля скоростей звукового давления $\psi_0$ которого в неограниченном однородном пространстве задается выражением $\psi_0(r, \theta, \varphi) = \exp(ikr)/r$, где $r$, $\theta$, $\varphi$ – сферические координаты точки наблюдения, центр системы координат совмещен с излучателем, $i$ – мнимая единица, $k = \omega/c$ – волновое число, $\omega$ – круговая частота излучателя, $c$ – скорость звука в среде. Для описания полей такого излучателя в волноводе, ограниченном плоскими поверхностями, Л.М. Бреховских предложил использовать интегральное представление для потенциала $\psi_0$, которое является разложением сферической волны излучателя в совокупность плоских волн [1]

$$\psi_0(r, \theta, \varphi) = \frac{\exp(ikr)}{r} = \frac{ik}{2}\int\limits_{-\pi/2+i\infty}^{\pi/2-i\infty} H_0^{(1)}(k\rho\sin\beta)\exp(ik|z|\cos\beta)\sin\beta d\beta, \quad (1)$$

где $H_0^{(1)}(k\rho\sin\beta)$ – функция Ханкеля первого рода порядка 0, $\rho = r\sin\theta$ и $z = r\cos\theta$ – соответственно горизонтальное и вертикальное расстояния до точки наблюдения.

Монопольная модель проста и удобна для решения различных практических задач. Но она далеко не всегда является адекватной, так как практически все реальные гидроакустические источники обладают направленными свойствами, то есть амплитуда и фаза давления зависят еще и от направления на точку наблюдения. Для описания направленности источников, а также для расчета создаваемых ими полей предложены различные модели и методы расчета. В частности, Ю.П. Лысанов [2], А.В. Генералов [3] и другие авторы раз-

работали полезную модель точечного направленного излучателя – мультиполя, потенциал которого определяется дифференцированием выражения (1) по соответствующим пространственным координатам. Такой подход можно эффективно применять для решения прямых задач. Но в связи с тем, что получаемая при дифференцировании потенциала $\psi_0$ система функций разложения Тейлора является линейно зависимой, использование этого подхода для решения обратных задач, в которых необходимо определять направленные свойства излучателей по создаваемым ими полям, затруднительно. И.Д. Иванов [4] рассматривал краевую задачу для волновода с излучателем и получил интересное решение в виде контурного интеграла, который вычислялся с помощью вычетов. А. Хауг (A. Haug) и др. [5] находили решение краевой задачи непосредственно в виде разложения по нормальным волнам. Получаемые такими методами выражения для поля сложно использовать при решении обратных задач, поскольку для интегрирования по занятой источником произвольной формы и размеров области необходимо задавать в этой области функцию пространственного распределения источников с заданными характеристиками. Но эта функция и характеристики излучателей, как правило, неизвестны. Кроме того, коэффициенты возбуждения нормальных волн оказываются зависящими не только от свойств источника, но и от граничных условий, что, вообще говоря, не позволяет найти описание источника, не зависящее от формы и размеров зоны распространения звука.

Известно, что решение обратных задач требует параметрического представления моделей и минимизации описания, т.е. ограничения числа независимых параметров, характеризующих модель. В противном случае, задача может оказаться незамкнутой из-за неопределенности числа уравнений и ограничивающих функций и управляющих исходных данных. При описании реального объемного протяженного источника на средних и высоких частотах удобно заменить его эквивалентным источником в виде дискретной антенны с распределенными по поверхности или по объему элементарными источниками (например, монополями и диполями), параметры которых необходимо вычислить, решая обратную задачу. Однако на низких частотах из-за дифракции звука на излучающей поверхности формируется консолидированное достаточно коррелированное поле, которое, по мнению авторов, удобно аппроксимировать мультипольного типа источником, эквивалентным объемному источнику.

В работах [6–8] предложено для описания низкочастотных объемных направленных источников использовать модель точечного направленного излучателя (4), основанную на разложении потенциала $\psi_0$ в ряд по сферическим функциям, которые в отличие от разложения Тейлора образуют систему линейно не зависимых на сфере функций. Это является необходимым условием корректного решения обратных задач, сформулированных для данной модели. Исследовано приближенное интегральное представление для потенциала мультипольного излучателя в неограниченном пространстве, аналогичное разложению потенциала монополя (1). В настоящей работе приводится точное интегральное представление для поля сложного мультипольного типа излучателя в неограниченном пространстве, и на его основе уточнены выражения для поля этого излучателя в различных волноводах. Выполняется обобщение основных теоретических результатов и анализируются результаты численного исследования структуры низкочастотных полей мультиполей в волноводе.

**Эквивалентная модель точечного направленного излучателя в неограниченном пространстве.** Пусть в однородном неограниченном пространстве находится монохроматический источник звука конечных размеров и произвольной формы. Выбрав внутри источника произвольную точку $O$, построим из нее как из центра сферу $S_0$ радиуса $r_0$. Построим далее сферическую систему координат, центр которой совмещен с точкой $O$. Давление, создаваемое монохроматическим источником в некоторой точке поверхности сферы, определяется вещественной частью функции $\tilde{P}(r_0, \theta, \varphi, t) = i\omega\rho_0\tilde{\psi}(r_0, \theta, \varphi)\exp(-i\omega t)$, где $t$ – время, $\rho_0$ – плотность среды, $\tilde{\psi}$ – потенциал скоростей звукового поля источника. Будем считать, что $\tilde{\psi}(r_0, \theta, \varphi)$ представляет собой непрерывно дифференцируемую до второго порядка включительно функцию. Звуковые колебания, создаваемые исходным источником в области $\Omega$ вне сферы $S_0$, можно описать функцией, которая является решением внешней задачи Дирихле, поставленной для сферы $S_0$. Эта задача формулируется следующим образом: найти функцию $\psi(M)$, удовлетворяющую в области $\Omega$ однородному уравнению Гельмгольца $\nabla^2\psi(M) + k^2\psi(M) = 0$, $M \in \Omega$, и принимающую на ее границе $S_0$ заданное значение $(M) = \tilde{\psi}(M)$, $M \in S_0$, где $\nabla^2$ – оператор Лапласа, $M$ – точка внутри рассматриваемой области $\Omega$ или на ее границе $S_0$. Кроме того, на бесконечности искомый потенциал $\psi$ должен удовлетворять условию излучения Зоммерфельда $\dfrac{\partial\psi(M)}{\partial r} + ik\psi(M) = o(1/r)$. Решение

этой задачи единственно и может быть представлено равномерно сходящимся рядом [9]

$$\psi(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\bar{C}_{nm}(r_0)\frac{h_n^{(1)}(kr)}{h_n^{(1)}(kr_0)}\times \times P_n^{|m|}(\cos\theta)\exp(im\varphi), \quad r\geq r_0, \tag{2}$$

где $h_n^{(1)}$ – сферические функции Бесселя третьего рода порядка $n$, $P_n^{|m|}$ – присоединенные полиномы Лежандра. Зависимость коэффициентов разложения $\bar{C}_{nm}$ от радиуса $r_0$ сферы $S_0$, для которой поставлена внешняя задача Дирихле, имеет вид [9]

$$\bar{C}_{nm}(r_0) = \frac{2n+1}{4\pi}\frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!}\times \times\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\exp(im\varphi)\tilde{\psi}(r_0,\theta,\varphi)P_n^{|m|}(\cos\theta)\sin\theta d\theta. \tag{3}$$

Авторами доказано, что входящие в выражение (2) отношения $C_{nm} = \bar{C}_{nm}(r_0)/h_n^{(1)}(kr_0)$ не зависят от радиуса $r_0$ сферы и, следовательно, величины $C_{nm}$ являются константами, характеризующими источник. Это позволяет, подставляя $C_{nm}$ в выражение для потенциала волнового поля (2) и ограничиваясь конечным числом слагаемых $N$, получить выражение для потенциала поля, не зависящее от использованной для его построения сферы

$$\psi_N(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=-n}^{m=n}C_{nm}h_n^{(1)}(kr)\times \times P_n^{|m|}(\cos\theta)\exp(im\varphi), \quad r>0. \tag{4}$$

Предлагается далее использовать выражение (4) в качестве модели направленного точечного излучателя, эквивалентного исходному реальному низкочастотному источнику конечных размеров. Эквивалентность эта понимается в том смысле, что акустическое поле такого точечного излучателя в дальней и, частично, в ближней зоне достаточно близко к полю исходного источника конечных размеров вне некоторой сферы, целиком содержащей в себе исходный источник. Направленные свойства модельного излучателя полностью определяются входящими в (4) комплексными параметрами $C_{nm}$. Они имеют смысл моментов элементарных сферических мультиполей, из которых состоит разложение. Если известно значение функции $\tilde{\psi}(r_0,\theta,\varphi)$ на некоторой сфере, внутри которой находится реальный излучатель, то мультипольные моменты модели $C_{nm}$ легко вычисляются с помощью приведенных выше соотношений. Заметим, что при $N = 0$ выражение (4), определяющее потенциал мультипольного излучателя, совпадает с потенциалом монопольного, то есть ненаправленного излучателя, модель которого предложена Л.М. Бреховских.

**Интегральное представление потенциала мультипольного излучателя в неограниченном пространстве.** Л.М. Бреховских использовал разложение потенциала монопольного излучателя в совокупность плоских волн (1) для решения задач, связанных с ненаправленным источником, находящимся в различных волноводах. Получим аналогичное интегральное представление для потенциала мультипольного типа модели (4). Для этого воспользуемся тем, что для больших значений аргумента сферические функции Бесселя аппроксимируются функцией влияния ненаправленного точечного излучателя $h_n^{(1)}(kr) \cong (-1)^{n+1}\exp(ikr)/kr$, $kr \gg 1$. Заменив в (4) сферические функции Бесселя их аппроксимацией и положив $z = r\cos\theta = 0$, найдем Фурье-образ полученного выражения. После возврата в пространство оригиналов получим интегральное представление для потенциала мультипольного типа излучателя в плоскости $z = 0$

$$f(\rho,\varphi) = \frac{i}{2\pi}\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=-n}^{n}C_{nm}(-i)^{n+1}\times \times\int_0^{\pi/2-i\infty}\int_0^{\pi}\exp(ik\rho\cos(\varphi-\alpha)\sin\beta+im\alpha)\times \times P_n^{|m|}(0)\,\mathrm{tg}^m\frac{\beta}{2}\sin\beta d\alpha d\beta.$$

К трехмерному пространству можно перейти, продолжив решение с плоскости $z = 0$. Авторами доказано, что вблизи соответствующей $z = 0$ точки $\beta = \pi/2$ для любых $n \geq 0$ и $m \leq |n|$ имеет место приближенное равенство $P_n^{|m|}(\cos\beta) \approx \mathrm{tg}^m\frac{\beta}{2}$. Следовательно, для трехмерного пространства естественно записать выражение для потенциала в виде

$$\psi(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=-n}^{n}\mathrm{sign}^{n+|m|}(z)D_{nm}\exp(im\varphi)\times \times\int_{-\pi/2+i\infty}^{\pi/2-i\infty}H_m^{(1)}(k\rho\sin\beta)\exp(ik\cos\beta|z|)\times \times P_n^{|m|}(\cos\beta)\sin\beta d\beta, \tag{5}$$

где $D_{nm} = C_{nm}\exp(i\pi(m-n)/2)/2$, $H_m^{(1)}(k\rho\sin\beta)$ – функция Ханкеля первого рода порядка $m$. В выражении для потенциала сомножитель $\mathrm{sign}^{n+|m|}(z)$ учитывает изменение знака $z$ при продолжении в нижнюю полуплоскость.

Доказано также, что контурный интеграл в выражении (5) сходится везде, за исключением точки $\rho = 0 \wedge z = 0$, а в области $0 < \rho' \le \rho \vee 0 < z' \le |z|$, где $\rho'$ и $z'$ – произвольные сколь угодно малые положительные числа, интеграл (5) сходится равномерно и что функция $\psi_N(r, \theta, \varphi)$, заданная выражением (4), и функция $\hat{\psi}(r, \theta, \varphi)$, определяемая выражением (5), в области равномерной сходимости интеграла (5) равны друг другу. Таким образом, разложение в совокупность плоских волн (5) является точным интегральным представлением для потенциала (4) мультипольного типа излучателя в неограниченном пространстве. Это позволяет использовать представление (5) вместо выражения (4) при определении поля мультипольного типа излучателя в областях, ограниченных плоскими поверхностями. Выражения (4) и (5) для потенциала поля мультипольного типа излучателя позволяют распространить на мультиполи произвольного порядка идеи, предложенные и развитые Л.М. Бреховских для монопольного излучателя. Кроме того, (4) и (5) представляют собой компактные явно заданные аналитические выражения, что удобнее, чем разложение и Тейлора и дифференцирование потенциала (1).

Ниже в рамках рассматриваемой мультипольного типа модели предлагается вместо неоднородного уравнения Гельмгольца, входящего в постановку краевых задач определения поля мультипольного излучателя в различных областях, решать соответствующее однородное, что существенно упрощает решение как прямых, так и обратных задач, так как отпадает необходимость в нахождении частного решения. Однако при таком переходе необходимо требовать, чтобы вблизи источника искомое решение совпадало с полем эквивалентного модельного излучателя (4).

**Мультипольный излучатель в однородном плоскопараллельном волноводе. Точное решение.** Рассмотрим задачу определения поля мультипольного типа излучателя, находящегося в однородном плоскопараллельном волноводе $\Omega$ с неидеальными границами $\Sigma_1$ и $\Sigma_2$ на расстоянии $z_0$ от его верхней границы. Для этого найдем функцию $(M)$, которая: 1) в области $\Omega$ удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца $\nabla^2\psi(M) + k^2\psi(M) = 0$, $M \in \Omega$, всюду в области $\Omega$ за исключением, может быть, точки $P$, в которой находится излучатель; 2) на границах волновода – поверхностях $\Sigma_1$ и $\Sigma_2$ – удовлетворяет условию сохранения непрерывности потенциала и его нормальной производной $[\psi]|_s = 0$, $[d\psi/dn]|_s = 0$, $S = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, где скобки [ ] означают скачок функции на границе раздела.

Если известны импедансы границ волновода, то условия непрерывности потенциала и его нормальной производной могут быть записаны в эквивалентной форме, как граничные условия третьего рода $\partial\psi/\partial z + g_1\psi = 0$ и $\partial\psi/\partial z + g_2\psi = 0$, где $g_1 = i\omega\rho_0/Z_1$ и $g_2 = i\omega\rho_0/Z_2$ – комплексные параметры, зависящие от импедансов $Z_1$ и $Z_2$ нижней и верхней границ волновода соответственно. Вместо обсуждаемых краевых условий можно применять и вытекающие из них функциональные зависимости, определяющие коэффициенты отражения плоских звуковых волн от нижней $V_1 = V_1(\beta)$ и верхней $V_2 = V_2(\beta)$ границ волновода, $\beta$ – угол падения плоской волны на границу. Будем также считать выполненными условия $kz_0 > 1$ и $k(h - z_0) > 1$, где $h$ – толщина волновода. Это позволяет ослабить взаимодействие ближнего поля мультипольного типа источника с границами раздела и пренебречь влиянием дифракции волн, отраженных от поверхности и дна водоема, на поверхности реального объемного излучателя.

Этим требованиям удовлетворяет решение в виде:

$$\psi_N(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=-n}^{n} D_{nm} \exp(im\varphi) \times$$
$$\times \int_{-\pi/2+i\infty}^{\pi/2+i\infty} H_m^{(1)}(k\rho\sin\beta) P_n^{|m|}(\cos\beta) F(\beta) \sin(\beta) d\beta, \tag{6}$$

где

$$F(\beta) = \begin{cases} \dfrac{(\chi_{nm}\exp[-b(h-z_0)] + V_1(\beta)\exp[b(h-z_0)])(\exp[-b(z+z_0)] + V_2(\beta)\exp[b(z+z_0)])}{\exp(-bh) - V_1(\beta)V_2(\beta)\exp(bh)}, & -z_0 \le z \le 0 \\ \dfrac{(\exp(-bz_0) + \chi_{nm}V_2(\beta)\exp(bz_0))(\exp[bz - b(h-z_0)] + V_1(\beta)\exp[-bz + b(h-z_0)])}{\exp(-bh) - V_1(\beta)V_2(\beta)\exp(bh)}, & 0 \le z \le h - z_0 \end{cases}$$

в связанной с излучателем системе координат, $b = ik\cos\beta$, $\chi_{nm} = (-1)^{n+|m|}$. Коэффициент $\chi_{nm}$ имеет физический смысл, определяющий особенности отражения волн мультиполей на идеальных границах. Как известно, на одной и той же границе волны для некоторых из мультиполей отражаются с той же фазой, что и для монополя, а для остальных мультиполей изменяют фазу на противоположную. Перепишем выражение (6) в более удобном для анализа и расчетов виде

$$\psi(r,\theta,\varphi) = \psi_m(r,\theta,\varphi) - \hat{\psi}_m(r,\theta,\varphi) + \\ + \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=-n}^{n} D_{nm}\exp(im\varphi)\times \\ \times \int_{-\pi/2+i\infty}^{\pi/2+i\infty} H_m^{(1)}(k\rho\sin\beta)P_n^{|m|}(\cos\beta)\hat{F}(\beta)\sin\beta d\beta, \quad (7)$$

где $\psi_m(r, \theta, \varphi)$ представляет собой потенциал мультипольного типа излучателя в неограниченном пространстве (4), $\hat{\psi}_m(r, \theta, \varphi)$ – слагаемое, описывающее вклад отражения от верхней границы волновода:

$$\hat{\psi}_m(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=-n}^{n} \chi_{nm}D_{nm}\exp(im\varphi)\times \\ \times \int_{-\pi/2+i\infty}^{\pi/2-i\infty} H_m^{(1)}(k\rho\sin\beta)P_n^{|m|}(\cos\beta)V_2(\beta)\times \\ \times\exp[b(2z_0+z)]\sin\beta d\beta,$$

и

$$\hat{F}(\beta) = V_1(\beta)\exp(bh)\frac{(\exp[-b(z_0+z)] + V_2(\beta)\exp[b(z_0+z)])(\exp[-bz_0] + \chi_{nm}V_2(\beta)\exp[bz_0])}{\exp(-bh) - V_1(\beta)V_2(\beta)\exp(bh)},$$

$$-z_0 \le z \le h - z_0.$$

Для наиболее часто встречающегося случая волновода с абсолютно мягкой верхней границей, когда $V_2 = -1$, выражение для потенциала поля (7) можно упростить

$$\hat{\psi}_m(r,\theta,\varphi) = \\ = \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=-n}^{n} \chi_{nm}C_{nm}\exp(im\varphi)h_m^{(1)}(kr')P_n^{|m|}(\cos\theta'), \quad (8)$$

где $r' = \sqrt{r^2 + 4rz_0\cos\theta + 4z_0^2}$, $\cos\theta' = (r\cos\theta + 2z_0)/r'$ и

$$\hat{F}(\beta) = \begin{cases} \dfrac{4V_1(\beta)\exp(2bh)}{1+V_1(\beta)\exp(2bh)}\operatorname{sh}b(z_0+z)\operatorname{sh}bz_0, \\ n+|m| - \text{четные} \\ -\dfrac{4V_1(\beta)\exp(2bh)}{1+V_1(\beta)\exp(2bh)}\operatorname{sh}b(z_0+z)\operatorname{ch}bz_0, \\ n+|m| - \text{нечетные}. \end{cases}$$

**Мультипольного типа излучатель в однородном плоскопараллельном волноводе. Приближенное решение.** Решения (6), (7) и (8) являются точными решениями поставленной задачи. Входящие в эти решения контурные интегралы можно вычислить "методом перевала", разложением по нормальным волнам и прямым численным интегрированием. Например, методом перевала можно получить удобное для выполнения расчетов на ЭВМ приближенное решение задачи о мультипольного типа излучателе в плоскопараллельном однородном волноводе:

$$\psi(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=-n}^{n} C_{nm}(-1)^{n+1}\exp(im\varphi)\times \\ \times\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{4}\chi_{nmj}\frac{\exp(ikr_{lj})}{kr_{lj}}\left(F_1(\theta_{lj}) - \frac{iF_2(\vartheta_{lj})}{2kr_{lj}}\right), \quad (9)$$

где $z_{l1} = z - 2lh$, $z_{l2} = z + 2z_0 - 2(l+1)h$, $z_{l3} = z + 2z_0 + 2lh$, $z_{l4} = z + 2(l+1)h$, $r_{lj}^2 = \rho^2 + z_{lj}^2$, $\cos\theta_{lj} = z_{lj}/r_{lj}$, $l = 0, 1, 2, \ldots$; $j = 1$–$4$, $F_1(\theta_{lj}) = P_n^{|m|}(\cos\theta_{lj})V_1^{L_{1j}}(\theta_{lj})V_2^{L_{2j}}(\theta_{lj})$, $\chi_{nmj} = 1$ для $j = 1$ и 4, $\chi_{nmj} = (-1)^{n+|m|}$ для $j = 2$ и 3; $L_{1j} = 1$ для $j = 1$ и 3, $L_{1j} = l + 1$ для $j = 2$ и 4; $L_{2j} = 1$ для $j = 1$ и 2, $L_{2j} = l + 1$ для $j = 3$ и 4, а $F_2(\theta_{lj}) = F_1''(\theta_{lj}) + F_1'(\theta_{lj})\operatorname{ctg}(\theta_{lj}) + m^2/\sin\theta_{lj}F_1(\theta_{lj})$. Эти формулы позволяют при заданной функции $V_2(\beta)$ и рассчитанной в результате калибровки волновода функции $V_1(\beta)$ вычислять поле мультипольного типа излучателя в однородном плоскопараллельном волноводе с учетом членов, содержащих $1/(kr)^2$. Полученное решение не устанавливает ограничений на характеристики $V_1(\beta)$ и $V_2(\beta)$. Это позволяет его использовать, в том числе, в волноводах с ледовым покровом и в волноводах с упругим грунтом.

**Мультипольного типа излучатель в волноводе Пекериса.** Современные методы и алгоритмы калибровки позволяют определить эквивалентные параметры многослойного грунта, в том числе жидкого, лежащего на упругом полупространстве. Можно показать, что для грунтов с малыми скоростями поперечных волн в качестве адекватной модели можно применять модель волновода Пекериса. Для получения решения необходимо учитывать, что при деформации исходного контура интегрирования может быть затронута точка ветвления функции $V_1(\beta)$, и тогда к полю, рассчитанному по перевальному пути (9), необходимо добавить интеграл $\tilde{\psi}(r, \theta, \varphi)$ по берегам разреза, идущего от точки ветвления на бесконечность. Вычисление этого интеграла для супер-

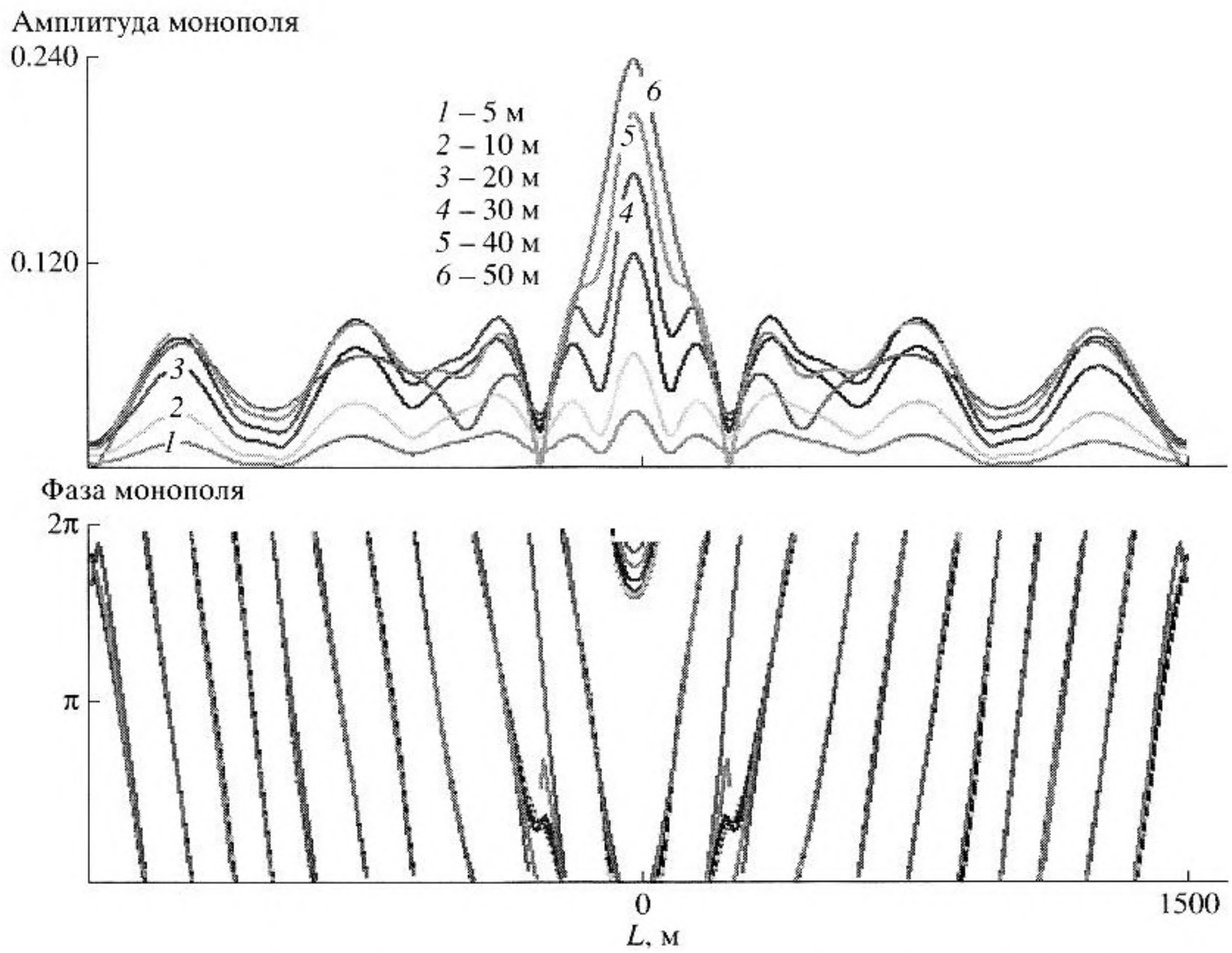


**Рис. 1.** Зависимость амплитуды и фазы поля монополя от расстояния и аспекта наблюдения.

позиции мультиполей приводит к выражению для потенциала боковой волны

$$\tilde{\psi} = \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=-n}^{n} C_{nm}(-1)^{n+1}\exp(im\varphi)\frac{2i\tilde{n}P_n^{|m|}(\cos\delta)}{\tilde{m}\sqrt{k\rho\cos\delta}}\times$$
$$\times\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{4}\chi_{nmj}\frac{L_{1j}(-1)^{l_{2j}}\exp(ikr_{lj}\cos(\delta-\theta_{lj}))}{(kr_{lj}\sin(\theta_{lj}-\delta))^{3/2}},$$

где $\delta = \arcsin\tilde{n}$ – критический угол падения плоской волны на дно волновода, $\tilde{n} = c_0/c_1$; $c_0$ – скорость звука в волноводе, $c_1$ – скорость звука в подстилающем полупространстве, $\tilde{m} = \rho_1/\rho_0$, $\rho_0$ – плотность среды в волноводе, $\rho_1$ – плотность среды в подстилающем полупространстве; суммирование в двух внутренних суммах распространяется только на те слагаемые, для которых выполняется условие $\delta \le \theta_{lj} \le \pi - \delta$, то есть на слагаемые, соответствующие плоским волнам, падающим на дно волновода под закритическим углом. Заметим, что в выражении для потенциала боковой волны теряется зависимость внутренних сумм от полиномов Лежандра, так как аргумент полиномов является величиной постоянной и равной $\cos\delta$.

Полученное из (6) модовое представление поля в волноводе Пекериса имеет вид:

$$\psi(r,\theta,\varphi) = \frac{4\pi}{kh}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=-n}^{n} A_{nml}H_m^{(1)}(\xi_l\rho)\exp(im\varphi), \quad (10)$$

где

$$A_{nml} = \frac{\mu_{nm}D_{nm}x_l\sin\alpha_{l0}\sin\alpha_l P_n^{|m|}(x_l/kh)}{\sin^2 x_l\,\mathrm{tg}\,x_l/\tilde{m}^2 + \sin x_l\cos x_l - x_l},$$

$x_l$ – корни дисперсионного уравнения волновода Пекериса $\mathrm{ctg}\,x = i\sqrt{(x^2-(kh\nu)^2}/\tilde{m}x$, $^2 = 1-\tilde{n}^2$, $\xi_l^2 = k^2-(x_l/h)^2$, $\mu_{nm} = -1$ для $n+|m|$ четных и $\mu_{mb} = -i$ для $n+|m|$ нечетных, $\alpha_{l0} = \pi/4(1-\chi_{nm}) + x_l z_0/h$ и $\alpha_l = x_l z/h$, $l = 0, 1, 2, \ldots$.

**Мультипольного типа излучатель в слоистом плоскопараллельном волноводе.** Пусть мультипольного типа излучатель, описываемый в однородном неограниченном пространстве потенциалом (4), находится в плоскопараллельном слоистом волноводе глубиной $h$ на расстояниях $z_0 > 0$ и $h - z_0 > 0$ от неидеальных верхней и нижней границ волновода. Будем считать, что задана функция $c(z)$, описывающая профиль скорости звука в вол-

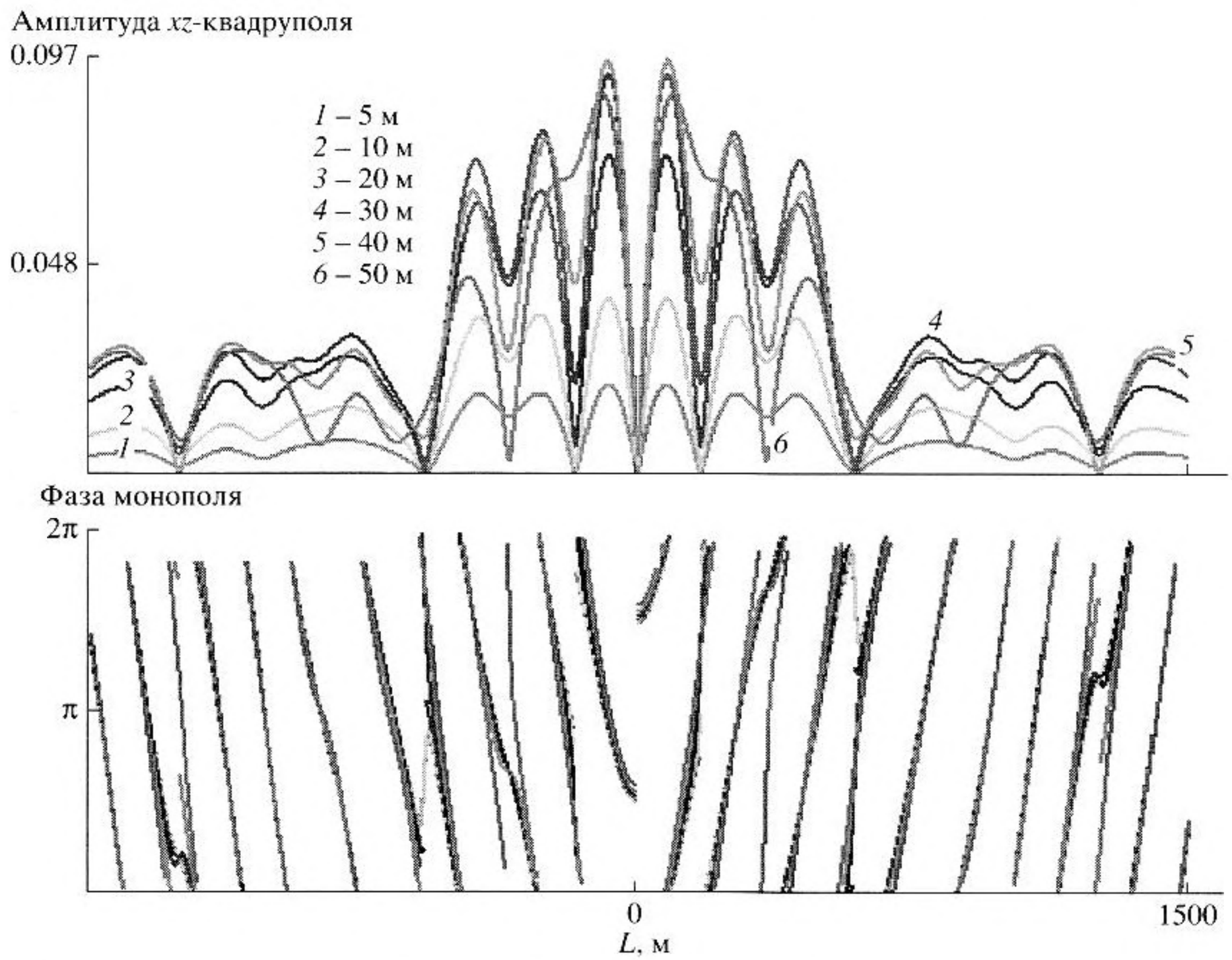


**Рис. 2.** Зависимость амплитуды и фазы поля $xz$-квадруполя от расстояния и аспекта наблюдения.

новоде. Задача определения поля мультипольного типа излучателя в таком волноводе ставится практически так же, как в предыдущем случае. Но искомая функция должна удовлетворять однородному уравнению Гельмгольца вида $\nabla^2\psi + k^2(z)\psi = 0$, где $k(z) = \omega/c(z)$ для $-\infty < x, y < \infty$, $-z_0 \le z \le h - z_0$. Представим решение этой задачи в виде:

$$\psi = \frac{2i}{k}\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=-n}^{n} D_{nm}\exp(im\varphi)\times \int\limits_{-\pi/2+i\infty}^{\pi/2+i\infty} H_m^{(1)}(k\xi)P_n^{|m|}(b/ik)\frac{F(z,\xi)}{W(\tilde{\varphi}_1,\tilde{\varphi}_2)}d\xi, \quad (11)$$

где $F(z, \xi) = \tilde{\varphi}_1(0, \xi)\tilde{\varphi}_2(z, \xi)$ для $-z_0 \le z \le 0$, и $F(z, \xi) = \tilde{\varphi}_2(0, \xi)\tilde{\varphi}_1(z, \xi)$ для $0 \le z \le h - z_0$, $W(\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2) = \tilde{\varphi}_1'(0, \xi)\tilde{\varphi}_2(0, \xi) - \tilde{\varphi}_1(0, \xi)\tilde{\varphi}_2'(0, \xi)$ – не равный нулю вронскиан линейно независимых решений дифференциального уравнения $d^2\psi/dz^2 + (k^2(z) - \xi^2)\psi = 0$, которые удовлетворяют краевым условиям при $z = -z_0$ и $z = h - z_0$ соответственно. Можно показать, что выражения (6), которые определяют поле, создаваемое мультипольного типа излучателем в однородном волноводе, являются частным случаем выражения (11), которое описывает поле, созданное тем же излучателем в слоистом волноводе.

**Анализ результатов численного эксперимента.** Для различных условий распространения звука выполнены расчеты амплитудной и фазовой интерференционной структуры поля в плоскослоистом волноводе от источников различного типа (монополей, диполей и квадруполей). Расчеты выполнялись для разных частот при удалении источников от точки приема при расположении источников и приемников на разных глубинах. На рис. 1–5 для волновода Пекериса при скорости звука в воде 1500 м/с и глубине волновода 300 м представлены данные для монополя, диполя и квадруполя. Параметры грунта: $n_0 = 0.57$; $m = 2.2$; $\beta = 0.03$. Источник с частотой 15 Гц располагался на глубине 40 м и двигался при траверзном расстоянии, равном длине волны (рис. 1 и 2). На рис. 3–5 представлены результаты расчетов для приемников и источников, расположенных посередине волновода, но при различных траверзных расстояниях, указанных на рисунках. Установлено, что интерференционная структура амплитуды давления мультиполей различных порядков существенно отличается для различных источников, в то

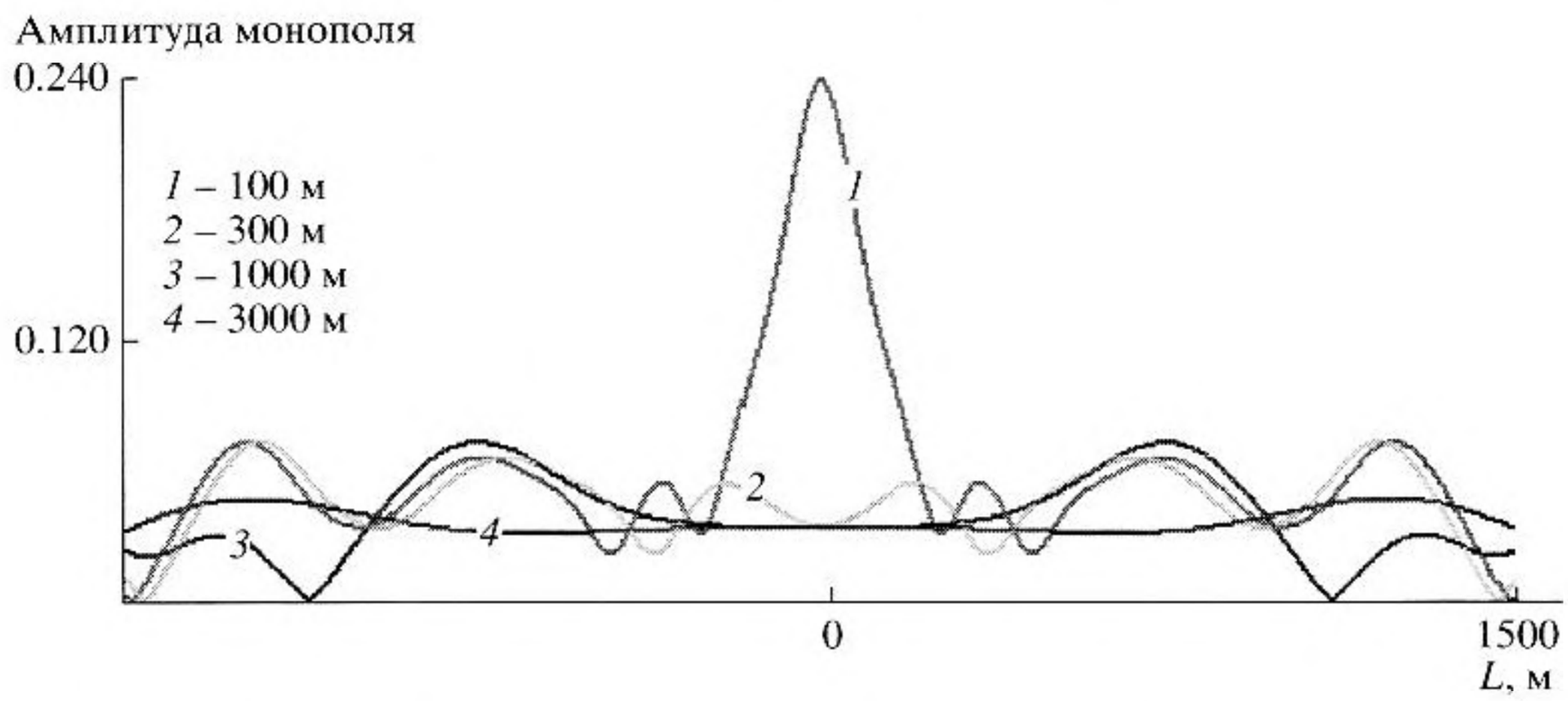


**Рис. 3.** Зависимость амплитуды поля монополя от расстояния и аспекта наблюдения.

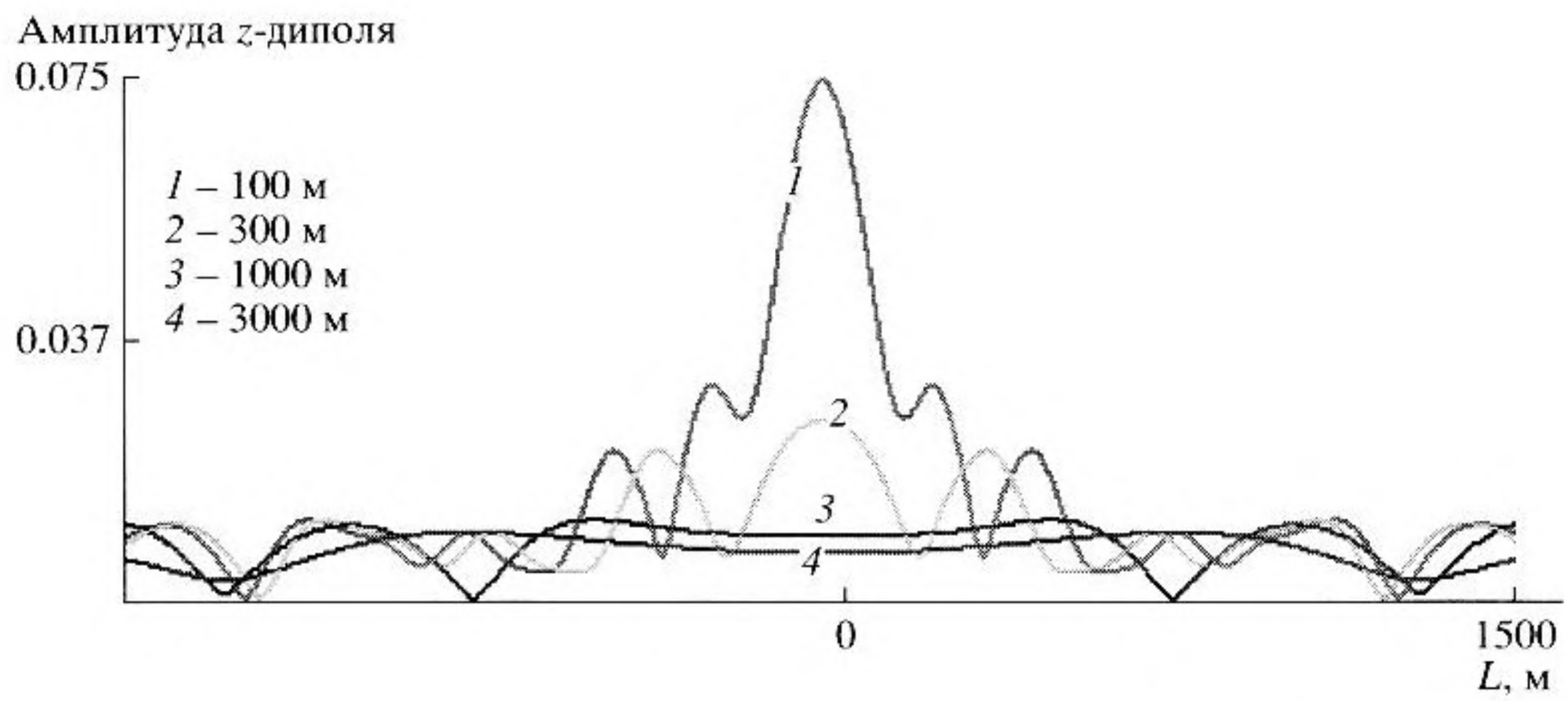


**Рис. 4.** Зависимость амплитуды поля $z$-диполя от расстояния и аспекта наблюдения.

время как фазовые поля различаются в основном только в зонах интерференционных минимумов. В зонах максимумов градиенты фазы различных мультиполей практически совпадают.

При движении источника мимо точки приема на малых траверзных расстояниях помимо влияния интерференции, обусловленной взаимодействием различных мод или лучей, проявляется характеристика направленности источников. В результате зоны максимумов и минимумов смещаются. При расстояниях, превышающих длину волны более чем в 10–20 раз, для монополя и горизонтальных компонент диполей и квадруполей интерференционная структура становится подобной. Интенсивность в среднем убывает с увеличением расстояния по близким законам.

Интерференционная структура амплитуды давления от вертикальных компонент диполей и квадруполей отличается от структуры поля монополя и горизонтальных компонент. В среднем интенсивность вертикальных компонент убывает с увеличением расстояния существенно быстрее. Указанные различия законов спада объясняются тем, что вертикальные компоненты мультиполя возбуждают в волноводе преимущественно моды высоких номеров, которые затухают с увеличением расстояния быстрее, чем моды первых номеров. Различие интерференционных структур определяется различием горизонтальных компонент волновых чисел мод различных номеров, возбуждаемых горизонтальными и вертикальными компонентами мультиполя.

Из полученных результатов моделирования следует, что в ближней зоне для решения обратной задачи и оценки параметров эквивалентного источника, заменяющего реальный объемный источник, необходимо учитывать как горизонтальные, так и вертикальные компоненты мультиполей. С увеличением расстояния влияние вертикальных компонент уменьшается, и для приближенного описания поля можно использовать

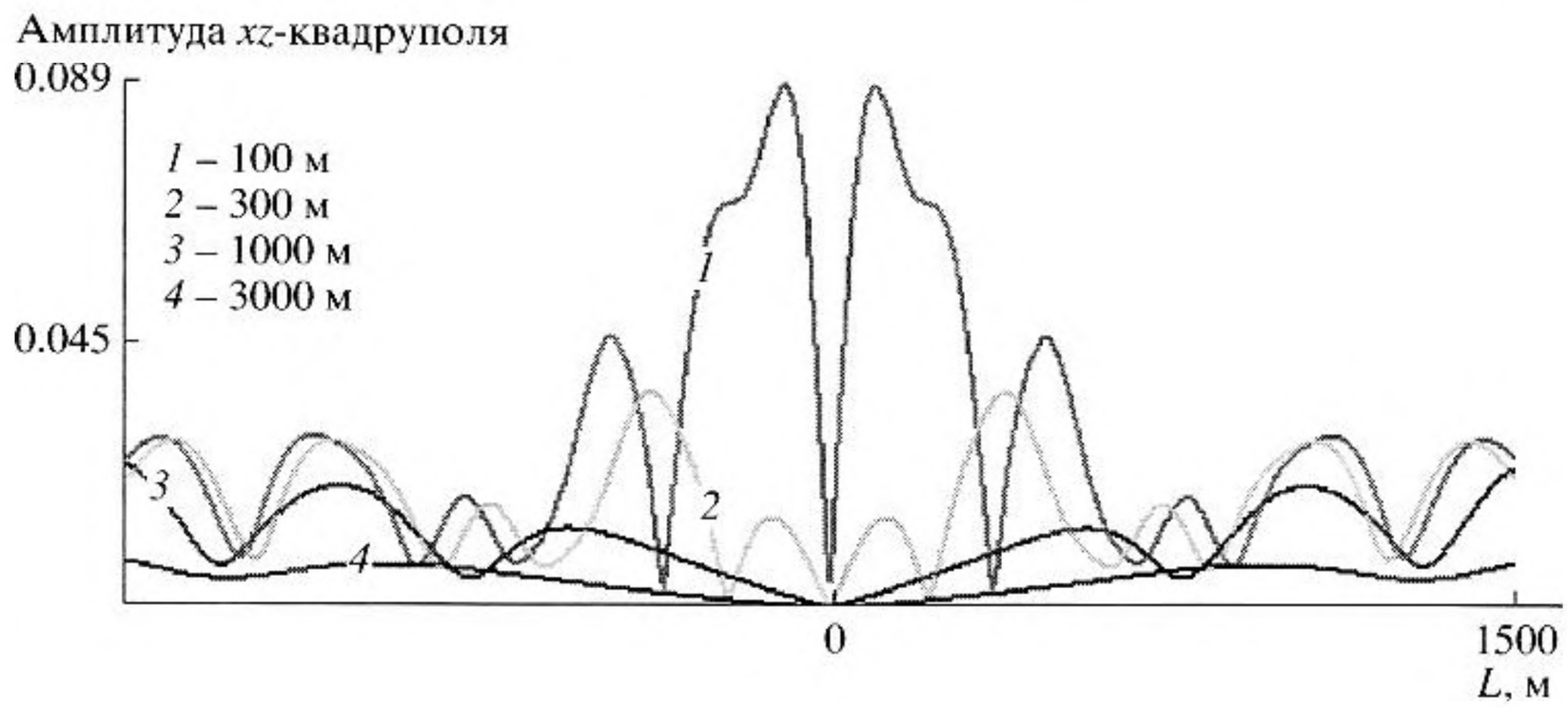


**Рис. 5.** Зависимость амплитуды поля $xz$-квадруполя от расстояния и аспекта наблюдения.

упрощенную модель источника, в которой вертикальные компоненты не учитываются.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Бреховских Л.М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 343 с.
2. *Лысанов Ю.П.* Поле точечного дипольного источника над плоской границей раздела двух сред // Акуст. журн. 1964. Т. 10. № 4. С. 481–483.
3. *Генералов А.В.* Акустическое излучение мультипольного источника N-го порядка вблизи тонкой бесконечной пластины // Акуст. журн. 1991. Т. 37. № 1. С. 50–57.
4. *Иванов И.Д.* К вопросу об интегральном представлении поля точечного излучателя в слоисто-неоднородной среде // Акуст. журн. 1966. Т. 12. № 4. С. 443–448.
5. *Haug Anton, Graves Ronald D., Uberal H.* Normal-mode theory of underwater sound propagation from directional multipole source // J. Acoust. Soc. Amer. 1974. V. 56. № 2. P. 387–391.
6. *Быковцев Г.И., Кузнецов Г.Н., Степанов А.Н.* Акустическое поле направленного источника в океанических волноводах // ДАН СССР. 1985. Т. 280. № 1. С. 57–59.
7. *Степанов А.Н.* Поле направленного гидроакустического излучателя в волноводе Пекериса // Акуст. журн. 1999. Т. 45. № 2. С. 265–268.
8. *Степанов А.Н.* Модовое представление поля направленного излучателя в волноводе // Акуст. журн. 1996. Т. 42. № 2. С. 291–292.
9. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 736 с.


# The Field of an Equivalent Multipole Composite Radiator in a Waveguide


**G. N. Kuznetsov and A. N. Stepanov**

*Prokhorov Institute of General Physics, Russian Academy of Sciences, Pyataya Magistral'naya ul. 11, Moscow, 123007 Russia*

*e-mail: KuznetsovGN@ncvi.ru, skbmortex@mail.ru*



**Abstract**—The possibility of replacing a spatially extended volume low-frequency sound source, which forms a three-dimensional directional field in the far-field zone, by an equivalent multipole source is considered. Developing the ideas of L.M. Brekhovskikh, who obtained the solution for a monopole, exact and simplified models of the source field are constructed in the form of superpositions of multipoles of various orders. The models are considered in the integral, mode, and ray approximations in application to the unbounded space and homogeneous and plane-layered waveguides. The results of computations are presented, and the conclusion is made that the contribution of vertical dipole and quadrupole components to the interference structure of the field amplitude in a waveguide decreases with an increase in the distance from the source. The phase structure is found to be stable regardless of the type of the complex multipole source.