АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2007, том 53, № 4, с. 490–499

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК 534.23:537.874.6

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ДИФРАКЦИИ ВОЛН МЕТОДОМ ПРОДОЛЖЕННЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

© 2007 г. А. Г. Кюркчан, Н. И. Смирнова

Московский технический университет связи и информатики

111024 Москва, Авиамоторная ул. 8а

E-mail: kyurkchan@yandex.ru

Поступила в редакцию 25.05.06 г.

Обсуждается численное решение трехмерных задач дифракции волн методом продолженных граничных условий (МПГУ), который успешно применялся к двумерным задачам. Основная идея метода состоит в том, что граничное условие ставится на некотором достаточно малом расстоянии от поверхности носителей вторичных источников. Это позволяет свести граничную задачу к решению интегрального уравнения Фредгольма I-го либо II-го рода с гладким ядром. Приведены результаты исследований, показывающие, как наиболее рационально применять МПГУ в зависимости от конкретных потребностей в точности и быстроте получения решения. Рассмотрены многочисленные примеры, иллюстрирующие высокую эффективность предлагаемого подхода.

PACS: 43.20.+g, 42.25.Fx

ВВЕДЕНИЕ

При решении задач дифракции и рассеяния волн удобно использовать аппарат интегральных уравнений, позволяющий компактно формулировать краевые задачи при самых общих предположениях о характере границы и виде краевых условий. Однако при численном решении интегральных уравнений теории дифракции неизбежно возникают как минимум две проблемы: наличие особенностей в ядрах уравнений и наличие особенностей у решений таких уравнений.

Существует множество методик избавления от этих проблем. Для решения первой проблемы в стандартном методе интегральных уравнений (СМИУ), в котором краевая задача сводится к интегральному уравнению Фредгольма с сингулярным ядром, требуется выделять особенность в ядре и (для получения наиболее точных результатов) выполнять ее аналитическое (асимптотическое) интегрирование [1].

В предлагаемом методе продолженных граничных условий (МПГУ) [2, 3] проблема наличия особенности в ядре решается значительно проще, здесь точное граничное условие заменяется приближенным, а именно: носитель вспомогательного тока (или дискретных источников [3]) остается на поверхности рассеивателя, а граничное условие ставится на некотором достаточно малом расстоянии от нее. Таким образом, задача всегда решается в приближенной постановке.

Следует отметить, что для решения второй проблемы в случае рассеивателя с неаналитической границей в большинстве методик (в частности, в СМИУ и также в распространенном методе дискретных источников (МДИ) [4]) предлагается выполнить аналитическую аппроксимацию или, по крайней мере, – закругление изломов границы [5]. Т.е. задача также решается в приближенной постановке. Таким образом, в этом смысле МПГУ не уступает упомянутым методам.

МПГУ универсален и прост в применении, кроме того, он позволяет сводить краевую задачу не только к интегральному уравнению Фредгольма I рода, но и к уравнению Фредгольма II рода с гладким ядром (что, в частности, снимает все вопросы, связанные с корректностью задачи при обосновании метода).

В настоящей работе предложен алгоритм применения МПГУ к акустическим трехмерным краевым задачам с граничной поверхностью, имеющей симметрию вращения. Рассмотрены основные аспекты его реализации, показывающие, как наиболее эффективно применить алгоритм к данному типу задач.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим МПГУ на примере решения внешней краевой задачи для уравнения Гельмгольца, т.е. задачи дифракции на компактном рассеивателе, занимающем область пространства $\overline{D}$. В математической постановке такая задача сводится к нахождению в области $D_e = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$ решения U^1 уравнения Гельмгольца

$$\Delta U^1 + k^2 U^1 = 0, \qquad (1)$$

$k \in C$, $k \neq 0$, удовлетворяющего на границе S области D некоторому краевому условию, например, вида

$$\left(\alpha U + \beta \frac{\partial U}{\partial n}\right)\Bigg|_S = 0, \qquad (2)$$

где α, β = const, $U = U^0 + U^1$ – полное, U^0 – падающее (первичное) волновые поля, а также условию на бесконечности. Таким образом, в области D_e искомая функция $U^1(\mathbf{r})$ является вещественно аналитической [6] и в силу этого она приближенно удовлетворяет условию (2) и в некоторой окрестности границы S, лежащей в D_e. Если граница такова, что возможно аналитическое продолжение функции $U^1(\mathbf{r})$ в область $\overline{D}$ [7], то упомянутая окрестность лежит по обе стороны границы S.

Вместо строгой постановки (1), (2) краевой задачи можно решать задачу с граничным условием:

$$\left(\alpha U + \beta \frac{\partial U}{\partial n}\right)\Bigg|_{S_\delta} = 0, \qquad (3)$$

в котором S_δ – поверхность, проведенная в области D_e на некотором достаточно малом расстоянии δ от поверхности S.

Итак, пусть для определенности граница S – кусочно-гладкая. Пусть также сначала речь идет о решении внешней краевой задачи Дирихле для области вне $\overline{D}$ (т.е. в (2) $\alpha = 1$, $\beta = 0$). В качестве S_δ выберем кусочно-гладкую поверхность, содержащую S и удаленную от нее на некоторое достаточно малое расстояние δ. Тогда решение задачи (1), (3) может быть сведено к следующему интегральному уравнению Фредгольма I рода с гладким ядром:

$$\int_S \mu(\mathbf{r}_S) K(\mathbf{r}_{S_\delta}; \mathbf{r}_S) ds = \psi(\mathbf{r}_{S_\delta}) \qquad (4)$$

относительно неизвестной функции $\mu(\mathbf{r}_S)$ – плотности тока. Ядром уравнения (4) является фундаментальное решение уравнения (1).

Применительно к уравнению (4) имеет место следующая теорема существования [2, 7]:

Пусть простая замкнутая поверхность S такова, что k не является собственным значением внутренней однородной задачи Дирихле для области внутри S. Тогда уравнение (4) *разрешимо в том и только в том случае, если S охватывает все особенности решения $U^1_\delta(\mathbf{r})$ краевой задачи* (1), (3).

При выполнении условий теоремы уравнение (4) имеет единственное решение.

Как уже отмечалось, краевая задача (1), (3) может быть сведена также к интегральному уравнению Фредгольма II рода с гладким ядром. Таким образом, замена точного краевого условия приближенным приводит к корректно поставленной задаче. Возможность перехода к продолженным граничным условиям следует из вещественной аналитичности решения уравнения Гельмгольца, кроме того, об этом свидетельствует полученная оценка погрешности, допускаемой при таком переходе. Довольно просто определить эту погрешность можно для таких граничных поверхностей, для которых приближенно поставленная краевая задача (1), (3) может быть решена точно (см. ниже).

В заключение этого раздела целесообразно сделать следующее замечание. В названии нашего метода ключевым является слово "продолженные" ("continued"). В то же время хорошо известен метод Уотермена (см., например, [8]), часто называемый в литературе методом нуль-поля или методом продвинутых граничных условий (the extended boundary conditions method). В силу смысловой близости слов "продолженный" и "продвинутый" иногда возникает путаница. Однако между этими методами существует принципиальное отличие. В методе Уотермена поверхность, на которой ставится граничное условие, размещается внутри рассеивателя, причем по возможности как можно дальше от его границы, с целью уменьшения области, на которой выполняется краевое условие, что, в свою очередь, ведет к уменьшению размера соответствующей алгебраической системы. Однако при практической реализации метода возникают также проблемы, связанные с необходимостью учитывать наличие особенностей у аналитического продолжения дифракционного поля внутрь рассеивателя [7, 9]. В МПГУ же граничное условие отодвигается от поверхности, для того чтобы избавиться от особенности в ядре интегрального уравнения. При этом величина δ смещения должна быть достаточно малой, т.к. погрешность решения пропорциональна δ. И, наконец, если в методе Уотермена граничное условие ставится внутри рассеивателя, то в МПГУ его можно, вообще говоря, отодвигать как во внешнюю область, так и (в случае аналитичности границы) вовнутрь. Метод Уотермена имеет существенный недостаток: он не применим, например, к краевым задачам с условиями сопряжения на границе, а также к задачам дифракции на тонких экранах. МПГУ же универсален, его можно применять к любым задачам дифракции, в том числе, к задачам дифракции на тонких экранах. Кроме того, поскольку в рамках МПГУ, как уже отмечалось, краевая задача может быть сведена к интегральному уравнению Фредгольма II рода, то это обстоятельство, во-первых, снимает все возражения, связанные с корректностью метода (см., впрочем, по этому поводу работу [10]), а во-вторых, позволяет, например, сразу находить иско-

мую функцию – распределение тока. Платой за подобную универсальность МПГУ, как уже отмечалось, является приближенность метода.

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ

Приведем алгоритм решения методом продолженных граничных условий внешней акустической трехмерной краевой задачи с граничной поверхностью, имеющей симметрию вращения. Для простоты рассмотрим его на примере задачи с краевым условием I рода: $U|_S = 0$.

1. Сначала в соответствии с МПГУ необходимо выполнить замену точного граничного условия приближенным:

$$U|_{S_\delta} = 0. \tag{5}$$

2. Затем задача (1), (5) сводится к интегральному уравнению Фредгольма I или II рода. Выбор уравнения диктуется соображениями удобства, в зависимости от того, какое уравнение имеет более простой вид для данного краевого условия. Для рассматриваемой задачи уравнение Фредгольма I рода имеет более простой вид:

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_S \frac{\partial U(\mathbf{r}')}{\partial n'}\bigg|_S \frac{e^{-ikR(\mathbf{r},\mathbf{r}')}}{R(\mathbf{r},\mathbf{r}')}\bigg|_{S_\delta} ds' = -U^0(\mathbf{r})\big|_{S_\delta} \tag{6}$$

(где $\mathbf{r}'$ – радиус-векторы точек поверхности S, $\mathbf{r}$ – радиус-векторы точек поверхности S_δ, $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$), по сравнению с уравнением Фредгольма II рода:

$$\frac{\partial U^0(\mathbf{r})}{\partial n}\bigg|_{S_\delta} + \frac{1}{4\pi}\int\limits_S \frac{\partial U(\mathbf{r}')}{\partial n'}\bigg|_S \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-ikR(\mathbf{r},\mathbf{r}')}}{R(\mathbf{r},\mathbf{r}')}\right)\bigg|_{S_\delta} \times \tag{6a}$$
$$\times ds' = \frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial n}\bigg|_{S_\delta},$$

поэтому в дальнейшем в случае задачи Дирихле будем иметь дело с уравнением (6).

Следует отметить, что может создаться ложное впечатление, что уравнение (6а) не является интегральным уравнением Фредгольма II рода, поскольку S и S_δ – различные. Однако это не так. В самом деле, пусть, например, в сферической системе координат поверхности S и S_δ заданы соответственно уравнениями $r'|_S = r(\theta')$, $r|_{S_\delta} = \rho(\theta)$, $\theta', \theta \in [0, \pi]$. Тогда, полагая, что при $\theta' = \theta$ и $\frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial n}\Big|_{S_\delta} \cong \frac{\partial U(\mathbf{r}')}{\partial n'}\Big|_S = I(\theta)$, для функции $I(\theta)$ будем иметь интегральное уравнение Фредгольма II рода.

3. Перейдем к сферической системе координат:

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\partial U}{\partial n'}\bigg|_S ds' = I(\theta', \varphi')d\theta' d\varphi',$$

$$R = \sqrt{r^2(\theta') + \rho^2(\theta) - 2r(\theta')\rho(\theta)\cos\gamma},$$

$$\cos\gamma = \sin\theta\sin\theta'\cos t + \cos\theta\cos\theta', \quad t = \varphi - \varphi'$$

(где $r' = r(\theta')$, $r = \rho(\theta)$ – уравнения поверхностей S и S_δ соответственно).

Используя симметрию вращения, разложим неизвестную функцию и ядро уравнения в ряды Фурье по φ и по t соответственно:

$$I(\theta', \varphi') = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(\theta')e^{in\varphi'},$$
$$G_0(\theta, \theta', t) = \frac{e^{-ikR(\theta,\theta',t)}}{R(\theta,\theta',t)} = \sum_{s=-\infty}^{\infty} G_s(\theta, \theta')e^{ist}. \tag{7}$$

Коэффициенты Фурье-разложения ядра уравнения (6) имеют вид:

$$G_s(\theta, \theta') = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{e^{-ikR(\theta,\theta',t)}}{R(\theta,\theta',t)}e^{-ist}dt. \tag{8}$$

Непосредственное вычисление интегралов (8), известных в литературе под названием S-функций Васильева [5], представляет собой достаточно непростую задачу. Однако на практике оказалось достаточно эффективным выполнить кусочно-постоянную аппроксимацию функции $G_0(\theta, \theta', t)$ и вычислить получившиеся интегралы. В результате будем иметь:

$$G_s(\theta, \theta') \cong \frac{1}{N_1}\sum_{\nu=1}^{N_1} G_0(\theta, \theta', t_\nu)\delta_{s0} +$$
$$+ \frac{1}{\pi s}\sin\left(\frac{s\pi}{N_1}\right)\sum_{\nu=1}^{N_1} G_0(\theta, \theta', t_\nu)e^{-ist_\nu}(1 - \delta_{s0}),$$
$$t_\nu = \frac{(\nu - 0.5)2\pi}{N_1}.$$

Не менее эффективной в тех случаях, когда достаточно небольшого количества гармоник Фурье, оказалась еще более простая замена интегралов (8) суммами по формуле прямоугольников:

$$G_s(\theta, \theta') \cong \frac{1}{N_1}\sum_{\nu=1}^{N_1} \frac{\exp(-ikR(\theta, \theta', t_\nu) + ist_\nu)}{R(\theta, \theta', t_\nu)}.$$

4. Теперь, спроецировав обе части уравнения (6) на базис Фурье и ограничив диапазон измене-

ния s некоторым числом Q, получим $2Q + 1$ независимых уравнений:

$$\int_0^{\pi} I_s(\theta')G_s(\theta, \theta')d\theta' = -\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi} U^0(\rho(\theta), \varphi)e^{-is\varphi}d\varphi = \tag{9}$$
$$= -U_s^0(\theta), \quad s = 0, \pm 1, \ldots, \pm Q.$$

5. Выполним кусочно-постоянную аппроксимацию неизвестной функции $I_s(\theta')$:

$$I_s(\theta') = \sum_{n=1}^{N} I_{n,s}\phi_n(\theta'),$$

где $\phi_n(\theta') = \begin{cases} 1, & \theta' \in [(n-1)\pi/N, n\pi/N), \\ 0, & \theta' \notin [(n-1)\pi/N, n\pi/N). \end{cases}$

6. Далее применим метод коллокации. Разобьем отрезок изменения θ $[0, \pi]$ на $N = N_1$ (N можно выбрать и $\geq N_1$) равных частей и, записав уравнения (9) в точках коллокации $\theta = \theta_m = \frac{\pi}{N}(m - 0.5)$, $m = \overline{1, N}$, совмещенных с серединами интервалов разбиения, получим $2Q + 1$ систем из N линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{n=1}^{N} I_{n,s} \int_{(n-1)\pi/N}^{n\pi/N} G_s(\theta_m, \theta')d\theta' = -U_s^0(\theta_m). \tag{10}$$

Предложенный алгоритм можно обобщить на случай граничного условия третьего рода:

$$U|_{S_\delta} = \frac{W}{k}\frac{\partial U}{\partial n}\bigg|_{S_\delta}, \tag{11}$$

где W – величина, пропорциональная локальному акустическому поверхностному импедансу.

В этом случае наиболее простой вид имеет интегральное уравнение Фредгольма II рода:

$$-U(\mathbf{r})|_{S_\delta} + \frac{1}{4\pi}\int_S U(\mathbf{r}')|_S \left\{\frac{\partial G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} - \frac{k}{W}G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\right\}\bigg|_{S_\delta} \times \tag{12}$$
$$\times ds' = -U^0(\mathbf{r})|_{S_\delta}.$$

Выполнив п. 3–6 алгоритма, получим систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$\sum_{n=1}^{N} U_{n,S}\left(-\frac{1}{2} + 2\pi \int_{(n-1)\pi/N}^{n\pi/N} K_s(\theta_m, \theta')\kappa(\theta')r(\theta')\sin(\theta')|_{S_\delta}d\theta'\right) = -U_s^0(\theta_m),$$
$$K_s(\theta, \theta') = -\frac{G_s(\theta, \theta')}{4\pi}\left\{\frac{k}{W} + \frac{1}{R(\theta, \theta', t_\nu)}\left(ik + \frac{1}{R}\right)\frac{1}{\kappa(\theta')}\left(r^2 - r\rho\cos\gamma(\theta, \theta', t_\nu) + r'\rho\frac{\partial\cos\gamma(\theta, \theta', t_\nu)}{\partial\theta'}\right)\right\}. \tag{13}$$

В этой системе в отличие от интегрального уравнения (12) появляется множитель 1/2, обусловленный скачком потенциала двойного слоя. Дело в том, что в результате применения предложенного алгоритма происходит дискретизация значений θ, φ. Так как величина δ в соответствии с МПГУ должна быть достаточно малой, то ее всегда можно считать много меньшей, чем шаг дискретизации как по φ, так и по θ. Таким образом, в дискретном пространстве поверхности S и S_δ можно считать совпадающими. Следовательно, появляется скачок потенциала, приводящий к множителю 1/2 в системах (13).

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ПРИ ПОМОЩИ МПГУ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ

Для некоторых тел приближенно поставленная краевая задача (3) может быть, как уже отмечалось, решена точно. Такое решение представляет интерес для получения оценки погрешности, допускаемой при переходе к продолженным граничным условиям. В качестве примера рассмотрим задачу дифракции плоской волны на вытянутом сфероиде, на поверхности которого выполняется краевое условие Неймана. В этом случае в уравнении (12) следует считать, что $W = \infty$.

Приведем некоторые соотношения, используемые в дальнейшем. Мы будем вести рассмотрение в системе координат вытянутого сфероида. В этих координатах [11]

$$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{k}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\frac{S_{mn}(c, \eta')}{N_{mn}(c)} \times \tag{14}$$
$$\times S_{mn}(c, \eta)R_{|m|n}^{(1)}(c, \xi')R_{|m|n}^{(4)}(c, \xi)e^{im(\varphi - \varphi')},$$

$$U^0 = 2\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}(-i)^n\frac{S_{mn}(c, \eta_0)}{N_{mn}(c)} \times \tag{15}$$
$$\times S_{mn}(c, \eta)R_{|m|n}^{(1)}(c, \xi)e^{im(\varphi - \varphi_0)}.$$

В формулах (14), (15) $S_{mn}(c, \eta)$ – вытянутые угловые сфероидальные функции первого рода порядка m степени n, $R_{mn}^{(1),(4)}(c, \xi)$ – вытянутые радиальные сфероидальные функции первого (чет-

вертого) рода [11], $c = kf$, $2f$ – межфокусное расстояние. Декартовы координаты x, y, z связаны со сфероидальными ξ, η, φ соотношениями:

$$x = f[(\xi^2-1)(1-\eta^2)]^{1/2}\cos\varphi,$$

$$y = f[(\xi^2-1)(1-\eta^2)]^{1/2}\sin\varphi, \quad z = f\xi\eta,$$

$$1 \le \xi < \infty, \quad -1 \le \eta \le 1, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi.$$

Поверхность сфероида задается уравнением $\xi = \xi^0$, при этом

$$ds = f^2[(\xi^{02}-1)(\xi^{02}-\eta^2)]^{1/2}d\eta d\varphi,$$

$$\frac{\partial}{\partial n} = \sqrt{\frac{\xi^{02}-1}{\xi^{02}-\eta^2}}\frac{\partial}{\partial\xi}.$$

Будем искать решение уравнения (12) в виде

$$U^\delta(\mathbf{r}')|_S = \sum_{q=0}^{\infty}\sum_{p=-q}^{q}\alpha_{qp}^\delta S_{qp}(c,\eta')e^{ip\varphi'}. \qquad (16)$$

Подставляя (14)–(16) в (12) и используя свойство ортогональности угловых сфероидальных функций

$$\int_{-1}^{1} S_{mn}(c,z)S_{mq}(c,z)dz = N_{mn}(c)\delta_{nq},$$

получим

$$\alpha_{nm}^\delta = \frac{2(-i)^n\dfrac{S_{mn}(c,\eta_0)}{N_{mn}(c)}R_{|m|n}^{(1)}(c,\xi_1^0)e^{-im\varphi_0}}{1+ic(\xi^{02}-1)R_{|m|n}^{(1)'}(c,\xi^0)R_{|m|n}^{(4)}(c,\xi_1^0)},$$

где $\xi = \xi_1^0$ – уравнение поверхности S_δ.

Решая эту же задачу методом разделения переменных, будем иметь

$$\alpha_{nm} = \frac{2(-i)^n}{N_{mn}(c)}\frac{S_{mn}(c,\eta_0)e^{-im\varphi_0}}{ic(\xi^{02}-1)R_{|m|n}^{(4)'}(c,\xi^0)}.$$

Нетрудно установить, используя следующее соотношение для Вронскиана

$$R_{mn}^{(1)}(c,\xi)R_{mn}^{(4)'}(c,\xi) - R_{mn}^{(1)'}(c,\xi)R_{mn}^{(4)}(c,\xi) = \frac{1}{ic(\xi^2-1)},$$

что имеет место оценка

$$\alpha_{nm} - \alpha_{nm}^\delta \cong \frac{(-i)^n(k\delta)^2}{N_{mn}(c)}\frac{S_{mn}(c,\eta_0)e^{-im\varphi_0}}{R_{|m|n}^{(4)'}(c,\xi^0)}\times$$

$$\times\frac{R_{|m|n}^{(1)'}(c,\xi^0)R_{|m|n}^{(4)''}(c,\xi^0) - R_{|m|n}^{(1)''}(c,\xi^0)R_{|m|n}^{(4)'}(c,\xi^0)}{1+ic(\xi^{02}-1)R_{|m|n}^{(1)'}(c,\xi^0)R_{|m|n}^{(4)}(c,\xi_1^0)}.$$

Таким образом, окончательно имеем

$$\left|U(\mathbf{r}')|_S - U^\delta(\mathbf{r}')|_S\right| \le \mathrm{const}\frac{(k\delta)^2}{c(\xi^{02}-1)}.$$

Мы видим, что модуль разности значений волнового поля на поверхности сфероида, найденных методом разделения переменных и при помощи интегрального уравнения МПГУ (12), пропорционален квадрату "расстояния" между поверхностью сфероида и S_δ.

ЧИСЛЕННЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Некоторые шаги предложенного алгоритма допускают различные способы реализации. Приведем результаты численных исследований, показывающих, как наиболее эффективно применять алгоритм. Исследования выполнены на примере решения задачи Дирихле для сфероида с полуосями $ka = 2$, $kc = 4$ (большая полуось – вдоль оси z). В качестве первичного поля рассматривалась плоская волна, падающая под углами $\theta_0 = \pi/2$, $\varphi_0 = 0$.

Первый пункт алгоритма содержит в себе 2 вопроса: каким образом выбирать поверхность S_δ, и какой должна быть величина δ. В качестве S_δ можно выбрать, например, поверхность, полученную путем аналитической деформации S [12], эквидистантную S или поверхность, получаемую из S путем увеличения на δ радиус-вектора. Установлено, что при достаточно малых значениях $k\delta$ результаты отличаются незначительно (на величину порядка $0.1k\delta$). Поэтому во всех последующих расчетах поверхность S_δ выбиралась последним (наиболее простым) способом.

На рис. 1а приведены невязки краевого условия, полученные при $Q = 5$, $N = 32$ для различных значений $k\delta$. Здесь и далее все невязки построены в плоскости, в которой их величина максимальна. Видно, что при уменьшении $k\delta$ невязки ухудшаются, но при $k\delta \le 0.01$ невязки отличаются очень мало. Таким образом, приближенное граничное условие наилучшим образом выполняется при больших $k\delta$. Рис. 1б, на котором приведены невязки приближенного и точного граничного условия при $k\delta = 0.1$, показывает, что несмотря на это не следует выбирать $k\delta$ слишком большим (≥ 0.1), т.к. при этом граничное условие на поверхности S рассеивателя выполняется значительно хуже. Рис. 1в, на котором приведены невязки приближенного и точного граничного условия при $k\delta = 10^{-4}$, показывает, что в этом случае точное граничное условие выполняется так же хорошо, как и приближенное.

При реализации второго пункта алгоритма задача сводилась к интегральному уравнению Фредгольма как I, так и II рода. Решение обоих уравнений привело к достаточно близким результатам, но при использовании уравнения II рода приемлемая точность достигается медленнее.

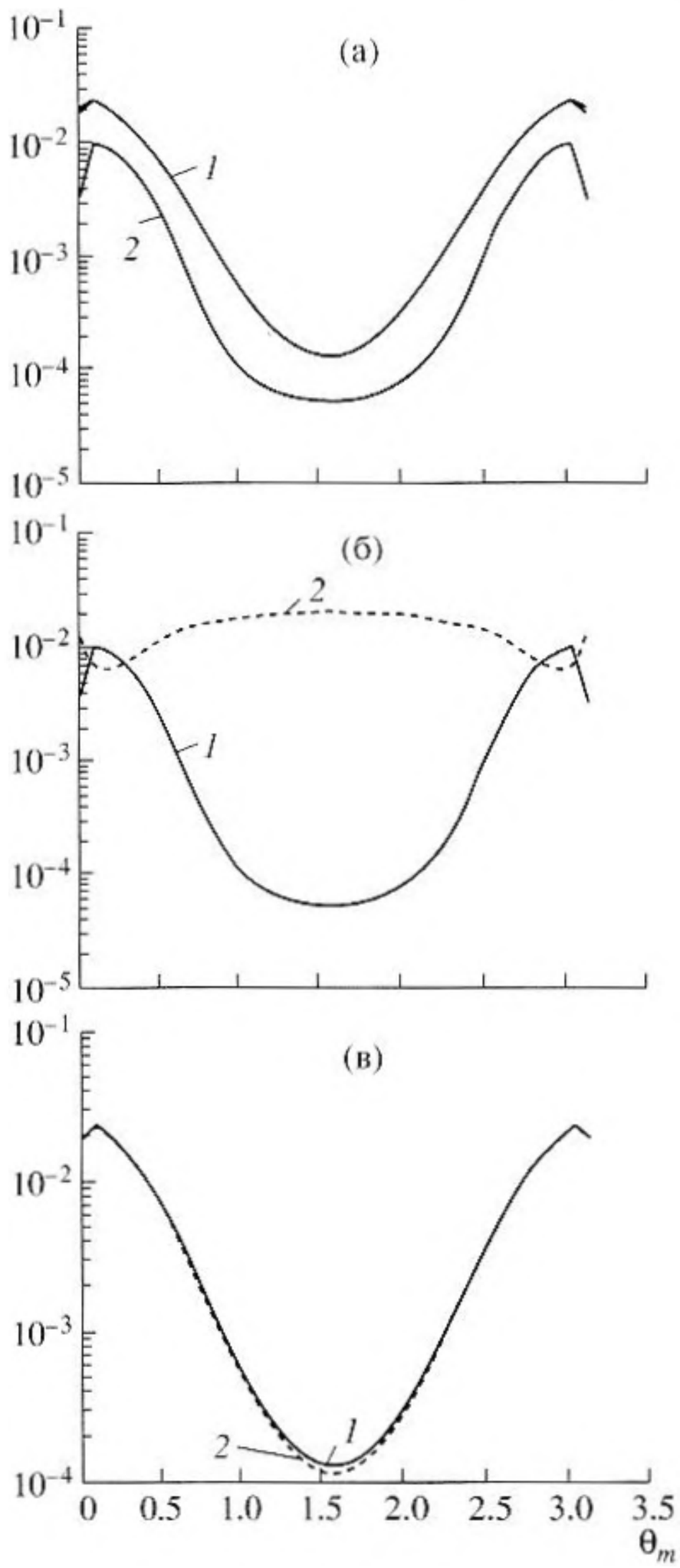

Рис. 1. Невязка краевого условия: а) *1* – $k\delta \le 0.01$, *2* – $k\delta = 0.1$; б) $k\delta = 0.1$; *1* – на S_δ, *2* – на S; в) $k\delta = 10^{-4}$: *1* – на S_δ, *2* – на S.

При вычислении коэффициентов СЛАУ (п. 6 алгоритма) можно поступить как в МДИ, т.е. заменить интегралы в системах (10) соответствующими суммами Римана, что эквивалентно переходу от непрерывного распределения тока к линейной комбинации дискретных источников. В этом случае системы (10) будут иметь вид:

$$\frac{\pi}{N}\sum_{n=1}^{N} I_s(\theta_n)G_s(\theta_n, \theta_m) = -U_s^0(\theta_m), \qquad (10a)$$

где $\theta_n = \frac{\pi}{N}(n - 0.5)$.

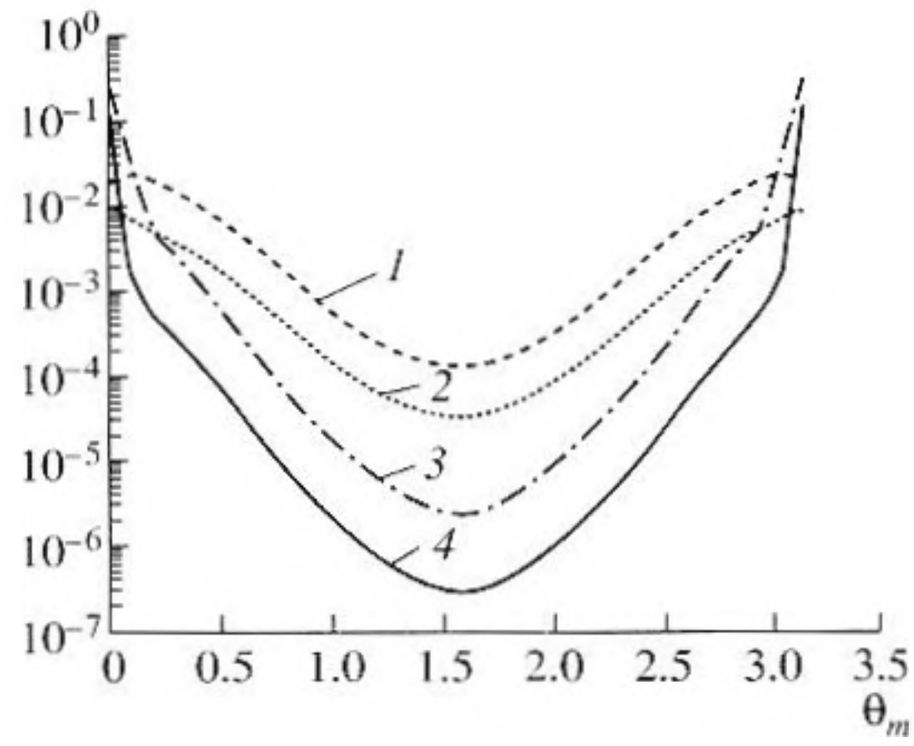

Рис. 2. Невязка краевого условия при различных способах вычисления матричных элементов: *1* – МДИ, $N = 32$, *2* – МДИ, $N = 128$, *3* – МТ, $N = 16$, *4* – МТ, $N = 32$.

С другой стороны, можно не заменять интегралы суммами, а найти их значения другими известными численными методами (как в СМИУ). Будем называть этот способ методом токов (МТ).

На рис. 2 приведены невязки решения при вычислении коэффициентов СЛАУ двумя описанными способами, полученные при $k\delta = 10^{-5}$, $Q = 5$, $N = 32$, $N = 128$ (первым способом) и $N = 16$, $N = 32$ (вторым способом). Видно, что результаты, полученные методом токов, значительно точнее, поэтому его использование позволяет существенно уменьшить размер СЛАУ, например, при $N = 16$ метод токов позволяет получить большую точность, чем МДИ при $N = 128$, время выполнения алгоритма при этом одинаковое. Однако, если достаточно точности расчетов при $N = 32$ в случае МДИ (например, при малых размерах рассеивателя), то его использование оказывается более выгодным, т.к. программа, реализующая МТ при $N = 16$, работает в 10 раз дольше, чем программа, реализующая МДИ при $N = 32$. Во всех приведенных ниже расчетах использовался МДИ, точность вычислений можно повысить, если вычислять коэффициенты СЛАУ методом токов.

Приведем теперь результаты расчетов, показывающие, насколько точен МПГУ, иллюстрирующие скорость его сходимости и достоверность получаемых результатов. Во всех расчетах, приведенных ниже, коэффициенты СЛАУ вычислялись первым способом.

Моделировались характеристики рассеяния тел следующей геометрии: вытянутого сфероида с полуосями $ka = 2$, $kc = 4$ (большая полуось – вдоль оси z), кругового цилиндра радиусом $ka = 2$ и высотой $kh = 8$ и кругового конуса со сферическим основанием радиусом $ka = 2$, равным радиусу конуса, и высотой $kh = 6$ конической части. При проведении всех расчетов величина $k\delta$ выбиралась равной 10^{-4}. Достоверность получаемых ре-

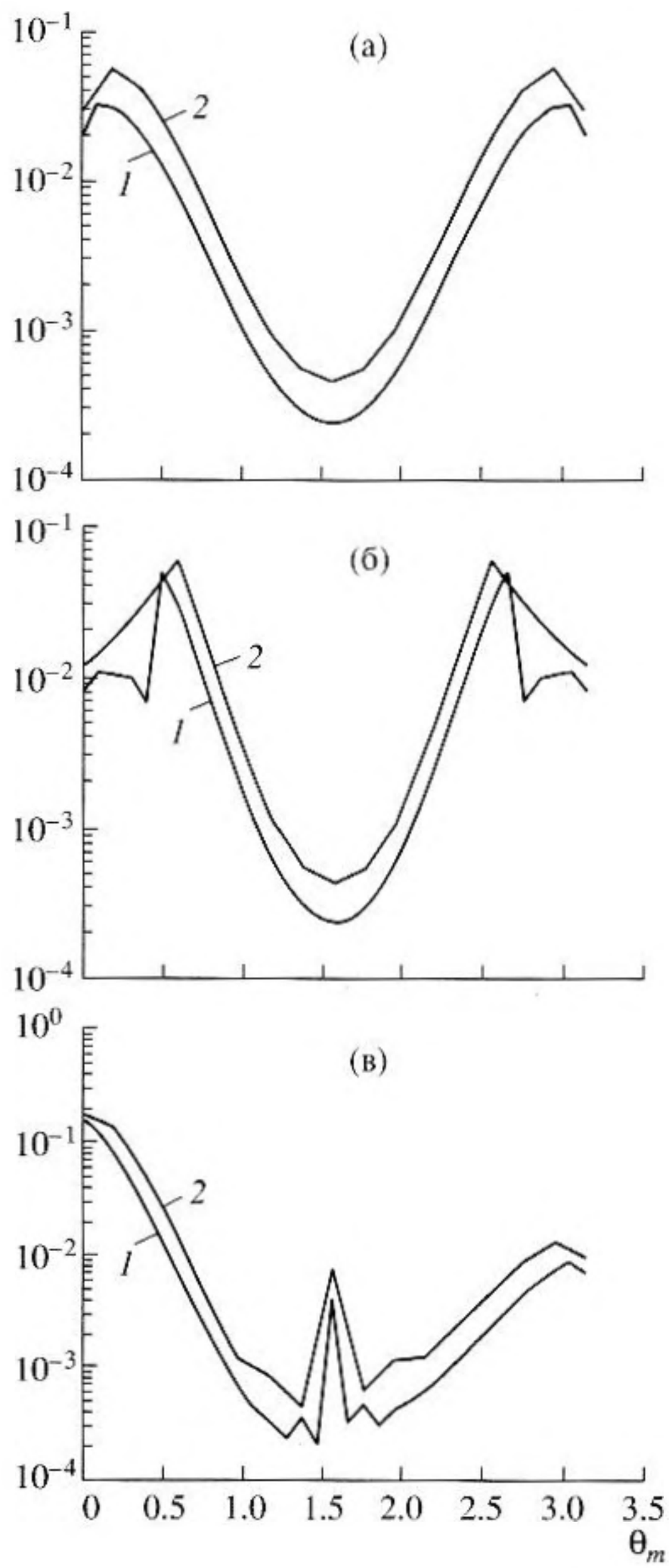

Рис. 3. Невязка краевого условия в задаче дифракции. а) – на сфероиде: *1* – $Q = 5$, $N = 32$, *2* – $Q = 5$, $N = 16$; б) – на цилиндре: *1* – $Q = 5$, $N = 32$, *2* – $Q = 5$, $N = 16$; в) – на конусе: *1* – $Q = 5$, $N = 32$, *2* – $Q = 5$, $N = 16$.

зультатов контролировалась путем подсчета величины невязки краевого условия в точках границы, лежащих посередине между точками коллокации.

Таблица

		Сфероид	Цилиндр	Конус
$\theta_0 = 0$	$k^2\sigma_S/4\pi$	3.850167	5.115117	3.067632
	$-\mathrm{Im}(f(0,0))$	3.850167	5.115125	3.067947
$\theta_0 = \frac{\pi}{2}$	$k^2\sigma_S/4\pi$	5.535137	7.693095	4.075085
	$-\mathrm{Im}(f(\pi/2,0))$	5.535140	7.693091	4.075074

В качестве первичного поля рассматривалось поле плоской волны:

$$U^0(\theta, \varphi) = \exp(-ik\rho(\theta)(\sin\theta\sin\theta_0\cos(\varphi - \varphi_0) + \cos\theta\cos\theta_0)), \tag{17}$$

а также поле точечного источника (для рассматриваемых ниже задач возбуждения тонких экранов), расположенного на оси вращения рассеивателя:

$$U^0(\theta) = \frac{\exp(-ik\sqrt{\rho^2(\theta) + r_0^2 - 2\rho(\theta)r_0\cos(\theta)})}{k\sqrt{\rho^2(\theta) + r_0^2 - 2\rho(\theta)r_0\cos(\theta)}}. \tag{18}$$

Диаграмма рассеяния, т.е. угловая характеристика $f(\theta, \varphi)$ волнового поля в дальней зоне может быть выражена следующим интегралом:

$$f(\theta, \varphi) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} I(\theta', \varphi')\exp\{ik\rho(\theta', \varphi') \times$$
$$\times [\sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi - \varphi') + \cos\theta\cos\theta']\}d\theta' d\varphi'.$$

Подставляя сюда соотношения (7) и снова заменив интегралы по θ суммами Римана, получим следующее представление для функции $f(\theta, \varphi)$:

$$f = \frac{2\pi^2}{N}\sum_{s=-Q}^{Q} i^s\exp(is\varphi)\sum_{n=1}^{N} I_s(\theta_n) \times$$
$$\times \exp(ikr(\theta_n)\cos\theta\cos\theta_n)J_n(kr(\theta_n)\sin\theta\sin\theta_n).$$

Результаты расчетов диаграмм рассеяния для сфероида, цилиндра и конуса совпали с результатами, полученными другими методами [13].

На рис. 3а, 3б, 3в приведены графики величины невязки краевого условия для сфероида, цилиндра и конуса соответственно, облучаемых плоской волной (13) при $\theta_0 = \pi/2$, $\varphi_0 = 0$. На этих рисунках цифрой 1 обозначены зависимости, полученные при $Q = 5$, $N = 32$, цифрой 2 – при $Q = 5$, $N = 16$. Видно, что невязка уменьшается с увеличением размеров системы, что свидетельствует о сходимости метода.

В качестве еще одного критерия достоверности получаемых результатов часто используют точность выполнения оптической теоремы, согласно которой [14]

$$\frac{k^2\sigma_S}{4\pi} \equiv \frac{1}{4\pi}\int_\Omega |f(\theta, \varphi; \theta_0, \varphi_0)|^2 \sin\theta d\theta d\varphi = \tag{19}$$
$$= -\mathrm{Im} f(\theta = \theta_0, \varphi = \varphi_0),$$

где Ω – поверхность единичной сферы. В таблице приведены результаты проверки оптической теоремы при $Q = 4$, $N = 32$. Видно, что оптическая теорема выполняется с высокой точностью.

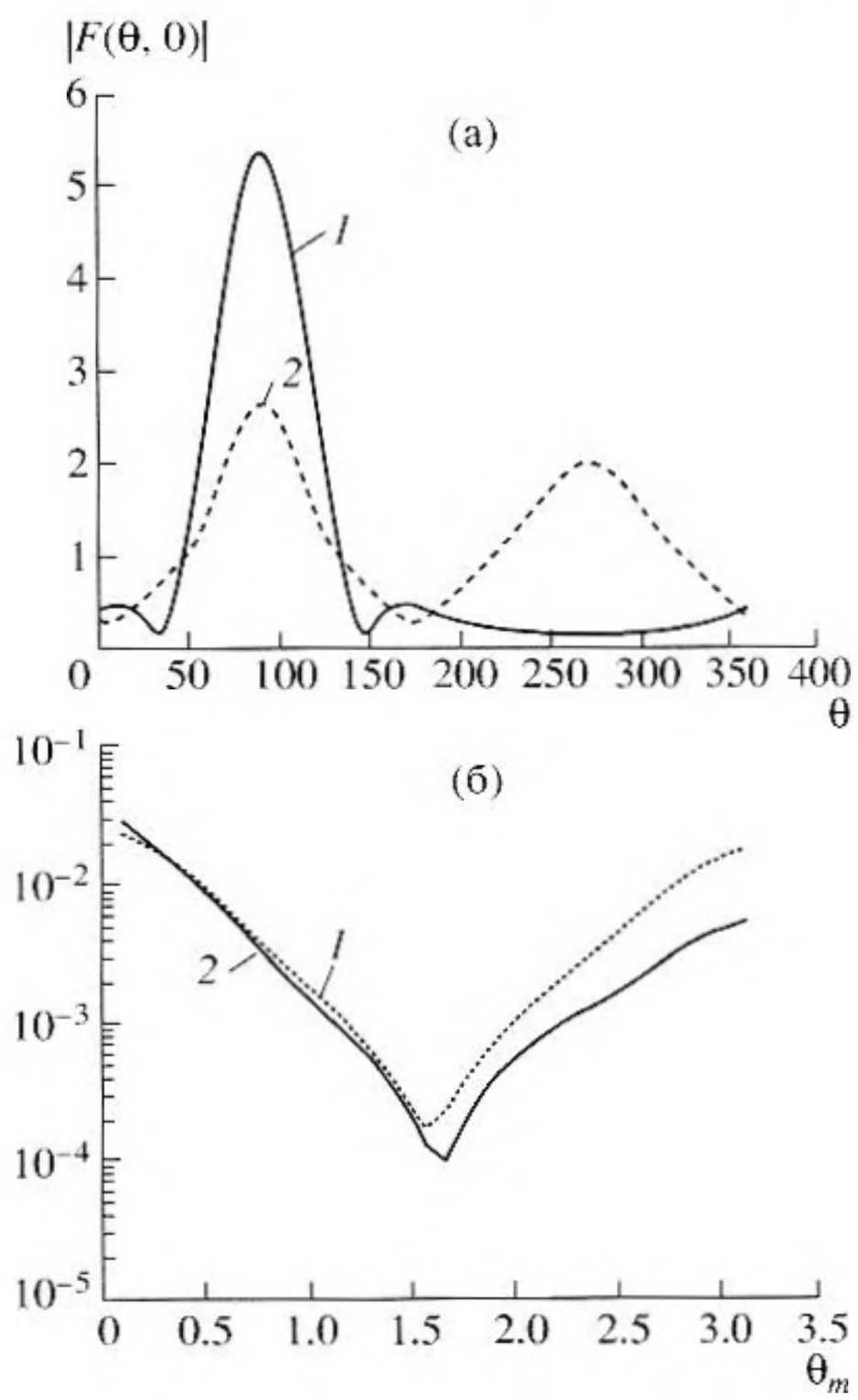

Рис. 4. а) – Диаграмма рассеяния сфероида с размерами $ka = 2$, $kc = 4$ при различных значениях импеданса: *1* – $W = -i$, *2* – $W = 1000$; б) – соответствующая невязка краевого условия.

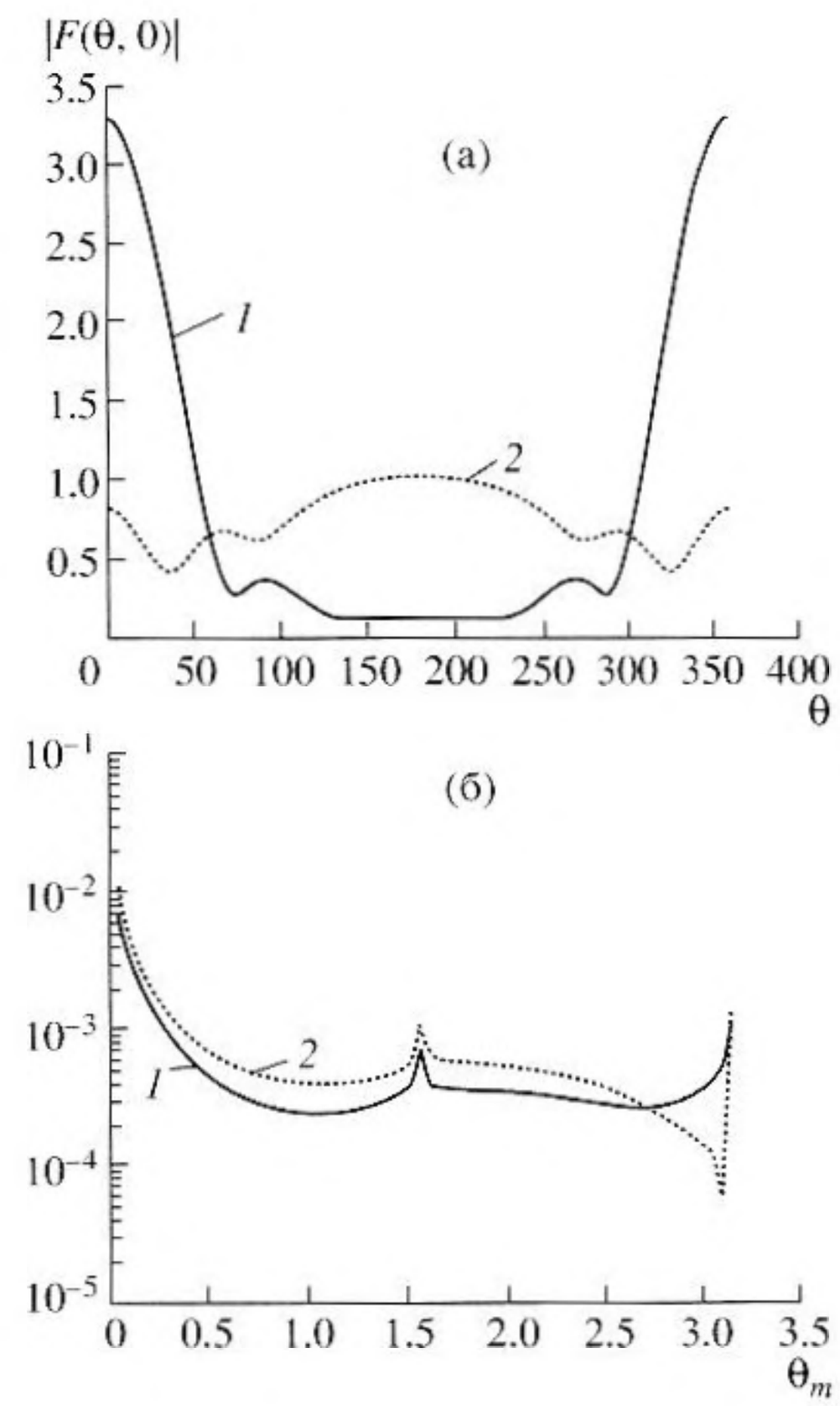

Рис. 5. а) – Диаграмма рассеяния конуса с размерами $ka = 2$, $kh = 6$ при различных значениях импеданса: *1* – $W = -i$, *2* – $W = 1000$; б) – соответствующая невязка краевого условия.

Моделировались также характеристики рассеяния при краевом условии III рода в случае падения плоской волны (17) под углами $\theta_0 = \pi/2$, $\varphi_0 = 0$ для сфероида и $\theta_0 = 0$ для конуса. Здесь краевая задача была сведена к интегральному уравнению Фредгольма II рода.

На рис. 4а и 4б приведены соответственно диаграмма рассеяния в плоскости $\varphi = [0, \pi]$ и невязка решения для сфероида с размерами $ka = 2$, $kc = 4$, полученные при $Q = 5$, $N = 32$, $W = 1000$ и $W = -i$. Случай $W = -i$ соответствует согласованному импедансу, при котором рассеиватель ведет себя как черное тело. На рис. 5а и 5б приведены соответственно диаграмма рассеяния в плоскости $\varphi = [0, \pi]$ и невязка решения для конуса с размерами $ka = 2$, $kh = 6$, полученные при $Q = 0$, $N = 64$, $W = 1000$ и $W = -i$. Из рис. 4а и 5а видно, что при $W = -i$ в направлении на источник уровень отраженного поля достаточно мал, как это и должно быть из физических соображений.

Приведем теперь результаты моделирования характеристик рассеяния антенн в виде тонких экранов. Во всех рассмотренных случаях осью симметрии является ось z.

Рассчитывались диаграммы рассеяния для сферического зеркала радиуса $ka = 120$ (при $0 \le \theta \le \pi/6$) при падении на него плоской волны (17) под углом $\theta_0 = 0$. На рис. 6а и 6б приведены соответственно диаграмма рассеяния в плоскости $\varphi = [0, \pi]$ и невязка решения при $Q = 0$, $N = 256$.

Были выполнены также расчеты диаграмм рассеяния параболического зеркала:

$$\rho(\theta) = \frac{f}{\cos^2(\theta/2)} \tag{20}$$

(где f – фокусное расстояние) при $kf = 60$, $0 \le \theta \le \pi/6$ при падении на него плоской волны (17) под углом $\theta_0 = 0$. Проверка оптической теоремы для этой задачи дала следующие результаты:

$$k^2\sigma_S/4\pi = 4.3685439 \times 10^2,$$

$$-\mathrm{Im} f(\theta = 0, \varphi = 0) = 4.3687216 \times 10^2.$$

Видно, что точность расчетов весьма высока.

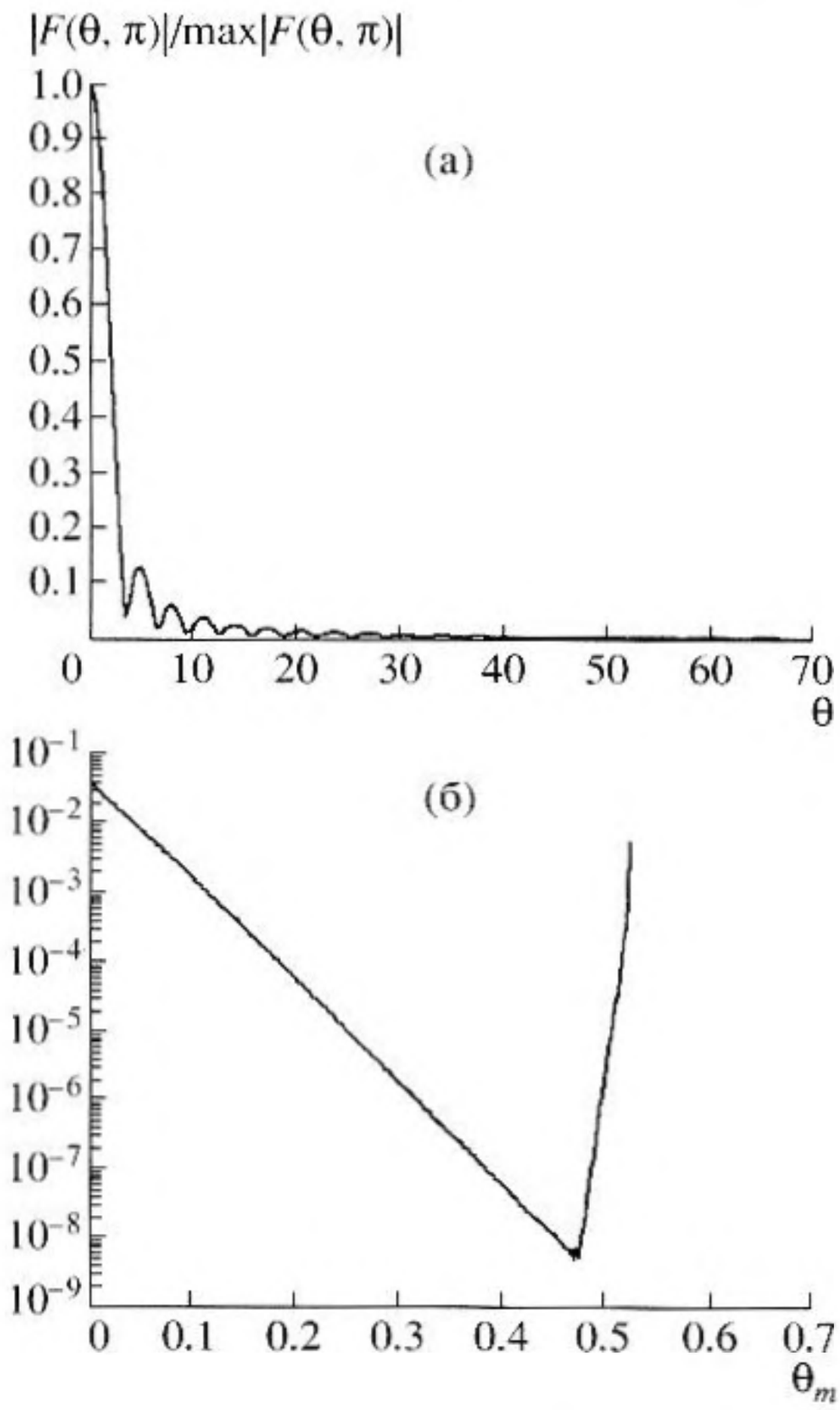

Рис. 6. а) – Диаграмма рассеяния сферического зеркала радиуса $ka = 120$ (при $0 \le \theta \le \pi/6$) при падении на него плоской волны (17) под углом $\theta_0 = 0$; б) – соответствующая невязка краевого условия.

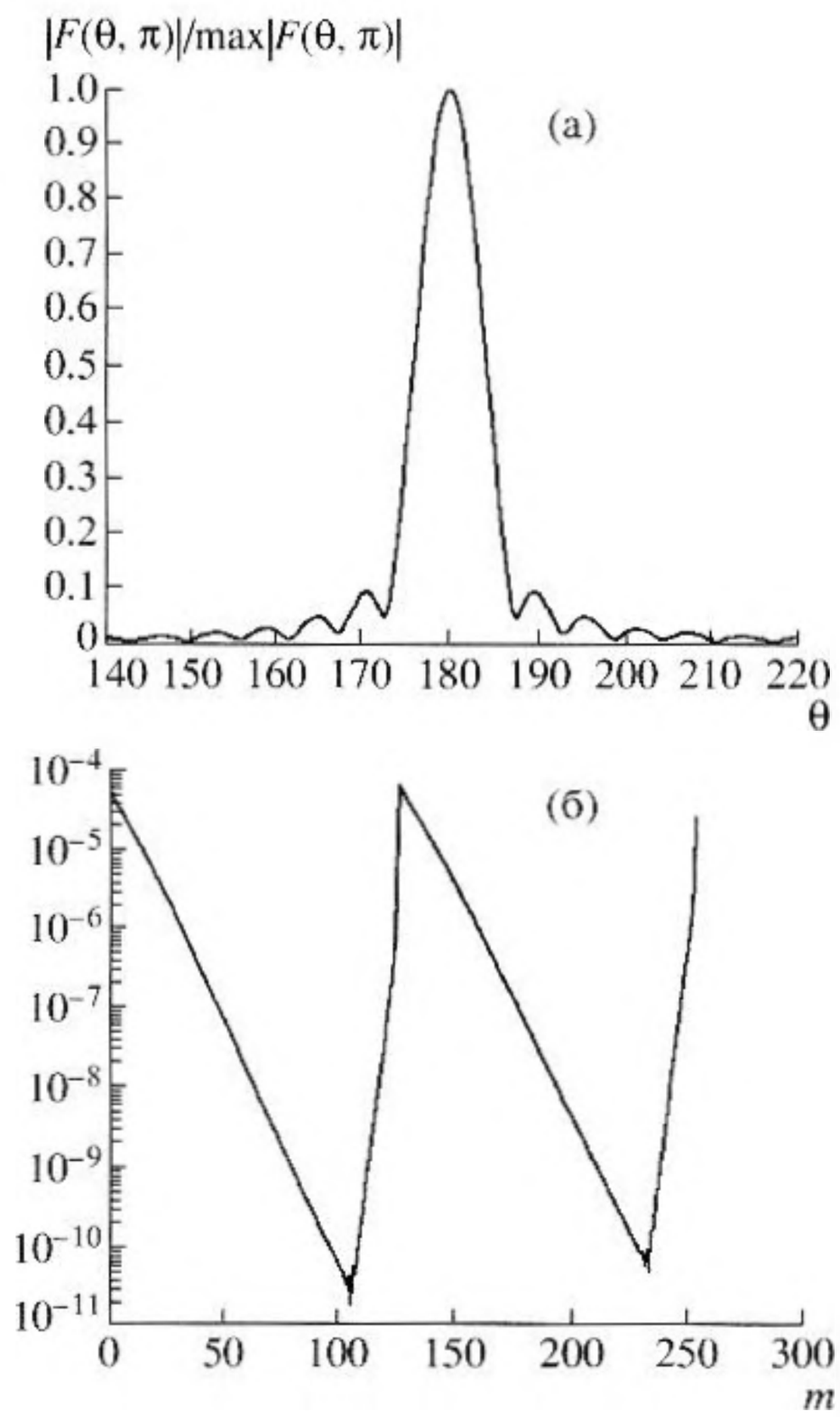

Рис. 7. а) – Диаграмма направленности двухзеркальной антенны; б) – соответствующая невязка краевого условия.

Были также рассчитаны диаграммы излучения двухзеркальной антенны типа Кассегрена [15]. Рассматривалась антенна, состоящая из главного параболического и вспомогательного гиперболического зеркал с общим фокусом в начале координат при $0 \le \theta \le \pi/6$ для обоих зеркал. Уравнение главного зеркала приведено выше (см. (20)), а уравнение вспомогательного зеркала имеет вид:

$$\rho(\theta) = \frac{f - f_2}{f/f_2 \cos^2(\theta/2) - 1},$$

где f_2 – расстояние от фокуса до вершины гиперболоида.

Первичное поле полагалось на гиперболоиде равным полю точечного источника (18), расположенного в вершине параболоида, и равным нулю на параболоиде. На рис. 7а, 7б приведены соответственно диаграмма рассеяния (без учета затенения вспомогательным зеркалом) в плоскости $\varphi = [0, \pi]$ и невязка решения, полученные при $kf = 60$, $kf_2 = 6$, $Q = 0$, $N = 128$.

Проведенные исследования показали, что МПГУ является весьма эффективным при решении внешних краевых задач. Несмотря на изначальную приближенность в постановке задачи, он обеспечивает достаточно высокую точность результатов. Разработанный алгоритм был успешно применен к большому количеству задач для рассеивателей сложной геометрии, в том числе для поверхностей, имеющих изломы, и тонких экранов. Это позволяет говорить о том, что предложен алгоритмически простой, наглядный и единообразный подход к построению математических моделей процесса рассеяния волн в широком диапазоне изменения волнового числа k (вплоть до квазиоптики). Метод распространяется на векторные задачи рассеяния, а также может быть использован при решении краевых задач для других типов эллиптических уравнений.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 06-02-16483.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Захаров Е.В., Пименов Ю.В.* Численный анализ дифракции радиоволн. М.: Радио и связь, 1982. 184 с.
2. *Кюркчан А.Г., Анютин А.П.* Метод продолженных граничных условий и вейвлеты // Доклады РАН. 2002. Т. 385. № 3. С. 309–313.
3. *Кюркчан А.Г., Смирнова Н.И.* Решение задач дифракции методами продолженных граничных условий и дискретных источников // РЭ. 2005. Т. 50. № 10. С. 1231–1238.
4. *Бобровницкий Ю.И., Томилина Т.Т.* Общие свойства и принципиальные погрешности метода эквивалентных источников // Акуст. журн. 1995. Т. 41. № 5. С. 737–750.
5. *Васильев Е.Н.* Возбуждение тел вращения. М.: Радио и связь, 1987. 272 с.
6. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 830 с. (R. Courant. Partial differential equations. New York, London, 1962).
7. *Кюркчан А.Г., Стернин Б.Ю., Шаталов В.Е.* Особенности продолжения волновых полей // УФН. 1996. Т. 166. № 12. С. 1285–1308.
8. *Waterman P.C.* New formulation of acoustic scattering // Journ. Acoust. Soc. Amer. 1968. V. 45. № 6. P. 1417–1429.
9. *Апельцин В.Ф., Кюркчан А.Г.* Аналитические свойства волновых полей. М.: МГУ, 1990. 208 с.
10. *Кюркчан А.Г., Анютин А.П.* О корректности задач дифракции, сводящихся к интегральным уравнениям Фредгольма I рода с гладким ядром // РЭ. 2006. Т. 51. № 1. С. 54–57.
11. *Иванов Е.А.* Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Минск: Наука и техника, 1968. 584 с.
12. *Кюркчан А.Г., Минаев С.А., Соловейчик А.Л.* Модификация метода дискретных источников на основе априорной информации об особенностях дифракционного поля // РЭ. 2001. Т. 46. № 6. С. 666–672.
13. *До Дык Тханг, Кюркчан А.Г.* Эффективный метод решения задач дифракции волн на рассеивателях, имеющих изломы границы // Акуст. журн. 2003. Т. 49. № 1. С. 51–58.
14. *Шендеров Е.Л.* Излучение и рассеяние звука. Ленинград: Судостроение, 1989. 304 с.
15. Сканирующие антенные системы СВЧ / Под ред. Р.К. Хансена. М.: Сов. Радио, 1966. 536 с.

Solution of Wave Diffraction Problems by the Method of Continued Boundary Conditions

A. G. Kyurkchan and N. I. Smirnova

Moscow Technical University of Communication and Information Science, Aviamotornaya ul. 8a, Moscow, 111024 Russia

e-mail: kyurkchan@yandex.ru

Abstract—Numerical solution of three-dimensional diffraction problems by the method of continued boundary conditions, which is known to be effective in the case of two-dimensional problems, is discussed. The basic idea of the method is that the boundary condition is imposed at a certain sufficiently small distance from the impedance surface that produces the diffraction field. This procedure reduces the boundary-value problem to the Fredholm integral equation of the first or second kind with a smooth kernel. Results are reported that show how to apply the MCBC most efficiently depending on particular requirements on accuracy of the solution and amount of calculations. Examples illustrating the high efficiency of the approach are presented.