

ДОМЕННАЯ СТРУКТУРА СЛОЯ НЕМАТИЧЕСКОГО ЖИДКОГО КРИСТАЛЛА В ОСЦИЛЛИРУЮЩЕМ ПОТОКЕ ПУАЗЕЙЛЯ

© 2007 г. Е. Н. Кожевников

Самарский государственный университет

443011 Самара, ул. Ак. Павлова 1

E-mail: kozhev@ssu.samara.ru

Поступила в редакцию 12.01.2006 г.

Теоретически описана пространственно-периодическая структура, возникающая в планарно-ориентированном слое нематического жидкого кристалла (НЖК) при воздействии осциллирующего потока Пуазейля. Анализ эффекта строится на основе уравнений гидродинамики НЖК, из которых выделена самосогласованная система уравнений для возмущений гидродинамических переменных. Показано, что вид структуры и пороговые параметры эффекта зависят от частоты и толщины слоя через скэйлинговую комбинацию ωh^2 . Анализируется зависимость конфигурации возникающих искажений от величины вязкости α_3 .

PACS: 47.20.Ft

Деформация нематического жидкого кристалла (НЖК) при воздействии периодического сдвига приводит к изменению его оптических свойств, что может служить основой для создания акусто-оптических датчиков, модуляторов лазерного излучения и т.д. (напр. [1, 2]). Реакция жидкокристаллических слоев на периодический сдвиг разнообразна и требует адекватного теоретического описания. В гометропном нематическом кристалле при малой амплитуде сдвига молекулы кристалла осциллируют около первоначального равновесного положения, что приводит к просветлению слоя. Увеличение амплитуды может приводить к возникновению пространственно-модулированной структуры, наблюдаемой оптически как “домены” – в этом случае в слое возникают вихревые движения жидкости, а молекулы колеблются около нового равновесного направления, которое периодически меняется вдоль слоя. Результаты экспериментального исследования доменной структуры при воздействии на гометропный НЖК-слой описаны в работах [3, 4], обзорной монографии [1] и, позднее, в работе [5]; теоретический анализ эффекта для различной геометрии воздействия проведен, в частности, в работах [5–7].

Малые амплитуды периодического сдвига в НЖК-слое с планарной исходной ориентацией ввиду малости коэффициента вязкости α_3 не приводят к значительной деформации структуры и изменению оптических свойств слоя. Наблюдение искажений в планарном НЖК-слое при воздействии осциллирующих потоков возможно лишь при критическом возрастании искажений структуры за порогом их образования. Теоретическое описание пороговых эффектов, возника-

ющих в планарном НЖК-слое при воздействии периодического сдвига, актуально до настоящего времени.

При воздействии периодического течения Куэтта на планарный НЖК-слой, ориентированный вдоль потока, в слое возникают ролл-домены, вытянутые перпендикулярно направлению сдвига [8]. В теоретическом анализе эффекта, приведенном в той же работе [8], появление доменов объясняется инерцией среды, которая приводит к запаздыванию скорости вторичных осциллирующих потоков от скорости в потоке Куэтта.

Пороговая деформация планарного НЖК-слоя в осциллирующих потоках Куэтта и Пуазейля со скоростью потока, ортогональной ориентации кристалла, наблюдалась впервые в работах [9, 10]. В этих исследованиях частота осцилляций f и толщина h слоя менялись в широком диапазоне: $f = 10^{-3} - 10^2$ Гц, $h = 30 - 300$ мкм. В слое наблюдалось появление как однородных искажений, так и ролл-доменов, ориентированных параллельно скорости потоков, исследовано изменение вида искажений при наложении электрического и магнитного полей. В работе [1] исследованы экспериментально структуры, возникающие в планарном НЖК-слое при одновременном воздействии на него осциллирующих потоков Куэтта со скоростью потока перпендикулярной исходной ориентации кристалла и сжатия. Показано, что при малых амплитудах сжатия наблюдаемая деформация структуры совпадает с описанной в работах [9, 10]. Увеличение амплитуды сжатия приводит к появлению вторичных “несоразмерных” структур. Авторы работы [1] высказывают предположения о возможной природе вторичных

структур, однако теоретическое описание явления в литературе отсутствует.

Теоретический анализ воздействия осциллирующих потоков Куэтта и Пуазейля на структуру планарного НЖК-слоя проведен в работах [12–15]. Показано, что в зависимости от частоты сдвига и величины электрического и магнитного полей возможно появление искажений двух типов: “Y”-мода, когда среднее по периоду осцилляций отклонение директора от исходного положения по нормали к слою не равно нулю $\langle n_z \rangle \neq 0$, а среднее отклонение в плоскости слоя равно нулю $\langle n_y \rangle = 0$, и “Z”-мода, когда поведение отклонений обратное: $\langle n_y \rangle \neq 0$, $\langle n_z \rangle = 0$. Искажения структуры в потоке Пуазейля различаются также по типу симметрии относительно срединной плоскости НЖК-слоя. Построены асимптотические с возрастанием частоты сдвига ω зависимости порогового градиента сдвига s_0 и волнового числа доменов; для последнего получено соотношение $k \sim \sim \omega^{1/3}$. Определено воздействие электрического, магнитного полей, а также угла между исходной ориентацией кристалла и скоростью потока на характер и геометрию возникающих структур. В работе [16] проведено компьютерное моделирование воздействия осциллирующего потока Куэтта на планарный слой нематического кристалла, однако теоретический анализ эффекта отсутствует.

Как показано далее, теоретический анализ искажений НЖК-структуры в осциллирующих потоках в работах [12–15] является излишне упрощенным, что обусловлено учетом малого числа гармоник (только первых) в описании временной зависимости угловых переменных и пренебрежением инерции среды, которая меняет результаты расчета на высоких частотах – на тех, для которых как раз строятся асимптотики.

В данной работе воздействие осциллирующего потока Пуазейля на структуру планарно-ориентированного нематического кристалла рассмотрено теоретически заново. Предполагается ортогональная ориентация скорости потоков и ориентации кристалла. На основе уравнений гидродинамики НЖК проведен качественный теоретический анализ и компьютерное моделирование эффекта. В численных расчетах и оценках использованы параметры нематического жидкого кристалла МБА, приведенные в приложении.

Уравнения, описывающие течение жидкости и вращение молекул в нематическом жидком кристалле представим в виде [17, 18]

$$\begin{aligned} \gamma_1 N_i + \gamma_2 [U_{ij} n_j - (U_{jk} n_j n_k) n_i] - \Gamma_i &= 0, \\ \rho \dot{\mathbf{U}} &= -\nabla P + \nabla \hat{\sigma}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь \mathbf{n} – директор, определяющий направление выстраивания молекул, \mathbf{U} – скорость жидкости,

U_{ij} – компоненты тензора скорости деформаций, $\mathbf{N} = \dot{\mathbf{n}} - \frac{1}{2}(\text{rot } \mathbf{U} \times \mathbf{n})$ – скорость вращения молекул по отношению к окружающей жидкости, ρ – плотность, P – давление, $\hat{\sigma}$ – тензор вязких напряжений γ_α – коэффициенты вращательной вязкости, $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{h} - (\mathbf{h} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$, \mathbf{h} – упругая сила Франка с компонентами

$$h_i = \nabla_j \frac{\partial g}{\partial (\nabla_j n_i)} - \frac{\partial g}{\partial n_i},$$

g – плотность упругой энергии

$$g = \frac{1}{2} \{ K_{11} (\text{div } \mathbf{n})^2 + K_{22} (\mathbf{n} \cdot \text{rot } \mathbf{n})^2 + K_{33} (\mathbf{n} \times \text{rot } \mathbf{n})^2 \}.$$

K_{ii} – упругие модули. Компоненты вязких напряжений имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \alpha_4 U_{ij} + (\alpha_6 - \alpha_3 \gamma_2 / \gamma_1) (U_{ik} n_k n_j + U_{jk} n_k n_i) + \\ &+ \gamma_2^2 / \gamma_1 U_{km} n_k n_m n_i n_j + \alpha_2 \Gamma_i n_j + \alpha_3 \Gamma_j n_i, \end{aligned}$$

где α_k – коэффициенты вязкости Лесли; малый коэффициент вязкости α_1 полагается равным нулю.

Ограничимся в анализе эффекта частотами, на которых длина вязкой волны в нематическом кристалле больше толщины слоя h , считая выполняющимся неравенство

$$\frac{2\rho\omega h^2}{\alpha_4 + \alpha_6} < 1. \quad (2)$$

Направим оси y и x в срединной плоскости соответственно вдоль и перпендикулярно плоскости потока, а ось z – перпендикулярно плоскости слоя, считая, что границы слоя соответствуют значениям $Z = \pm h/2$ (h – толщина слоя). Исходные скорости осциллирующего потока имеют вид

$$U_{0x} = U_{0z} = 0,$$

$$U_{0y} = \frac{1}{8} \omega h s_0 [(2Z/h)^2 - 1] \cos(\omega T).$$

Здесь $s_0 = 2|\nabla P|/h/\omega\alpha_4$ – безразмерная скорость сдвига, ∇P – градиент давления P вдоль слоя. Величина s_0 связана с максимальной скоростью потока в центре слоя соотношением $s_0 = 8U_{0y, \text{max}}/\omega h$; максимальное значение градиента сдвига достигается на границах слоя и равно по модулю $s_0/2$.

В рассматриваемой геометрии невозмущенный директор располагается вдоль оси x : $\mathbf{n}^0 = (1, 0, 0)$. В возмущенной структуре директор отклоняется от оси x на угол Ψ в плоскости XY и на угол Θ – в плоскости XZ , а в слое возникают замкнутые потоки со скоростью \mathbf{U} . Углы Θ и Ψ считаем малыми, полагая компоненты директора равными $n_x \approx 1$, $n_y \approx \Psi$, $n_z \approx \Theta$, и линеаризуем уравнения движения по углам.

Рассмотрим образование устойчивых искажений структуры, считая, что возмущения гидродинамических переменных не зависят от y , а в случае пространственно модулированной структуры периодически зависят от x .

В дальнейшем описании перейдем к безразмерным координатам $x = X/h, z = Z/h$, времени $t = \omega T$, безразмерным скоростям $V_k = U_k/(\omega h)$ и безразмерной скорости сдвига $s = U_{0y,z}/\omega = s_0 z \cos t$. Уравнения для возмущений принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{\Psi} + a_2(V_{y,x} + s\Theta) - \varepsilon \hat{\Delta}_2 \Psi &= 0, \\ \dot{\Theta} + a_2 V_{z,x} + a_3(V_{x,z} + s\Psi) - \varepsilon \hat{\Delta}_1 \Theta &= 0, \\ (\sigma^2 \hat{\Delta} \partial_t - \hat{D}) V_z &= a_6 \partial_x (\partial_x^2 - \partial_z^2) (s\Psi) + \\ &+ \varepsilon \partial_x (a_2 \partial_x^2 - a_3 \partial_z^2) \hat{\Delta}_1 \Theta, \\ (\sigma^2 \partial_t - \hat{\Delta}_y) V_y &= a_6 s \Theta_{,x} + \varepsilon a_2 \partial_x \hat{\Delta}_2 \Psi, \\ V_{x,x} + V_{z,z} &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \hat{D} &= \eta \hat{\Delta}^2 + \partial_z^2 \partial_x^2, \quad \hat{\Delta} = \partial_x^2 + \partial_z^2, \\ \hat{\Delta}_1 &= \partial_x^2 + L_1 \partial_z^2, \quad \hat{\Delta}_2 = \partial_x^2 + L_2 \partial_z^2, \\ \hat{\Delta}_y &= \eta \partial_x^2 + a_4/2 \partial_z^2 \end{aligned}$$

– дифференцирующие операторы, $L_1 = K_{11}/K_{33}, L_2 = K_{22}/K_{33}$; ε и σ – безразмерные параметры, определяющие зависимость эффекта от толщины НЖК-слоя h и частоты сдвига ω через комбинацию ωh^2 :

$$\varepsilon = \frac{K_{33}}{\gamma_1 \omega h^2} = \frac{1}{\omega \tau}, \quad \sigma^2 = \frac{\rho \omega h^2}{\gamma_1} = \lambda \omega \tau,$$

$\tau = \gamma_1 h^2 / K_{33}, \lambda = \rho K_{33} / \gamma_1^2 \sim 10^{-6}$. Безразмерные вязкости в уравнениях имеют вид: $\eta = (\alpha_4 + \alpha_6) / 2\gamma_1, a_2 = \alpha_2 / \gamma_1, a_3 = \alpha_3 / \gamma_1, a_4 = \alpha_4 / \gamma_1, a_6 = (\alpha_6 / \gamma_1 - \alpha_3 \gamma_2 / \gamma_1^2)$.

Граничные условия для возмущений при жесткой ориентации молекул на границах слоя и замкнутости потоков принимают вид

$$\begin{aligned} \Psi|_{z=\pm 1/2} = \Theta|_{z=\pm 1/2} = V_y|_{z=\pm 1/2} = \\ = V_z|_{z=\pm 1/2} = V_{z,z}|_{z=\pm 1/2} = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Возмущения Θ, V_z , с одной стороны, и Ψ, V_y – с другой, имеют разную четность по z и t ; возможные конфигурации возмущений представлены в таблице

Параметры	(1, 1)	(1, 2)	(2, 1)	(2, 2)
Θ	$\Theta(-z) = \Theta(z),$ $\Theta(t + \pi) = \Theta(t)$	$\Theta(-z) = \Theta(z),$ $\Theta(t + \pi) = -\Theta(t)$	$\Theta(-z) = -\Theta(z),$ $\Theta(t + \pi) = \Theta(t)$	$\Theta(-z) = -\Theta(z),$ $\Theta(t + \pi) = -\Theta(t)$
Ψ	$\Psi(-z) = -\Psi(z),$ $\Psi(t + \pi) = -\Psi(t)$	$\Psi(-z) = -\Psi(z),$ $\Psi(t + \pi) = \Psi(t)$	$\Psi(-z) = \Psi(z),$ $\Psi(t + \pi) = -\Psi(t)$	$\Psi(-z) = \Psi(z),$ $\Psi(t + \pi) = \Psi(t)$
V_z	$V_z(-z) = V_z(z),$ $V_z(t + \pi) = V_z(t)$	$V_z(-z) = V_z(z),$ $V_z(t + \pi) = -V_z(t)$	$V_z(-z) = -V_z(z),$ $V_z(t + \pi) = V_z(t)$	$V_z(-z) = -V_z(z),$ $V_z(t + \pi) = -V_z(t)$
V_y	$V_y(-z) = -V_y(z),$ $V_y(t + \pi) = -V_y(t)$	$V_y(-z) = -V_y(z),$ $V_y(t + \pi) = V_y(t)$	$V_y(-z) = V_y(z),$ $V_y(t + \pi) = -V_y(t)$	$V_y(-z) = V_y(z),$ $V_y(t + \pi) = V_y(t)$

Ограничиваясь одномодовым по z приближением, представим гидродинамические переменные в виде, удовлетворяющем граничным условиям (4):

$$\begin{pmatrix} \Theta \\ \Psi \\ V_z \\ V_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta \cos(\pi z) \\ \psi \sin(2\pi z) \\ v_z [1 + \cos(2\pi z)] \\ v_y \sin(2\pi z) \end{pmatrix} \exp(ikx)$$

– в первых двух конфигурациях, и

$$\begin{pmatrix} \Theta \\ \Psi \\ V_z \\ V_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta \sin(2\pi z) \\ \psi \cos(\pi z) \\ v_z [\sin(\pi z) + \sin(3\pi z)] \\ v_y \cos(\pi z) \end{pmatrix} \exp(ikx)$$

– в третьей и четвертой. Здесь θ, ψ, v_z, v_y – функции времени, периодические по t на пороге образования устойчивой структуры.

Подставим эти выражения в систему (3). Для того, чтобы выделить уравнения для временных

функций, в первом случае умножаем первое и четвертое уравнения в системе на $\sin 2\pi z$, а второе и третье – на $\cos 2\pi z$ и интегрируем по толщине слоя. Во втором случае – наоборот.

Исключим из полученной системы скорости потоков. Суть преобразований поясним на примере четвертого уравнения в системе (3). В конфигурации (1, 1) после интегрирования по z уравнение приводится к виду

$$(\sigma^2 \partial_t + \eta k^2 + 2a_4 \pi^2) v_y = -ik^{-1} [M_1 s \theta + M_2 \psi] = -ik^{-1} Q,$$

где $M_1 \sim k^2$, $M_2 \sim \epsilon k^4$, Q – правая часть уравнения системы (3). В рассматриваемой области частот (2) справедливо неравенство $\sigma^2 |\partial_t| / (\eta k^2 + 2a_4 \pi^2) \ll 1$, что позволяет представить v_y в виде

$$v_y \approx \frac{-i}{k[\eta k^2 + 2a_4 \pi^2]} \left[1 - \frac{\sigma^2 \partial_t}{\eta k^2 + 2a_4 \pi^2} \right] Q.$$

Отбрасывая в полученном выражении малое слагаемое, содержащее ϵ , подставим его в уравнение для ψ , проинтегрированное по z . Аналогичные преобразования, проведенные с третьим уравнением в системе (3), а также условие несжимаемости жидкости в потоках позволяют исключить скорости потоков v_x , v_z из уравнения для θ . Итоговые уравнения для углов θ , ψ приводятся к виду

$$\begin{aligned} \dot{\theta} + \lambda_{i1} \theta - h_{i1} s \psi + m_{i1} (\dot{s} \psi + s \dot{\psi}) &= 0, \\ \dot{\psi} + \lambda_{i2} \psi - h_{i2} s \theta + m_{i2} (\dot{s} \theta + s \dot{\theta}) &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь и далее индекс i указывает на первый из номеров в обозначении конфигурации возмущений (i, j) , $i, j = 1, 2$. Коэффициенты уравнений (5) в различных конфигурациях возмущений имеют следующий вид:

$$\lambda_{ij} = \frac{1}{\omega \tau_{ij}}, \quad i, j = 1, 2;$$

$$\tau_{i1} = \frac{\tau}{\Delta_{\theta i}} \left[1 + \frac{(a_2 k^2 - a_3 i^2 \pi^2)}{D_i} \right]^{-1},$$

$$\tau_{i2} = \frac{\tau}{\Delta_{\psi i}} \left[1 + a_2 \frac{k^2}{\Delta_{\psi i}} \right]^{-1},$$

$$h_{i1} = -Ja_3 + Ja_6 \frac{(a_6 k^2 - a_3 i^2 \pi^3)(k^2 - i^2 \pi^2)}{D_i},$$

$$h_{i2} = -Ja_2 \left[1 - a_6 \frac{k^2}{\Delta_{\psi i}} \right],$$

$$m_{i1} = \frac{\sigma^2 \Delta_i}{D_i} (Ja_3 + h_{i1}), \quad m_{i2} = \frac{\sigma^2}{\Delta_{\psi i}} (Ja_2 + h_{i2}),$$

$$D_1 = [\eta(k^4 + 4\pi^4) + (1 + 2\eta)k^2 \pi^2],$$

$$D_2 = [\eta(k^4 + 31\pi^4) + 4(1 + 2\eta)k^2 \pi^2],$$

$$\Delta_i = (k^2 + i^2 \pi^2), \quad \Delta_{y1} = \eta k^2 + 2a_4 \pi^2,$$

$$\Delta_{y2} = \eta k^2 + a_4 \pi^2 / 2, \quad \Delta_{\theta 1} = k^2 + L_1 \pi^2,$$

$$\Delta_{\psi 1} = k^2 + 4L_2 \pi^2, \quad \Delta_{\theta 2} = k^2 + 4L_1 \pi^2,$$

$$\Delta_{\psi 2} = k^2 + L_2 \pi^2, \quad J = 16/9 \pi^2.$$

Проведем вначале качественный анализ возникающих искажений. Представляя угловые переменные комбинацией

$$\psi = b_1 + b_2 \cos t + b_3 \sin t,$$

$$\theta = d_1 + d_2 \cos t + d_3 \sin t,$$

выделим из системы (5) уравнения для коэффициентов b_i , d_i . Из условия существования ненулевого решения найдем значения s_0

$$s_{0,i1} = \sqrt{\frac{2(1 + \omega^2 \tau_{i2}^2)}{h_{i1} h_{i2} \omega^2 \tau_{i1} \tau_{i2} (1 - \omega \tau_{i2} m_{i2} / h_{i2})}}, \quad (6)$$

$$s_{0,i2} = \sqrt{\frac{2(1 + \omega^2 \tau_{i1}^2)}{h_{i1} h_{i2} \omega^2 \tau_{i1} \tau_{i2} (1 - \omega \tau_{i1} m_{i1} / h_{i1})}}, \quad i = 1, 2.$$

Пороговые значения градиентов скорости сдвига определяются минимизацией значений $s_{0,ik}$ по волновому числу k ; одновременно определяется волновое число k на пороге эффекта и, при $k \neq 0$, ширина доменов Λ .

При $s_0 = s_{0,i1}$ получим $d_2 = d_3 = b_1 = 0$ – в этом случае реализуется конфигурация (1), при $s_0 = s_{0,i2}$ получим $d_1 = b_2 = b_3 = 0$ – в этом случае реализуется конфигурация (2). Вид конфигурации, которая должна возникать в НЖК-слое, определяется минимальным из значений пороговых градиентов скорости.

Проанализируем формулы (6) для разных частот. Пренебрегая малым коэффициентом вязкости a_3 в выражении для h_{ij} , получим оценки

$$h_{i1} \approx a_2 a_6 J \frac{(k^2 - i^2 \pi^2)(k^2 - a_3/a_2 i^2 \pi^2)}{D_i},$$

$$\frac{\omega \tau_{i1} m_{i1}}{h_{i1}} \approx \frac{\omega \tau \sigma^2 \Delta_i}{\Delta_{\theta i} D_i} \sim \frac{\lambda(\omega \tau)^2}{\Delta_i^2},$$

$$\frac{\omega \tau_{i2} m_{i2}}{h_{i2}} \approx a_2 a_6 J \frac{\omega \tau \sigma^2 k^2}{\Delta_{\psi i} \Delta_{\psi i}^2} \sim \frac{\lambda(\omega \tau)^2 k^2}{\Delta_i^3}.$$

На достаточно низких частотах, когда выполняется условие $\omega \tau_{ij} m_{ij} / h_{ij} \ll 1$, инерция среды играет малую роль и вторые слагаемые в скобках в

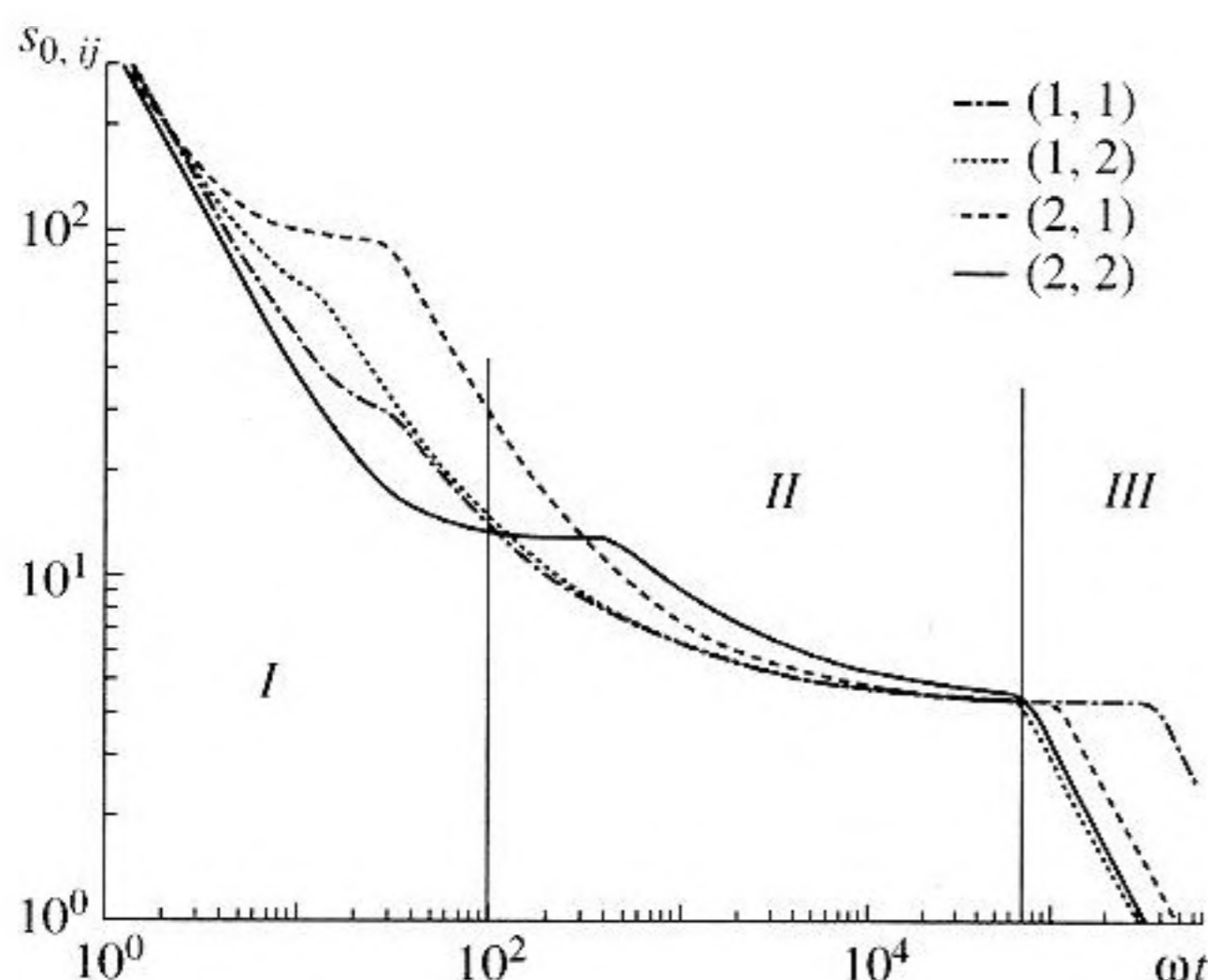


Рис. 1. Зависимость пороговых градиентов скорости от частоты в приближенном расчете. $a_3 = -0.03$.

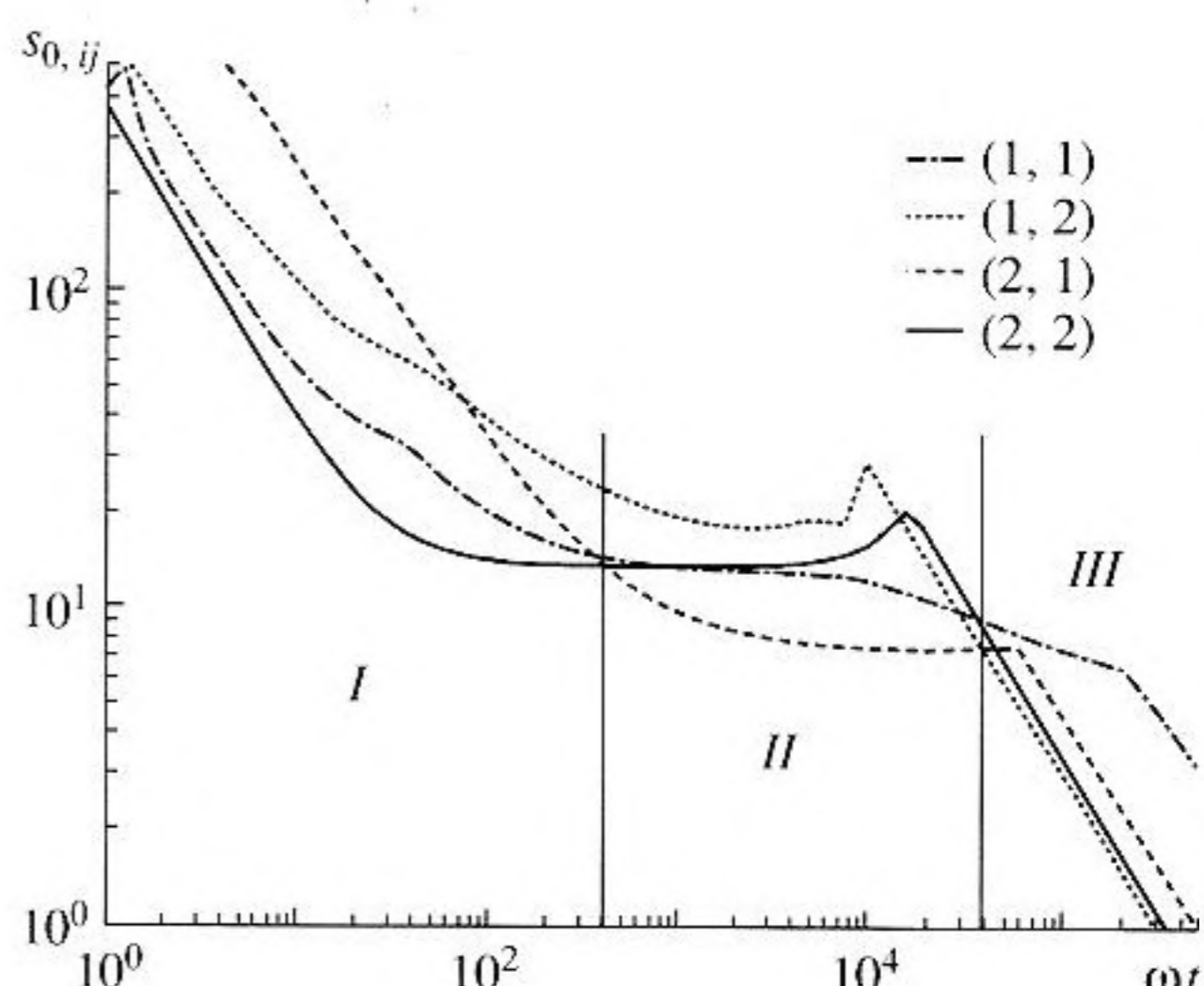


Рис. 2. Зависимость пороговых градиентов скорости от частоты в точном расчете. $a_3 = -0.03$.

числителе формул (6) можно опустить. В этом случае выражения для пороговых градиентов скорости имеют следующий вид

$$s_{0,i1} = \sqrt{\frac{2(1 + \omega^2 \tau_{i2}^2)}{h_{i1} h_{i2} \omega^2 \tau_{i1} \tau_{i2}}}, \quad s_{0,i2} = \sqrt{\frac{2(1 + \omega^2 \tau_{i1}^2)}{h_{i1} h_{i2} \omega^2 \tau_{i1} \tau_{i2}}}. \quad (7)$$

Величины $\tau_{i1}, \tau_{i2}, h_{i2}$ положительны, а коэффициенты h_{i1} отрицательны при $\sqrt{a_3/a_2} \pi < k < \pi$ ($h_{11} < 0$) и $2\sqrt{a_3/a_2} \pi < k < 2\pi$ ($h_{21} < 0$). Таким образом, в конфигурациях (1, j) возникают либо длинноволновые искажения с волновыми числами $k < \sqrt{a_3/a_2} \pi$ либо искажения с числом $k > \pi$; в конфигурациях (2, j) соответствующие ограничения на волновые числа имеют вид $k < 2\sqrt{a_3/a_2} \pi$ и $k > 2\pi$.

Соотношение пороговых градиентов скорости в конфигурациях (i, 1), (i, 2) равно

$$\frac{s_{0,i2}}{s_{0,i1}} = \sqrt{\frac{1 + \omega^2 \tau_{i1}^2}{1 + \omega^2 \tau_{i2}^2}}$$

и определяется отношением времен релаксации, которое зависит от коэффициента a_3 и волнового числа k .

Для параметров МБА получим $\tau_{11}/\tau_{12} < 1$ при $k < 17 - 35a_3$ и $\tau_{21}/\tau_{22} < 1$ при $k < 3.97$; следовательно, длинноволновые искажения НЖК-структуры на низких частотах имеют конфигурацию (1,2) или (2,2). Определим структуру искажений на частотах $\omega \ll \tau_{ij}^{-1}$, в этом случае

$$s_{0,i1} \sim s_{0,i2} \approx \omega^{-1} (h_{i1} h_{i2} \tau_{i1} \tau_{i2})^{-1/2}. \quad (8)$$

Ограничиваясь одноконстантным приближением упругой энергии, когда $\Delta_{\theta 1} = \Delta_{\psi 2} = \Delta_1$, $\Delta_{\theta 2} = \Delta_{\psi 1} = \Delta_2$, полагая $D_i \approx \eta \Delta_i^2$, $a_2 = -1$ и опуская малый коэффициент вязкости a_3 перед дробью в выражении для h_1 , получим следующую оценку для пороговых градиентов скорости

$$s_{0,ij} \sim \frac{1}{\omega \tau} \left[\frac{\eta (k^2 + i^2 \pi^2)^2 (k^2 + \pi^2) (k^2 + 4\pi^2)}{-a_6 (k^2 - i^2 \pi^2) (k^2 + i^2 a_3 \pi^2)} \right]^{1/2}. \quad (9)$$

Градиенты скорости s_0 имеют локальные минимумы при $k = 0$, а также при $k \approx 3.2\pi$ – в конфигурациях (1, j) и $k \approx 20\pi$ – в конфигурациях (2, j).

Расчет пороговых значений s_0 по формуле (9) демонстрирует зависимость геометрии искажений от коэффициента a_3 . При $a_3 < a_c \approx -0.05$ возможны лишь однородные искажения структуры. Отношение пороговых градиентов сдвига $s_{0,22}/s_{0,12}$ при $k = 0$ равно

$$\frac{s_{0,22}}{s_{0,12}} = \sqrt{\frac{1 - a_6/4\eta}{1 - 16a_6/31\eta}} < 1,$$

указывает на конфигурацию (2,2) в однородных искажениях. Пороговое значение s_0 согласно (8) в этом случае равно

$$s_0 = s_{0,22} \approx \frac{2\pi^2 \sqrt{L_1 L_2}}{J\omega \tau} \frac{1}{\sqrt{a_2 a_3 (1 - 16a_6/31\eta)}}. \quad (10)$$

Если $a_3 > a_c$, в слое возможно образование лишь пространственно-модулированных искажений. В этом случае $s_{0,1j}/s_{0,2j} \sim 10^{-1}$ – следовательно, искажения имеют конфигурацию (1,1) либо (1,2).

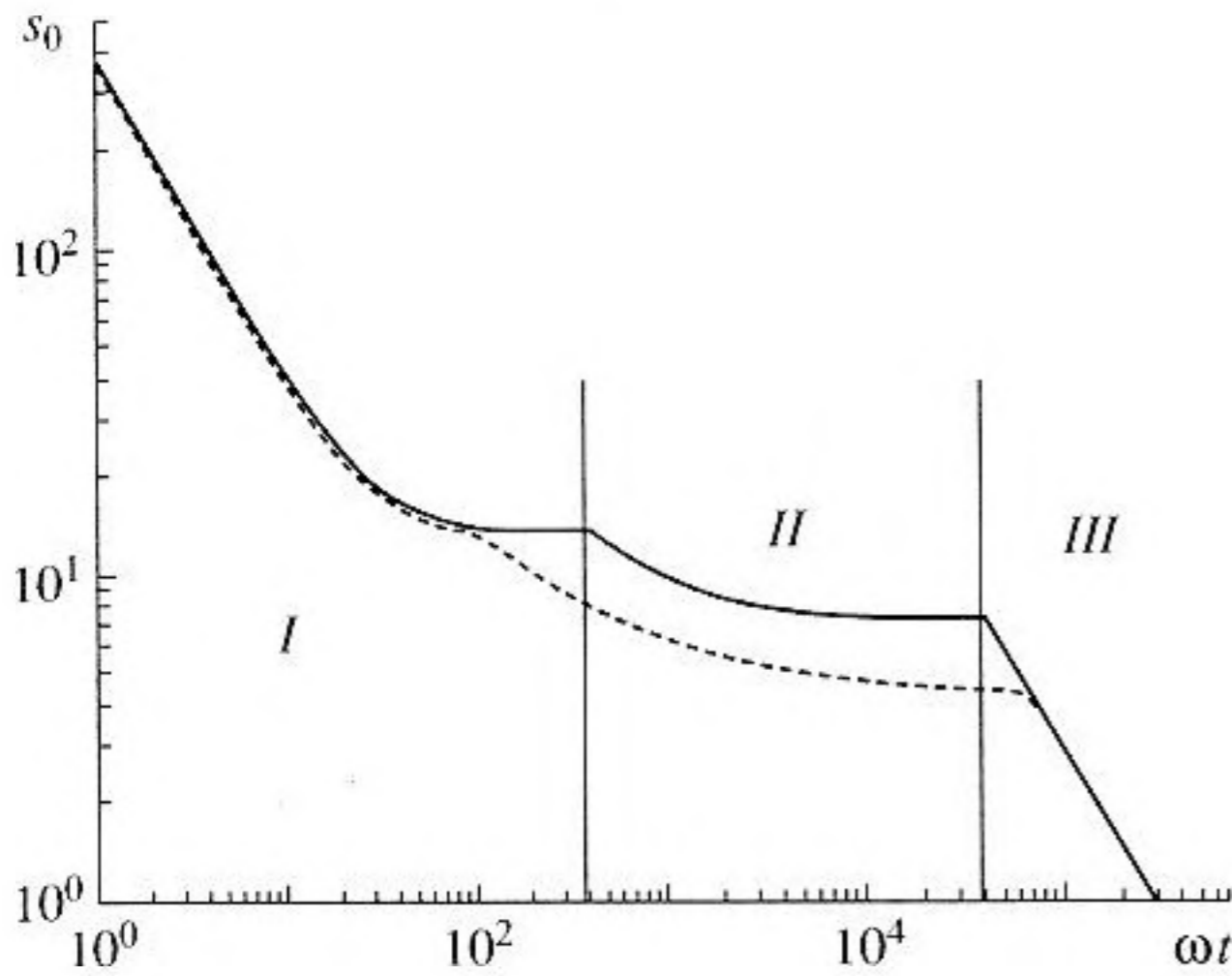


Рис. 3. Зависимость порогового градиента скорости от частоты при $a_3 = -0.03$: сплошная кривая – точный расчет, пунктирная кривая – приближенный расчет.

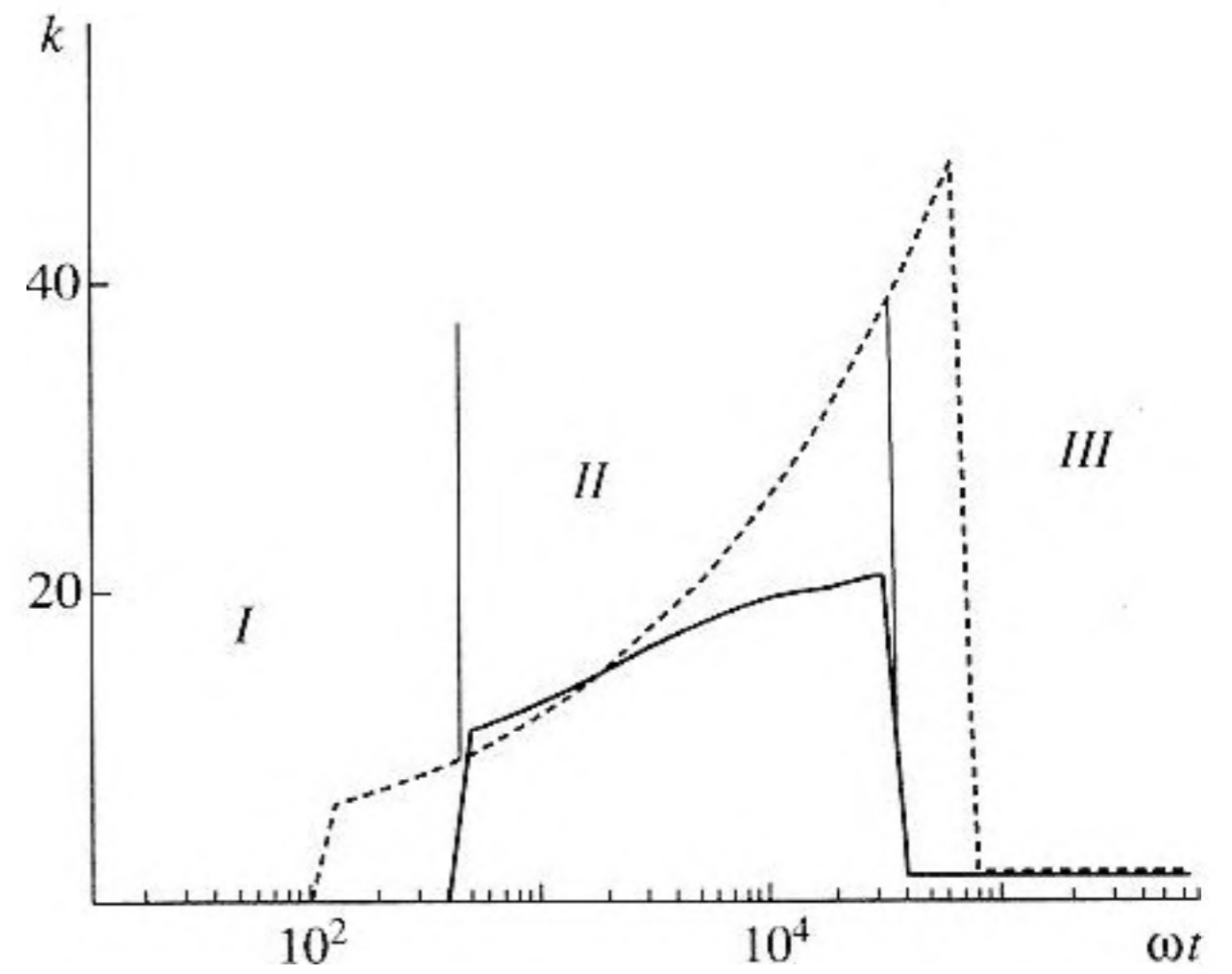


Рис. 4. Зависимость волнового числа доменов от частоты при $a_3 = -0.03$: сплошная кривая – точный расчет, пунктирная кривая – приближенный расчет.

В соответствии с приведенным выше соотношением времен релаксации τ_{11} и τ_{12} качественный расчет предсказывает структуры (1, 2) при $k < 17 - 35a_3$ и (1, 1) – при $k > 17 - 35a_3$. Заметим, что, если времена τ_{11} и τ_{12} имеют близкие значения, минимальный порог s_0 и, следовательно, теоретическая конфигурация искажений могут определяться не только соотношением времен релаксации, но и рядом иных факторов: инерцией среды, значением a_3 , конечной ориентационной энергией на границах слоя. В этом случае изменение частоты воздействия может приводить к чередованию конфигураций. Зависимость типа структуры от величины a_3 на низких частотах ($\omega\tau_{ij} < 1$) и многообразии конфигураций вблизи точки инверсии a_3 продемонстрировано на рис. 5, построенном численным решением системы (5).

жениях для $\tau_{ij}, m_{ij}, h_{ij}$, получим следующие оценочные выражения для $s_{0,ij}$

$$s_{0,i1} \approx \frac{1}{\omega\tau} \left\{ \frac{2 \Delta_{\theta i} \Delta_{y i}^2 D_i (1 + k^4/D_i)}{\lambda J^2 a_6^2 k^4 (i^2 \pi^2 - k^2)} \right\}^{1/2}, \quad (11)$$

$$s_{0,i2} \approx \frac{1}{\omega\tau} \left\{ \frac{2 \Delta_{\psi i} D_i^2 (1 + k^4/\Delta_{y i})}{\lambda \pi J^2 |a_6| \Delta_i (i^2 \pi^2 - k^2) (1 - a_6 k^2/\Delta_{y i})} \right\}^{1/2}.$$

Для любой из конфигураций пороговый градиент сдвига обратно пропорционален частоте $s_{0,ij} \sim \omega^{-1}$, а волновое число доменов не зависит от частоты и ограничено сверху значением $k = \pi$ в конфигурациях (1, j) и значением $k = 2\pi$ в конфигура-

При любых значениях a_3 зависимость $s_{0,ij}$ от частоты определяется соотношением $s_{0,ij} \sim \omega^{-1}$.

На частотах $\omega \gg \tau^{-1}$ формулы (9) определяют появление пространственно-модулированной структуры (1,1), волновое число в которой возрастает с частотой $k \sim \omega^{1/3}$, а пороговая скорость сдвига s_0 не зависит от частоты. Эти оценочные результаты совпадают с приведенными ранее в работе [14].

Проанализируем формулы (9) на высоких частотах. Инерционные слагаемые в знаменателе этих формул возрастают с частотой по закону $\omega\tau_{ij}m_{ij}/h_{ij} \sim \lambda(\omega\tau)^2/\Delta_i^2$, поэтому с увеличением частоты роль инерции среды возрастает. Переходя к частотам, на которых выполняются неравенства $\omega\tau_{ij}m_{ij}/h_{ij} \gg 1$, и полагая $a_3 = 0, a_2 = -1$ в выра-

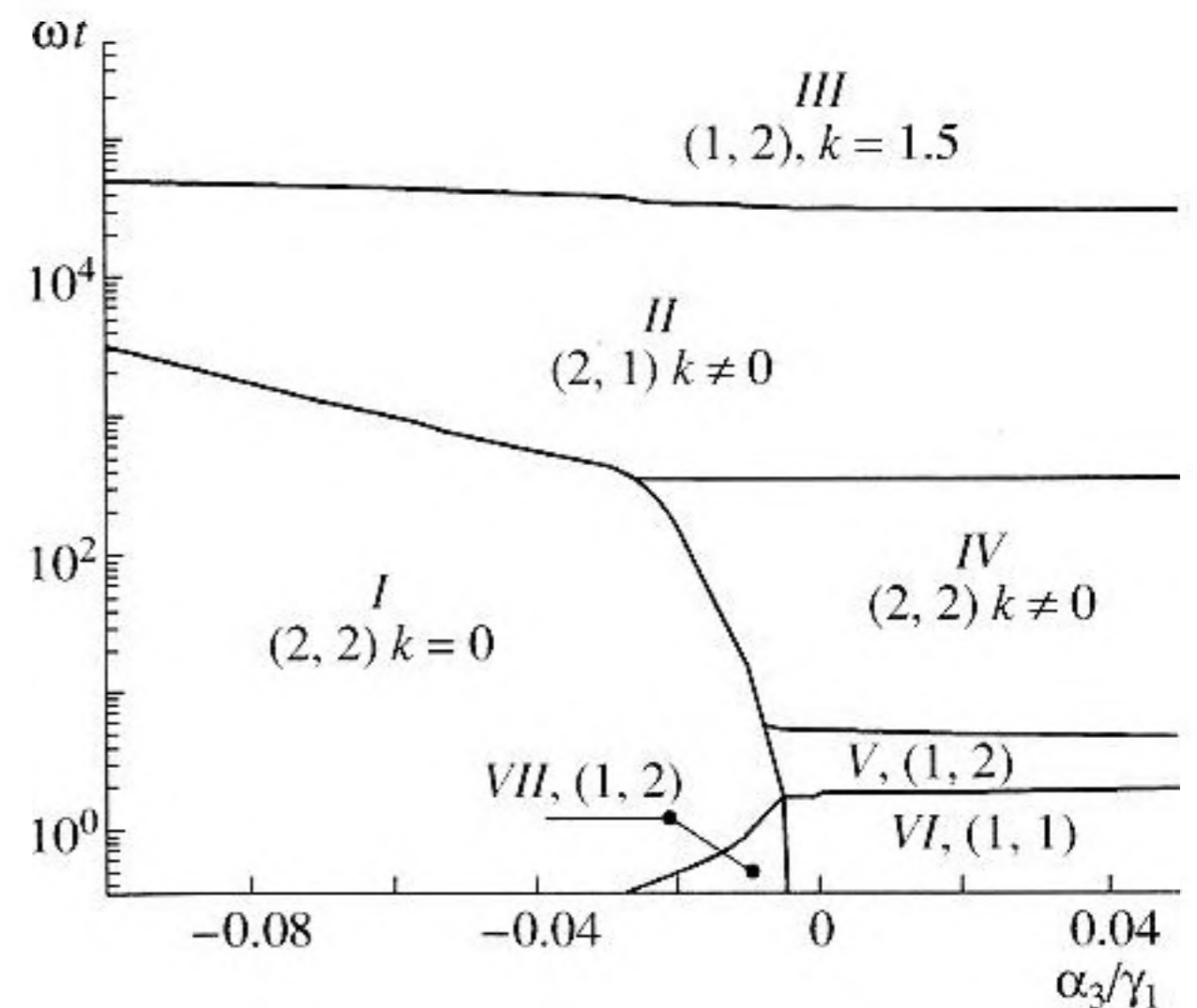


Рис. 5. Зависимость конфигурации искажений от вязкости α_3/γ_1 и приведенной частоты ωt .

циях (2, j). Следовательно при переходе к высоким частотам, на которых существенна инерция среды, волновое число должно уменьшаться скачком от некоторого значения k_2 до $k < \pi$.

Численный расчет порога эффекта по формулам (11) для параметров МБА дает наименьшее значение s_0 для конфигурации (1,2) и тем самым предсказывает появление именно этой геометрии возмущений, волновое число доменов при этом равно $k = 1.7$.

Результаты численного расчета пороговых значений $s_{0,ij}$ по упрощенным формулам (6) для $a_3 = -0.03$ приведены на рис. 1, 3, 4. Зависимость пороговых градиентов от частоты, приведенная на рис. 1, демонстрирует следующую смену конфигураций с возрастанием частоты: (2, 2) \rightarrow (1, 1) \rightarrow (1, 2). На низких частотах (I) формулы (6) предсказывают однородную деформацию структуры НЖК-слоя. Во второй области расчет приводит к доменной структуре типа (1, 1). Волновое число доменов, возрастая с частотой по закону $k \sim \omega^{1/3}$, меняется в пределах от $k_1 = 6$ до $k_2 = 49$, границы области ограничены значениями приведенной частоты $(\omega\tau)_1 = \Omega_1 = 109$ и $(\omega\tau)_2 = \Omega_2 = 69000$. На высоких частотах, когда существенны инерционные эффекты и выполняются неравенства $\omega\tau_i m_i / h_i \gg 1$ ($i = 1, 2$), приближенный расчет определяет широкополосную доменную структуру типа (1,2) с шириной доменов $\Lambda \approx 1.95h$, не зависящей от частоты. На высоких и низких частотах (I, III области) зависимость s_0 от частоты определяется соотношением $s_0 \sim \omega^{-1}$.

В точном расчете порога эффекта угловые переменные в конфигурациях (i, 1) представлены в виде

$$\psi = \sum_{i=1}^N \{b_{2i-1} \cos[(2i-1)t] + b_{2i} \sin[(2i-1)t]\},$$

$$\theta = d_0 + \sum_{i=1}^N \{d_{2i-1} \cos(2it) + d_{2i} \sin(2it)\}$$

и в конфигурации (i, 2) – в виде

$$\psi = b_0 + \sum_{i=1}^N \{b_{2i-1} \cos(2it) + b_{2i} \sin(2it)\},$$

$$\theta = \sum_{i=1}^N \{d_{2i-1} \cos[(2i-1)t] + d_{2i} \sin[(2i-1)t]\}.$$

Значение N полагалось равным $N = 3$, что обеспечивало точность в расчете s_0 , не меньшую 1%. Результаты расчета для значения $a_3 = -0.03$ приведены на рис. 2–5. Зависимость $s_{0,ij}$ от $\omega\tau$ на рис. 2 демонстрирует смену конфигураций (2, 2) \rightarrow (2, 1) \rightarrow (1, 2) при возрастании частоты. На низких частотах (область I), как и в приближен-

ном анализе расчет предсказывает однородную деформацию НЖК-слоя. В области II возникают домены, волновое число в которых нарастает с частотой от $k_1 = 10$ до значения $k_2 = 21$. В третьей области размер широкополосных доменов $\Lambda \approx 2h$ не меняется при увеличении частоты. Границы областей определяются значениями $\Omega_1 = 390$ и $\Omega_2 = 40000$.

На низких частотах, когда $\omega\tau < 10^2$, и высоких частотах, когда $\omega\tau > 69000$, результаты приближенного и точного расчетов практически совпадают (рис. 3). В промежуточной области частот результаты приближенного и точного анализа радикально расходятся, предсказывая различную конфигурацию искажений, различную частотную зависимость и величину порогового градиента скорости s_0 , волнового числа доменов k и границ Ω_1, Ω_2 . Учитывая, что во всех предшествующих работах анализ эффекта проводился по упрощенным формулам, рассмотрим ниже причины этого расхождения.

Сравним результаты расчета с данными эксперимента. Смена конфигурации искажений при изменении частоты подтверждается данными работы [10], в которой экспериментально наблюдались искажения типа (2, j) при $\omega\tau \approx 1.2$ и (1, j) при $\omega\tau \approx 1200$; тип временной зависимости искажений – индекс “ j ”, – не указан. Порог эффекта на низких частотах ($\omega\tau_{ij} \ll 1$) в [10] определяется критическим числом Эриксона

$$Er_c = \sqrt{\frac{\alpha_3 \alpha_2}{K_{11} K_{22}}} |\nabla P| h^2 / 8 = \sqrt{\frac{a_3 a_2}{L_1 L_2}} s_0 \omega \tau / 8 \approx 10.9.$$

Экспериментальная длина волны структуры Λ при $\omega\tau \approx 1200$ равна $\Lambda \approx h/2$.

При использовании в нашем расчете тех же значений упругих постоянных и коэффициентов вязкости, что и в [10], получим теоретическое число Эриксона $Er_c \approx 10.3$, близкое к экспериментальному. Теоретическая длина волны структуры $\Lambda = 2\pi k^{-1} h = 0.48h$, найденная для приведенной частоты $\omega\tau = 1200$, также близка к экспериментальной.

Анализ эффекта при различных значениях коэффициента вязкости α_3 демонстрирует изменение конфигурации искажений с приближением к точке инверсии α_3 . Возможные конфигурации искажений нематической структуры при различных значениях $a_3 = \alpha_3 / \gamma_1$ и приведенной частоты $\omega\tau$ представлены на рис. 5. В области I возникает однородная структура типа (2, 2). Во второй области (II) расчет предсказывает появление доменов с шириной доменов, уменьшающейся при увеличении частоты. В области III становится существенной инерция среды, в слое возникает доменная структура типа (1, 2) с шириной доменов $\Lambda \approx 2h$, не зависящей от частоты. Эта смена конфигураций продемонстрирована на рис. 2–4. Вблизи точки

инверсии и при положительных значениях коэффициента вязкости α_3 в НЖК-слое возможно появление доменных структур иных типов. В областях V и VII расчет предсказывает доменную структуру искажений типа (1, 2) с волновым числом доменов $k \approx 4.5$, не зависящим от частоты. В областях IV и V предпочтительной является доменная структура типа (1, 1); в области IV при увеличении частоты волновое число меняется от $k_1 \approx 4.6$ до $k_2 \approx 7.5$, в области VI волновое число $k \approx 5$ и слабо меняется с частотой.

Заметим, что в областях IV–VI пороговые значения градиента скорости s_0 в конфигурациях (1, 1) и (1, 2) различаются незначительно, порой это различие меньше точности расчета. В этом случае структура искажений за порогом эффекта может определяться нелинейными эффектами. Их учет требует отдельного анализа и не входит в рамки данной работы.

В работах [12–15] теория доменных структур в НЖК-слое при воздействии периодического сдвига в потоках Пуазейля и Куэтта строится в области II с учетом лишь первых временных гармоник, что, в частности, приводит к асимптотической зависимости $k \sim \omega^{1/3}$ при $\omega \rightarrow \infty$. Покажем, что такое описание носит лишь качественный характер и не может быть использовано для определения типа и численных характеристик возникающей структуры. Для этого найдем высокочастотную асимптотику порогового решения системы (5), пренебрегая в нем инерционными слагаемыми, и сравним результаты с асимптотами, вытекающими из приближенных формул (7). Опуская в (5) инерционные слагаемые, получим следующие уравнения для углов

$$\begin{aligned} \dot{\theta} + \lambda_{i1}\theta - h_{i1}s\psi &= 0, \\ \dot{\psi} + \lambda_{i2}\psi - h_{i2}s\theta &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

На высоких частотах выполняются неравенства $\lambda_{ij} \ll 1$. Ищем решение уравнений (12) в виде

$$\begin{aligned} \theta &= Ae^{Hs_0 \sin t} + Be^{-Hs_0 \sin t}, \\ \psi &= \sqrt{h_{i2}/h_{i1}} [Ae^{Hs_0 \sin t} - Be^{-Hs_0 \sin t}], \end{aligned}$$

где $H = \sqrt{h_{i1}h_{i2}}$.

При $\lambda_{i1} = \lambda_{i2} = 0$ коэффициенты A, B – постоянные. Полагаем при $\lambda_{ij} \ll 1$ коэффициенты A, B равными: $A = A_0 + A_1, B = B_0 + B_1$, где A_0, B_0 – постоянные, а $A_1 \sim B_1 \sim A_0\lambda_{i1}$ – зависящие от времени малые поправки. Выделим из системы (12) уравнения для A_1, B_1

$$\begin{aligned} \dot{A}_1 &= -2(\lambda_{i2} + \lambda_{i1})A_0 - 2(\lambda_{i2} - \lambda_{i1})B_0 e^{-2Hs_0 \sin t} \\ \dot{B}_1 &= 2(\lambda_{i2} - \lambda_{i1})A_0 e^{2Hs_0 \sin t} - 2(\lambda_{i2} + \lambda_{i1})B_0. \end{aligned} \quad (13)$$

На пороге эффекта A_1 и B_1 периодически зависят от времени. Требуя отсутствия вековых слагаемых в решении уравнений (13), приходим к следующему уравнению для s_0

$$I_0(2Hs_0) = \frac{|\lambda_{i1} + \lambda_{i2}|}{|\lambda_{i1} - \lambda_{i2}|}, \quad (14)$$

где I_0 – модифицированная функция Бесселя нулевого порядка. В уравнение (14) не входит частота. Следовательно, асимптотиками порогового градиента скорости s_0 и волнового числа k будут постоянные значения, но не степенные зависимости от частоты, полученные в [12–14]. Для параметров МБА наименьшее значение $s_0 \approx 1.85$ достигается при $i = 2$; соответствующее значение волнового числа равно $k \approx 20$. Отношение времен релаксации $\tau_{21}/\tau_{22} \approx 1.24$, найденное для $k = 20$, указывает на конфигурацию (2,1) в асимптотическом решении; при этом

$$\theta = A_0 \operatorname{ch}(2Hs_0 \sin t),$$

$$\psi = -1.64A_0 \sqrt{h_{22}/h_{21}} \operatorname{sh}(2Hs_0 \sin t), \quad 2Hs_0 \approx 3.5.$$

Разложение θ и ψ по гармоническим функциям

$$\theta \approx -A_0 \{ 1 - 1.1 \cos 2t + 0.3 \cos 4t - 0.02 \cos 6t + \dots \}$$

$$\psi \approx -2.8A_0 \{ \sin t - 0.31 \sin 3t + 0.04 \sin 5t + \dots \}$$

демонстрирует медленную сходимость гармонических рядов, описывающих решение уравнений (14) на высоких частотах. Поэтому ограничение в представлении углов первыми временными гармониками, когда $\theta \approx -A_0, \psi \approx -2.8A_0 \sin t$, приводит к иной, по сравнению с точным расчетом, конфигурации искажений, а также к критическим параметрам и высокочастотной асимптотике волнового числа, далеким от реальных.

Расчет эффекта в данной работе проведен в одномодовом по z приближении. Учет большего числа пространственных гармоник в разложении скоростей и углов не меняет в целом картину эффекта; о численном изменении параметров эффекта в уточненном расчете будем судить, сопоставив результаты данной работы с уточненными для одной из частот. При $\omega t = 10^3$ согласно приведенному выше расчету в НЖК-слое возникают искажения с конфигурацией (2,1), а пороговые параметры равны $s_0 = 9.81, k = 12.8$. Расчет, проведенный с учетом трех пространственных гармоник, сохраняя конфигурацию искажений, приводит к близкому значению пороговой скорости сдвига $s_0 = 9.98$ и несколько меньшему значению волнового числа $k = 10.8$. Численное уточнение эффекта в многомодовом по z приближении для всех частот не входит в рамки данной работы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 04-02-17454).

ПРИЛОЖЕНИЕ

В численном анализе эффекта параметры жидкого кристалла принимались равными соответствующим значениям для жидкого кристалла МББА [17]:

$\gamma_1 \approx -\alpha_2 = 0.78$ пуаз, $\alpha_3 = 0.02$ пуаз, $\alpha_4 = 0.83$ пуаз, $\alpha_6 = -0.34$ пуаз, $\eta = 0.31$ пуаз; $K_{11} = 5.8 \times 10^{-6}$ дин, $K_{22} = 0.33 \times 10^{-6}$ дин, $K_{33} = 0.8 \times 10^{-6}$ дин; $\rho = 1$ г см⁻³.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Капустин А.П., Капустина О.А. Акустика жидких кристаллов. М.: Наука, 1986. 248 с.
2. Яковенко Г.Н. О возможности внутренней модуляции лазерного излучения на основе жидких кристаллов // Акуст. журн. 1994. Т. 40. № 5. С. 851–853.
3. Белова Г.Н., Ремизова Е.И. Акустооптический эффект в неориентированном слое нематического жидкого кристалла при его периодической сдвиговой деформации // Кристаллография. 1986. Т. 31. Вып. 3. С. 517–521.
4. Белова Г.Н., Ремизова Е.И. Особенности акустооптического взаимодействия в гомеотропно ориентированном слое нематического жидкого кристалла при его периодической сдвиговой деформации // Акуст. журн. 1985. Т. 31. Вып. 3. С. 289–295.
5. Börsönyi T., Buka Á., Krehov A.P., Kramer L. // Response of homeotropic nematic liquid crystal to rectilinear oscillatory shear // Phys. Rev. E. 1998. V. 58. P. 7419.
6. Kozhevnikov E.N. Domain structure in a normally oriented liquid crystal layer under action of low-frequency shear // Sov. Phys. JETP. 1986. V. 64. № 5. P. 793–796.
7. Кожевников Е.Н. Доменная структура в слое нематического жидкого кристалла в низкочастотном потоке Куэтта // Кристаллография. 2005. Т. 50. № 4. С. 705–711.
8. Hogan S.J., Mullen T., Woodford P. Rectilinear low-frequency shear of homogeneously aligned nematic liquid crystals // Proc. Roy. Soc. Lond. A. 1993. V. 441. P. 559.
9. Pieransky P., Guyon E. Instability of certain shear flows in nematic liquids // Phys. Rev. A. 1974. V. 7. № 1. P. 404–417.
10. Guyon E., Pieransky P. Poiseuille flow instabilities in nematics // J. Phys. Coll. (Fr.). 1975. V. 36. № 3. P. c1-203–208.
11. Аникеев Д.Н., Капустина О.А. Особенности модулированных структур в жидких кристаллах, индуцированных воздействием звука // ЖЭТФ. 1996. Т. 110. Вып. 4(10). С. 1328–1338.
12. Manneville P., Dubois-Violette E. Shear flow instabilities in nematics // J. Phys. (Fr.). 1976. V. 37. № 4. P. 285–296.
13. Dubois-Violette E., Buyon E., Janossy I., Pieransky P., Manneville P. Theory and experiments on plane shear flow instabilities in nematics // J. Mecanique. 1977. V. 16. № 5. P. 733–767.
14. Manneville P. Theoretical analysis of Poiseuille flow in nematics // J. Phys. (Fr.). 1979. V. 40. № 7. P. 713–724.
15. Решетов В.Н. Ориентационная неустойчивость нематических жидких кристаллов в ориентационном потоке // Акуст. журн. 1985. Т. 31. Вып. 5. С. 639–643.
16. Tarasov O.S., Krehov A.P., Kramer L. Transition to spatially periodic patterns in nematics under oscillatory shear flow: linear analysis // arXiv:condmat/0205399 v1. 2004.
17. Stephen M.J., Straley J.P. Physics of liquid crystals // Rev. of Modern Physics. 1974. V. 46. P. 617.
18. Кожевников Е.Н. Доменная структура нематического жидкого кристалла в низкочастотном потоке Куэтта // Акуст. журн. 2005. Т. 50. Вып. 4. С. 705–711.

The Domain Structure of a Nematic Liquid Crystal Layer in an Oscillating Poiseuille Flow

E. N. Kozhevnikov

Samara State University, ul. Akademika Pavlova 1, Samara, 443011 Russia

e-mail: kozhev@ssu.samara.ru

Abstract—A spatially periodic structure arising in a nematic liquid crystal layer with planar orientation under the effect of an oscillating Poiseuille flow is described theoretically. The effect is analyzed on the basis of hydrodynamic equations of nematic liquid crystals, from which a self-consistent set of equations for perturbations of hydrodynamic variables is separated. It is demonstrated that the structure type and the threshold parameters of the effect depend on the frequency and the layer thickness through the scaling combination ωh^2 . The dependence of the configuration of arising distortions on the value of viscosity α_3 is analyzed.