АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2007, том 53, № 5, с. 645–652

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК 621.515:534

ОБОБЩЕННЫЕ РАДИАЛЬНЫЕ МОДЫ КОЛЕБАНИЙ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ В ЦИЛИНДРЕ АКУСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ

© 2007 г. А. А. Сокольский, В. И. Садчиков

Белорусский государственный университет
220030 Минск, пр-т Независимости, 4
E-mail: sokolan@tut.by
Объединённый институт энергетических и ядерных исследований – "Сосны" НАН Беларуси
220109 Минск, ул. акад. А.К. Красина, 99
E-mail: jinpr@sosny.bas-net.by

Поступила в редакцию 10.03.06 г.

Представлены варианты замкнутых волновых уравнений для возмущений скорости во вращающейся сжимаемой среде (жидкости, газе). В уравнениях учтено влияние как неидеальности уравнения состояния среды, так и характера ее невозмущенного состояния. Для идеального газа при изотермическом фоновом состоянии найдены точные аналитические решения этих уравнений, описывающие обобщенные радиальные моды колебаний. Сделан вывод о существовании сдвига резонансных частот этих мод, вызванного вращением среды. Рассчитана величина сдвига как функция скорости вращения газа и радиуса цилиндра.

PACS: 43.20.Bi, 43.20.Ks

Влияние вращения на волновые процессы рассматривалось еще в классических работах, посвященных теории волн в океане и атмосфере [1–3]. Однако учету этого влияния для волн в сжимаемых средах до последнего времени уделялось недостаточно внимания. В настоящий период интерес к этой проблематике непрерывно растет. Так, в работах [4–6] подчеркнута необходимость учета влияния вращения на мощные акустические поля для широкого класса технических устройств с быстро вращающейся рабочей средой. В работе [6] рассмотрен ряд существенных вопросов акустики вращающегося газа: поведение фазовой и групповой скорости волн, амплитуды, спектральных характеристик и т.п. В настоящей работе выведена замкнутая система уравнений для возмущений скорости в равномерно вращающейся сжимаемой среде (жидкости, газе), характеризуемой произвольным двухпараметрическим уравнением состояния. Эта система описывает в линейном приближении волновые процессы, имеющие характер адиабатических отклонений от фонового состояния среды, которое является состоянием механического, но не обязательно теплового равновесия. Так, фоновое состояние может быть адиабатическим, изотермическим или обладающим иным распределением температуры. На основе полученной системы уравнений для идеального газа при изотермическом фоновом состоянии получены аналитические решения, описывающие "обобщенные радиальные моды" колебаний вращающейся среды, ограниченной цилиндрической стенкой. Под обобщенной радиальной модой понимается решение с взаимосвязанными ненулевыми радиальной и угловой компонентами скорости, переходящее при "выключении" вращения в соответствующую радиальную моду. Сделан вывод о существовании сдвига резонансных частот обобщенных радиальных мод, вызванного вращением газа. Для идеального газа рассчитана величина этого сдвига как функция скорости вращения газа и радиуса цилиндрической стенки.

1. ВЫВОД ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ СЖИМАЕМОЙ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ СРЕДЫ

Рассмотрим сжимаемую гидродинамическую среду (жидкость, газ), вращающуюся с постоянной угловой скоростью $\mathbf{\Omega}$. Введем вращающуюся вместе с ней систему отсчета Σ и все последующее рассмотрение будем проводить в этой системе. В ней на элемент среды (в расчете на единицу массы) действует сумма гравитационной и центробежной сил

$$\mathbf{G} = -\mathrm{grad}(\Phi - \Omega^2 r^2/2) = \mathbf{g} + \Omega^2 \mathbf{r}, \qquad (1)$$

а также сила Кориолиса $2[\mathbf{V} \times \mathbf{\Omega}]$, где Φ – гравитационный потенциал, r – расстояние от оси вращения, $\mathbf{V}$ – скорость элемента среды относительно Σ.

Процессы, в которых вязкостью и теплопроводностью среды можно пренебречь, описываются в Σ системой гидродинамических уравнений:

$$\dot{\mathbf{V}} + (\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{V} = -\rho^{-1}\mathrm{grad}\,p + \mathbf{G} + 2[\mathbf{V}\times\mathbf{\Omega}], \quad (2)$$

$$\dot{\rho} + \mathrm{div}(\rho\mathbf{V}) = 0,\ \ \dot{p} + \mathbf{V}\cdot\nabla p = c^2(\dot{\rho} + \mathbf{V}\cdot\nabla\rho), \quad (3)$$

где $\dot{f} \equiv \partial f/\partial t$, $c^2 = (\partial p/\partial p)_s$, s – энтропия. Согласно (2), в состоянии механического (но не обязательно теплового) равновесия относительно Σ, невозмущенные (фоновые) давление p_0 и плотность ρ_0 среды удовлетворяют соотношению

$$\mathrm{grad}\,p_0 = \rho_0\mathbf{G}. \quad (4)$$

Для адиабатических отклонений от фонового состояния, в линейном приближении по скорости $\mathbf{V}$ и по возмущениям давления $\tilde{p} = p - p_0$ и плотности $\tilde{\rho} = \rho - \rho_0$, соотношения (2)–(4) дают систему уравнений для $\mathbf{V}$, $\tilde{\rho}$ и $\tilde{p}$:

$$\rho_0\dot{\mathbf{V}} = -\mathrm{grad}\,\tilde{p} + \tilde{\rho}_0\mathbf{G} + 2\rho_0[\mathbf{V}\times\mathbf{\Omega}], \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\rho}} &= -\rho_0\mathrm{div}\mathbf{V} - \mathbf{V}\mathrm{grad}\rho_0, \\ \dot{\tilde{p}} &= -\rho_0(\mathbf{V}\cdot\mathbf{G}) - \rho_0 c_0^2\mathrm{div}\mathbf{V}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $c_0^2 = c^2(p_0, \rho_0)$. Дифференцируя (5) по времени и используя (6), получаем уравнение для скорости $\mathbf{V}$:

$$\begin{aligned} \rho_0\ddot{\mathbf{V}} &= \mathrm{grad}[\rho_0(\mathbf{V}\cdot\mathbf{G}) + \rho_0 c_0^2\mathrm{div}\mathbf{V}] - \\ &- \mathbf{G}(\rho_0\mathrm{div}\mathbf{V} + \mathbf{V}\mathrm{grad}\rho_0) + 2\rho_0[\dot{\mathbf{V}}\times\mathbf{\Omega}]. \end{aligned} \quad (7)$$

Для рассматриваемых фоновых состояний векторы $\mathrm{grad}\rho_0$, $\mathrm{grad}\,p_0$ (и градиент любой функции от p_0 и ρ_0) коллинеарны вектору $\mathbf{G}$, в чем легко убедиться с помощью равенств (1) и (4). Это позволяет преобразовать уравнение (7) к виду:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{V}} - \mathrm{grad}(c_0^2\mathrm{div}\mathbf{V}) &= \mathrm{grad}(\mathbf{V}\cdot\mathbf{G}) + \\ &+ (\rho_0^{-1}c_0^2\mathrm{grad}\rho_0 - \mathbf{G})\mathrm{div}\mathbf{V} + 2[\dot{\mathbf{V}}\times\mathbf{\Omega}]. \end{aligned} \quad (8)$$

Таким образом, получена замкнутая система уравнений для компонент скорости, которая полностью описывает в линейном приближении динамику недиссипативных волновых процессов, происходящих на фоне произвольного равновесного состояния равномерно вращающейся сжимаемой жидкости (газа) с любым двухпараметрическим уравнением состояния.

Поскольку, как правило, уравнение состояния среды неизвестно, целесообразно представить несколько вариантов записи системы (8), позволяющих учесть влияние термодинамических свойств среды и характера фонового состояния на волновые процессы с помощью различных наборов эмпирически и/или теоретически определяемых параметров. Так, при использовании (8) достаточно знать равновесные пространственные распределения двух величин: c_0^2 и ρ_0. В то же время, после очевидных преобразований, (8) можно записать так, чтобы градиент фоновой температуры T_0 вошел явным образом:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{V}} - \mathrm{grad}(c_0^2\mathrm{div}\mathbf{V}) &= \mathrm{grad}(\mathbf{V}\cdot\mathbf{G}) + \\ &+ [(\gamma_0 - 1)\mathbf{G} - c_0^2\alpha_{p_0}\mathrm{grad}\,T_0]\mathrm{div}\mathbf{V} + 2[\dot{\mathbf{V}}\times\mathbf{\Omega}], \end{aligned} \quad (9)$$

где $\alpha_{p_0} = \alpha_p(p_0, \rho_0)$, $\gamma_0 = \gamma(p_0, \rho_0)$, $\alpha_p = -\rho^{-1}(\partial\rho/\partial T)_p$, $\gamma = C_p/C_V$.

С другой стороны, используя коллинеарность векторов $\mathrm{grad}\rho_0$, $\mathrm{grad}\,p_0$ и $\mathbf{G}$, можно представить $\mathrm{grad}\rho_0$ в виде $\mathrm{grad}\rho_0 = \dfrac{d\rho_0}{dp_0}\mathrm{grad}\,p_0 = \dfrac{d\rho_0}{dp_0}\rho_0\mathbf{G}$, где $\dfrac{d\rho_0}{dp_0}$ – полная производная, взятая в соответствии с зависимостью $\rho_0 = \rho_0(p_0)$ для фонового состояния, и получить из (8)

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{V}} - \mathrm{grad}(c_0^2\mathrm{div}\mathbf{V}) &= \mathrm{grad}(\mathbf{V}\cdot\mathbf{G}) + \\ &+ (\gamma_0^* - 1)\mathbf{G}\mathrm{div}\mathbf{V} + 2[\dot{\mathbf{V}}\times\mathbf{\Omega}], \end{aligned} \quad (10)$$

где, по определению, $\gamma_0^* = c_0^2\dfrac{d\rho_0}{dp_0}$ [7].

Легко проверить, что для любой двухпараметрической среды при пространственно-адиабатическом ($\mathrm{grad}\,s_0 = 0$) фоновом состоянии параметр γ_0^* равен единице, а при изотермическом – совпадает с $\gamma_0 = \gamma(p_0, \rho_0)$. Таким образом, для использования уравнения (10) при $\mathrm{grad}\,s_0 = 0$ достаточно знать пространственное распределение лишь для c_0^2, а при $\mathrm{grad}\,T_0 = 0$ – для c_0^2 и γ_0.

Отметим, что в уравнении (10) при $\mathrm{grad}\,T_0 = 0$ слагаемым $(\gamma_0^* - 1)\mathbf{G}\mathrm{div}\mathbf{V}$ (которое отсутствует для процессов на пространственно-адиабатическом фоне) нельзя пренебрегать, а для случаев, когда $\mathrm{grad}\,T_0 \neq 0$ и направлен противоположно вектору $\mathbf{G}$, параметр γ_0^* может в несколько раз превзойти γ_0. Наконец, от (10) легко перейти к уравнению

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{V}} - c_0^2\mathrm{grad}(\mathrm{div}\mathbf{V}) &= \mathrm{grad}(\mathbf{V}\cdot\mathbf{G}) + \\ &+ \left[\frac{d(\rho_0 c_0^2)}{dp_0} - 1\right]\mathbf{G}\mathrm{div}\mathbf{V} + 2[\dot{\mathbf{V}}\times\mathbf{\Omega}]. \end{aligned} \quad (11)$$

Уравнения (8)–(11) могут быть полезны для расчетов параметров волновых процессов в быстро вращающихся технических устройствах при

больших перепадах давления, температуры и плотности рабочей среды.

В качестве базового примера рассмотрим вращающийся вокруг вертикальной оси идеальный газ при изотермическом фоновом состоянии. Для этого случая $c_0^2 = \gamma_0 p_0/\rho_0 = \gamma_0 RT_0 = \text{const}$, $\gamma_0^* = \gamma_0 = \text{const}$ и непосредственно из (10) или (11) следует:

$$\ddot{\mathbf{V}} - c_0^2 \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{V} = \operatorname{grad}(\mathbf{V}\cdot\mathbf{G}) + (\gamma_0 - 1)\mathbf{G}\operatorname{div}\mathbf{V} + 2[\dot{\mathbf{V}}\times\mathbf{\Omega}]. \tag{12}$$

Введем связанные с системой Σ цилиндрические координаты r, φ, z таким образом, чтобы $\mathbf{\Omega} = (0, 0, \Omega)$, $\mathbf{g} = (0, 0, g_z)$. Тогда из (12) при $g_z = \text{const}$ для функций $V_r(r, \varphi, z, t)$, $V_\varphi(r, \varphi, z, t)$ и $V_z(r, \varphi, z, t)$ получится система уравнений:

$$\ddot{V}_r - c_0^2\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} = \left[\gamma_0\Omega^2 - \frac{c_0^2}{r^2} + \left(\frac{c_0^2}{r} + \gamma_0\Omega^2 r\right)\frac{\partial}{\partial r}\right]V_r + \left[\frac{c_0^2}{r}\frac{\partial^2}{\partial\varphi\partial r} + \left((\gamma_0 - 1)\Omega^2 - \frac{c_0^2}{r^2}\right)\frac{\partial}{\partial\varphi} + 2\Omega\frac{\partial}{\partial t}\right]V_\varphi + \left[c_0^2\frac{\partial^2}{\partial z\partial r} + (\gamma_0 - 1)\Omega^2 r\frac{\partial}{\partial z} + g_z\frac{\partial}{\partial r}\right]V_z, \tag{13a}$$

$$\ddot{V}_\varphi - \frac{c_0^2}{r^2}\frac{\partial^2 V_\varphi}{\partial\varphi^2} = \left[\frac{c_0^2}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\varphi} + \left(\frac{c_0^2}{r^2} + \Omega^2\right)\frac{\partial}{\partial\varphi} - 2\Omega\frac{\partial}{\partial t}\right]V_r + \frac{1}{r}\left[c_0^2\frac{\partial^2}{\partial z\partial\varphi} + g_z\frac{\partial}{\partial\varphi}\right]V_z, \tag{13b}$$

$$\ddot{V}_z - c_0^2\frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} = \left[c_0^2\frac{\partial^2}{\partial r\partial z} + \left(\frac{c_0^2}{r^2} + \Omega^2\right)r\frac{\partial}{\partial z} + (\gamma_0 - 1)g_z\left(\frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial r}\right)\right]V_r + \frac{1}{r}\left[c_0^2\frac{\partial^2}{\partial\varphi\partial z} + (\gamma_0 - 1)g_z\frac{\partial}{\partial\varphi}\right]V_\varphi + \gamma_0 g_z\frac{\partial V_z}{\partial z}. \tag{13c}$$

Здесь, в отличие от невращающегося газа, невозможны чисто радиальные волны, т. е. колебания, для которых $V_z \equiv 0$, $V_\varphi \equiv 0$, $V_r = V_r(r, t) \neq 0$. Однако, при $g = 0$, $\Omega \neq 0$ существует независимая ветвь колебаний, которые можно назвать обобщенными радиальными. Для них $V_z \equiv 0$, $V_r = V_r(r, t) \neq 0$, $V_\varphi = V_\varphi(r, t) \neq 0$, а при $\Omega \longrightarrow 0$ они переходят в чисто радиальные колебания. Для обобщенных радиальных волн из (13) можно получить систему для $V_r(r, t)$ и $V_\varphi(r, t)$:

$$\ddot{V}_r - c_0^2\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} = \left[\gamma_0\Omega^2 - \frac{c_0^2}{r^2} + \left(\frac{c_0^2}{r} + \gamma_0\Omega^2 r\right)\frac{\partial}{\partial r}\right]V_r + 2\Omega\dot{V}_\varphi, \tag{14a}$$

$$\ddot{V}_\varphi = -2\Omega\dot{V}_r, \tag{14b}$$

а затем и уравнение для $V_r(r, t)$:

$$\ddot{V}_r - c_0^2\frac{\partial^2 \dot{V}_r}{\partial r^2} = \left[(\gamma_0 - 4)\Omega^2 - \frac{c_0^2}{r^2} + \left(\frac{c_0^2}{r} + \gamma_0\Omega^2 r\right)\frac{\partial}{\partial r}\right]\dot{V}_r. \tag{15}$$

2. ОБОБЩЕННЫЕ РАДИАЛЬНЫЕ МОДЫ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА В ЦИЛИНДРЕ

Рассмотрим стоячие гармонические обобщенные радиальные колебания – обобщенные радиальные моды – в находящемся внутри цилиндрического сосуда идеальном газе при его установившемся вращении вместе со стенками сосуда вокруг оси симметрии цилиндра. Для таких колебаний самые общие выражения для V_r и V_φ имеют вид:

$$V_r(r, t) = V_r^A(r)\sin(\omega t + \alpha), \quad V_\varphi(r, t) = V_\varphi^A(r)\sin(\omega t + \beta), \tag{16}$$

где ω – частота колебаний, измеренная во вращающейся системе отсчета Σ. Однако, поскольку из соотношений (16) и (14b) следует, что

$$\omega V_\varphi^A(r) = 2\Omega V_r^A(r), \quad \omega V_\varphi(r, t) = 2\Omega V_r^A(r)\cos(\omega t + \alpha), \tag{17}$$

то компоненты V_r и V_φ обобщенных радиальных мод жестко связаны по амплитуде и фазе между собой. При этом амплитуда $V_r^A(r) \equiv W(r)$, согласно (15) и (16), удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 W}{dr^2} + \left(\gamma_0\theta^2 r + \frac{1}{r}\right)\frac{dW}{dr} + \left[k^2 + (\gamma_0 - 4)\theta^2 - \frac{1}{r^2}\right]W = 0, \tag{18}$$

где $k = \omega/c_0$, $\theta = \Omega/c_0$. При жесткой цилиндрической стенке радиуса R граничные условия имеют вид:

$$W(0) = 0, \quad W(R) = 0. \tag{19}$$

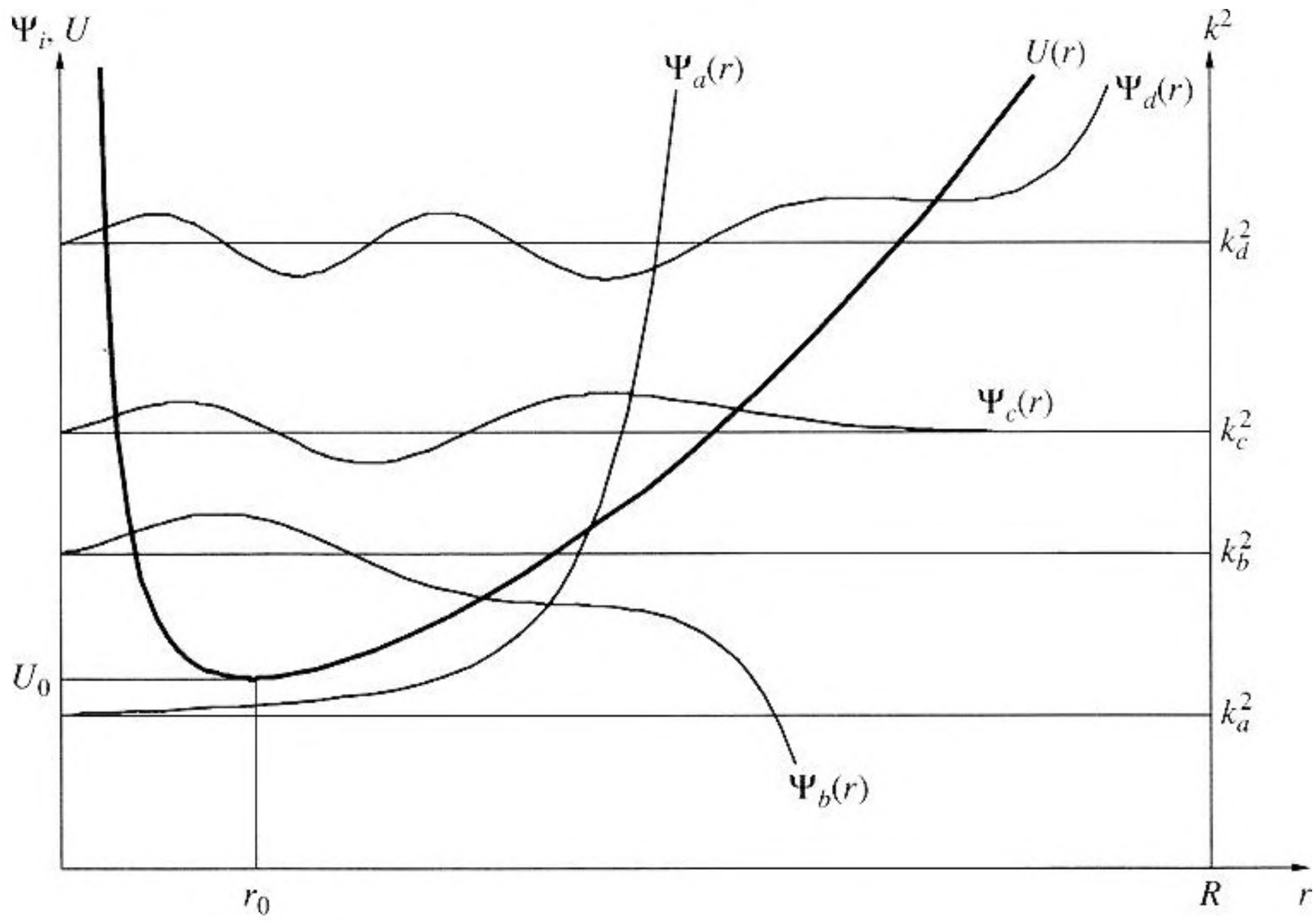

Рис. 1. Функция $U(r)$ и пробные решения $\Psi(r)$. Уровни значений k^2 служат осями абсцисс для графиков $\Psi(r)$.

Согласно (6), возмущения давления $\tilde{p}(r, t) = p(r, t) - p_0(r)$ и плотности $\tilde{\rho}(r, t) = \rho(r, t) - \rho_0(r)$ рассматриваемых мод также выражаются через $W(r)$:

$$\tilde{p}(r, t) = \tilde{p}_A(r)\cos\omega t,$$
$$\tilde{p}_A(r) = \frac{\gamma_0 p_0(r)}{\omega}\left(\frac{W}{r} + \frac{dW}{dr} + \frac{\Omega^2 r}{c_0^2}W\right), \tag{20}$$

$$\tilde{\rho}(r, t) = \tilde{\rho}_A(r)\cos\omega t,$$
$$\tilde{\rho}_A(r) = \frac{\rho_0(r)}{\omega}\left(\frac{W}{r} + \frac{dW}{dr} + \frac{\gamma_0\Omega^2 r}{c_0^2}W\right), \tag{21}$$

где, в силу (4), равновесные распределения плотности и давления:

$$\rho_0(r) = \rho_0(0)\exp[\gamma_0\Omega^2 r^2/(2c_0^2)],$$
$$p_0(r) = c_0^2\rho_0(r)/\gamma_0. \tag{22}$$

Отметим, что из (18)–(22) при $\Omega = 0$ получаются, как и должно быть, известные результаты для радиальных мод в невращающемся цилиндре [8]:

$$V_{rn}^{A(0)} = A\omega_n^{(0)}J_1(k_n^{(0)}r),$$
$$\tilde{\rho}_{An}^{(0)} = A\rho_0 k_n^{(0)}J_0(k_n^{(0)}r),\ \ \tilde{p}_{An}^{(0)} = A\gamma_0 p_0 k_n^{(0)}J_0(k_n^{(0)}r), \tag{23}$$

где $J_0(\zeta)$ и $J_1(\zeta)$ – функции Бесселя, $\omega_n^{(0)} = c_0 k_n^{(0)} = c_0\zeta_n/R$, ζ_n – корни уравнения $J_1(\zeta) = 0$, A – нормировочная постоянная.

2.1. Качественный анализ обобщенных радиальных мод

Подстановкой $W(r) = \frac{1}{\sqrt{r}}\Psi(r)\exp(-\gamma_0\theta^2 r^2/4)$ соотношения (18), (19) приводятся к виду:

$$\Psi'' = [U(r) - k^2]\Psi, \tag{24}$$

$$\lim_{r\to 0}(\Psi(r)/\sqrt{r}) = 0, \quad \Psi(R) = 0, \tag{25}$$

где $\Psi'' = d^2\Psi/dr^2$, $U(r) \equiv 4\theta^2 + \gamma_0^2\theta^4 r^2/4 + 3r^{-2}/4$. При $r = r_0 = \sqrt[4]{3}/(\theta\sqrt{\gamma_0})$ функция $U(r)$ имеет минимум $U_0 = \theta^2(4 + \gamma_0\sqrt{3}/2)$ (рис. 1).

Для наглядности на рис. 1 графики функций $\Psi_i(r)$, соответствующие разным значениям k^2, "разнесены" по вертикали, т.е. для каждой кривой $\Psi_i(r)$ ось абсцисс находится на высоте соответствующего значения k^2, указанного на правой вертикальной оси. Этот же "принцип разнесения графиков по вертикали" использован на рис. 2, 4 и 5.

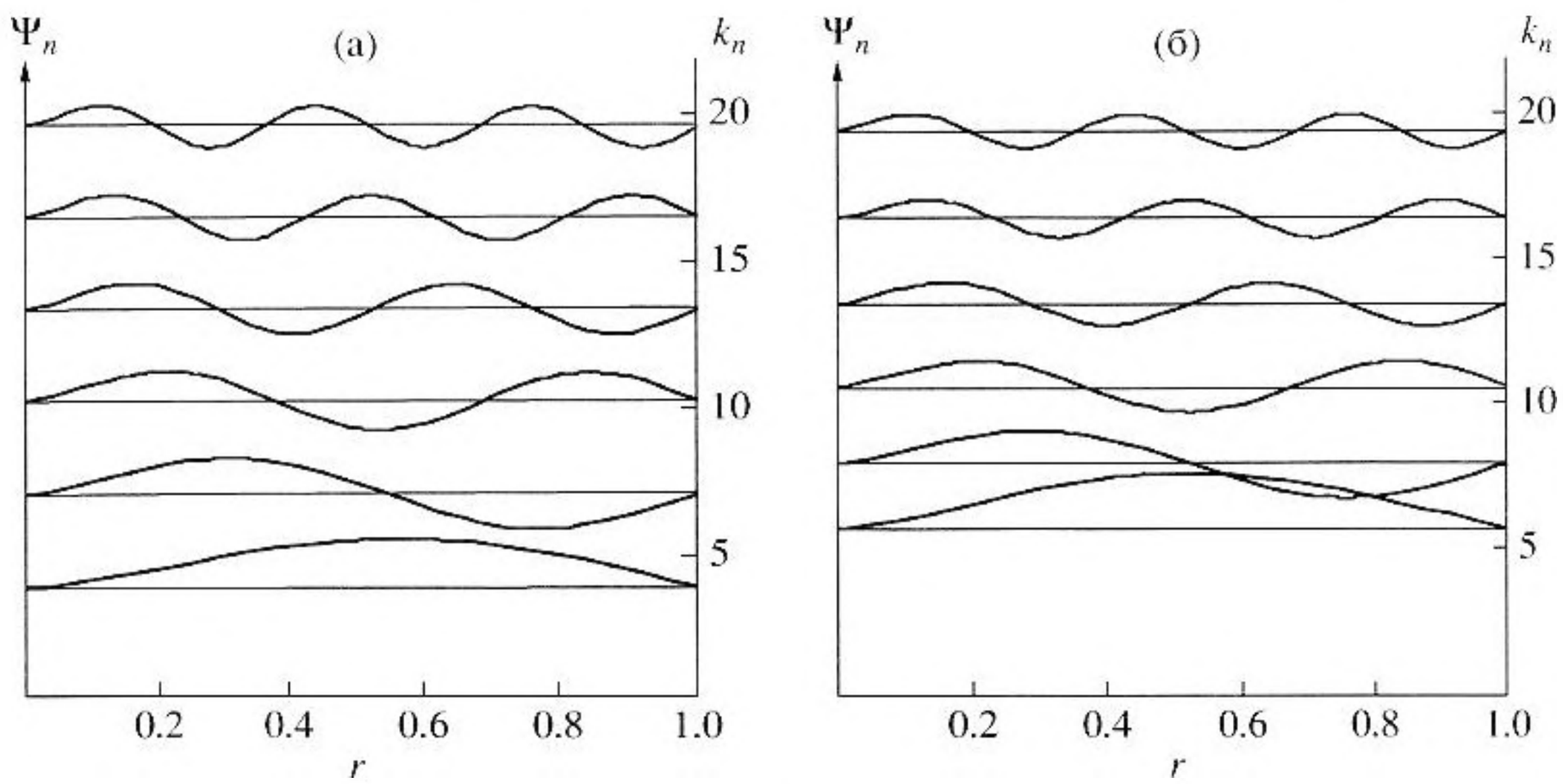

Рис. 2. Значения k_n и решения $\Psi_n(r)$ для радиальных мод: (а) – при $\Omega = 0$, (б) – при $\Omega \neq 0$. Уровни значений k_n служат осями абсцисс для графиков $\Psi_n(r)$.

Из уравнения (24) следует, что при $k^2 < U_0$ знаки Ψ'' и Ψ одинаковы на всем отрезке $0 \le r \le R$, и ненулевое решение $\Psi(r)$ не может удовлетворять обоим граничным условиям (25) (кривая $\Psi_a(r)$). Таким образом, для $k^2 < U_0$, т.е. для $\omega < 2\Omega\sqrt{1 + \gamma_0\sqrt{3}/8}$, при любом радиусе цилиндра радиальные моды заведомо отсутствуют. Только при $k^2 > U_0$ возникает область, в которой знаки Ψ'' и Ψ противоположны, из-за чего $\Psi(r)$ носит осциллирующий характер (кривые $\Psi_b(r)$, $\Psi_c(r)$, $\Psi_d(r)$), и появляется возможность удовлетворить обоим граничным условиям (что реализовано в случае $\Psi_c(r)$). Следовательно, в отличие от невращающегося цилиндра, для $\Omega \neq 0$ резонансные частоты ω_n при любом заданном номере моды n не будут стремиться к нулю, когда $R \longrightarrow \infty$. Характер спектра частот будет таким, как если бы внутри цилиндра появилась стенка, подобная правой ветви функции $U(r)$ – "эффективная стенка". Она возникает при $r_0 < R$ (рис. 1), т.е. при таких скоростях вращения, когда окружные скорости (относительно невращающейся системы отсчета) элементов среды у стенки превосходят $c_0\sqrt[4]{3}/(\sqrt{\gamma_0})$.

Подбирая значения параметра k, при которых получаются решения типа $\Psi_c(r)$ (рис. 1), можно найти положение резонансов для любых R и Ω. Результаты подбора при $R = 1$ м и $n = 1, 2, \ldots, 6$ изображены на рис. 2а для $\Omega = 0$, а на рис. 2б – для $\Omega = 850$ рад/с. Видно, что вращение приводит к увеличению всех резонансных частот, а величина сдвига $\Delta\omega_n = c_0(k_n(\Omega) - k_n(0))$ при заданном Ω уменьшается по мере роста номера n.

Наконец, используя формальное совпадение (24) с радиальным уравнением Шредингера для трехмерного изотропного гармонического осциллятора [9], легко показать, что при $R \longrightarrow \infty$ выполняется:

$$\omega_n \longrightarrow \omega_n^\infty = 2\Omega\sqrt{1 + \gamma_0 n/2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \quad (26)$$

2.2. Точное решение для обобщенных радиальных мод

Заменой $\xi = r/R$, $W(r) = w(\xi)$, соотношения (18), (19) приводятся к виду:

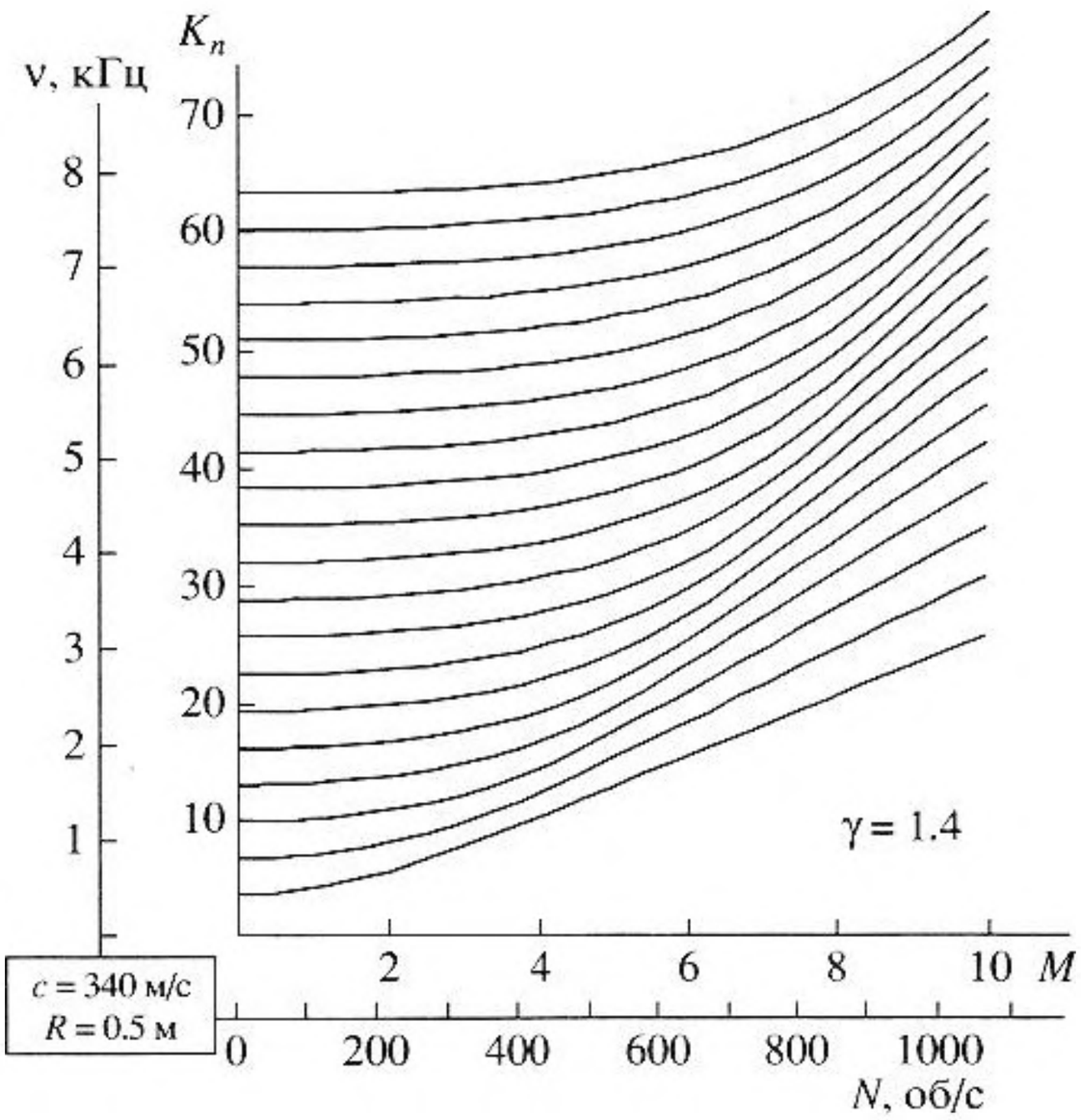

Рис. 3. Частоты обобщенных радиальных мод.

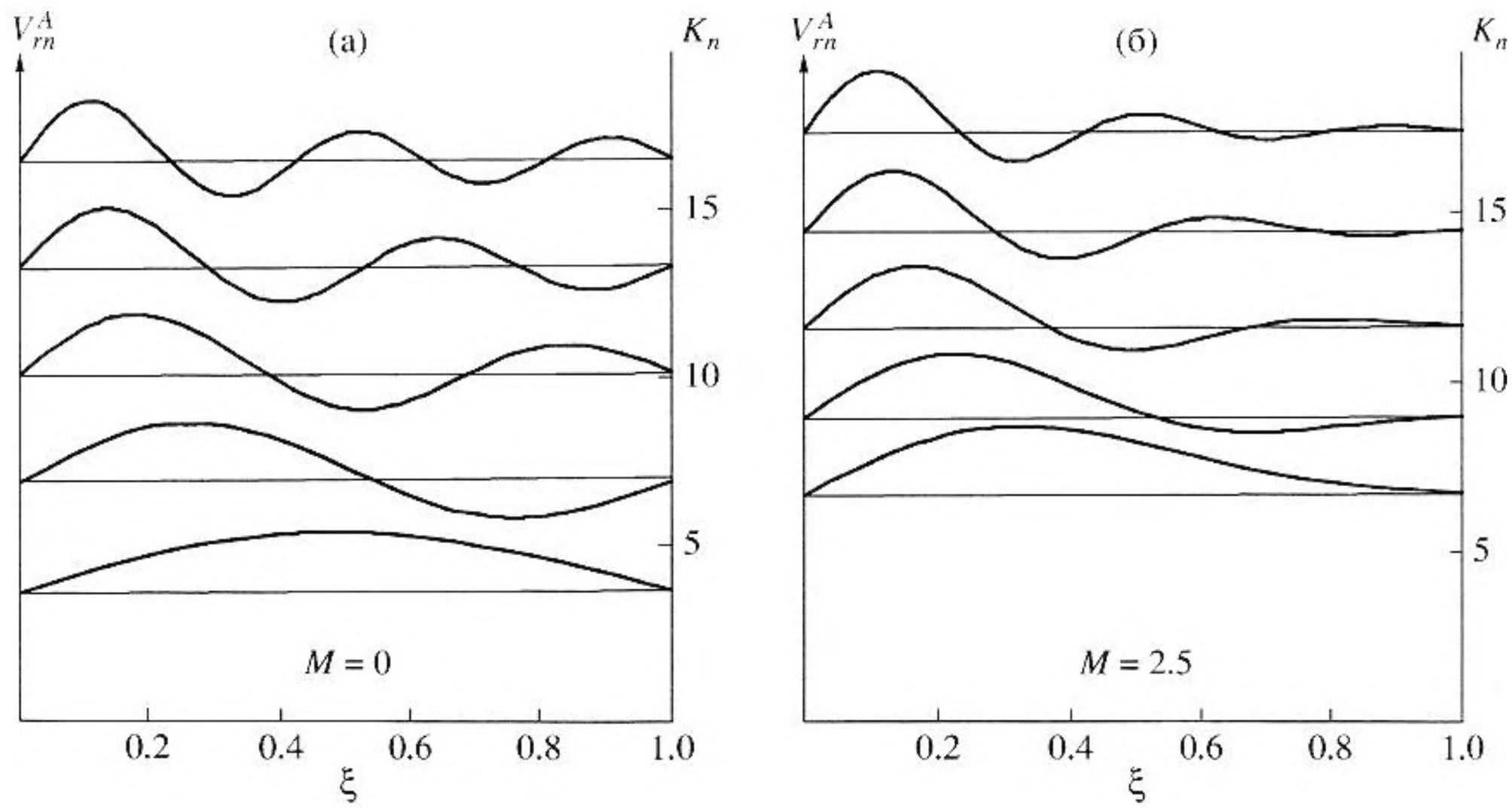

Рис. 4. Распределение амплитуд скорости колебаний. Уровни значений K_n служат осями абсцисс для графиков $V_{rn}^A(\xi)$.

$$\frac{d^2w}{d\xi^2} + \left(\gamma_0 M^2\xi + \frac{1}{\xi}\right)\frac{dw}{d\xi} + \left[K^2 + (\gamma_0 - 4_0)M^2 - \frac{1}{\xi^2}\right]w = 0, \tag{27}$$

$$w(0) = 0, \quad w(1) = 0, \tag{28}$$

где $M = \Omega R/c_0$, $K = \omega R/c_0$. Отсюда следует, что множество решений исходной задачи является, по существу, однопараметрическим – зависящим не от Ω и R по отдельности, а от их произведения ΩR.

Точное решение уравнения (27), удовлетворяющее граничному условию на оси $w(0) = 0$, можно выразить [10] через вырожденную гипергеометрическую функцию ${}_1F_1(\alpha, \beta, x) = 1 + \frac{\alpha}{\beta}\frac{x}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta(\beta+1)}\frac{x^2}{2!} + \ldots$:

$$w(\xi) = \mathrm{const}\xi\,{}_1F_1(\alpha, 2, x) = \mathrm{const}\xi\left\{1 + \frac{\alpha}{2!}\frac{x}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{3!}\frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+m-1)}{(m+1)!}\frac{x^m}{m!} + \ldots\right\}, \tag{29}$$

где $\alpha = 1 - 2/\gamma_0 + K^2/(2\gamma_0 M^2)$, $x = -\gamma_0 M^2\xi^2/2$. Хотя при $\Omega = 0$ аргумент α обращается в бесконечность, а $x = 0$, и непосредственное использование выражения (29) невозможно, приведенное решение при $\Omega = 0$ особенностей не имеет. Действительно, записывая (29) в виде

$$w(\xi) = \mathrm{const}\xi\left\{1 + \frac{1}{2!}\frac{\alpha x}{1!} + \frac{(1+\alpha^{-1})}{3!}\frac{(\alpha x)^2}{2!} + \ldots + \frac{(1+\alpha^{-1})\ldots(1+(m-1)\alpha^{-1})}{(m+1)!}\frac{(\alpha x)^m}{m!} + \ldots\right\} \tag{30}$$

и замечая, что $\alpha^{-1} = \frac{2\gamma_0 M^2}{K^2 - (4 - 2\gamma_0)M^2}$, $\alpha x = -\frac{K^2 - (4 - 2\gamma_0)M^2}{4}\xi^2$, легко обнаружить, что при $M = 0$ выражение (30) особенностей не имеет, совпадая, как и должно быть, с решением (23) для невращающегося газа

$$w_0(\xi) = \mathrm{const}\xi\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-K^2\xi^2/4)^m}{m!(m+1)!} = \mathrm{const}\frac{2}{K}J_1(K\xi) = \mathrm{const}\frac{2}{kR}J_1(kr).$$

Для полного соответствия с результатами (23) достаточно в (29) принять $\mathrm{const} = A\omega^2R/(2c_0)$. При такой нормировке решение $V_r^A(r)$, для которого вы-

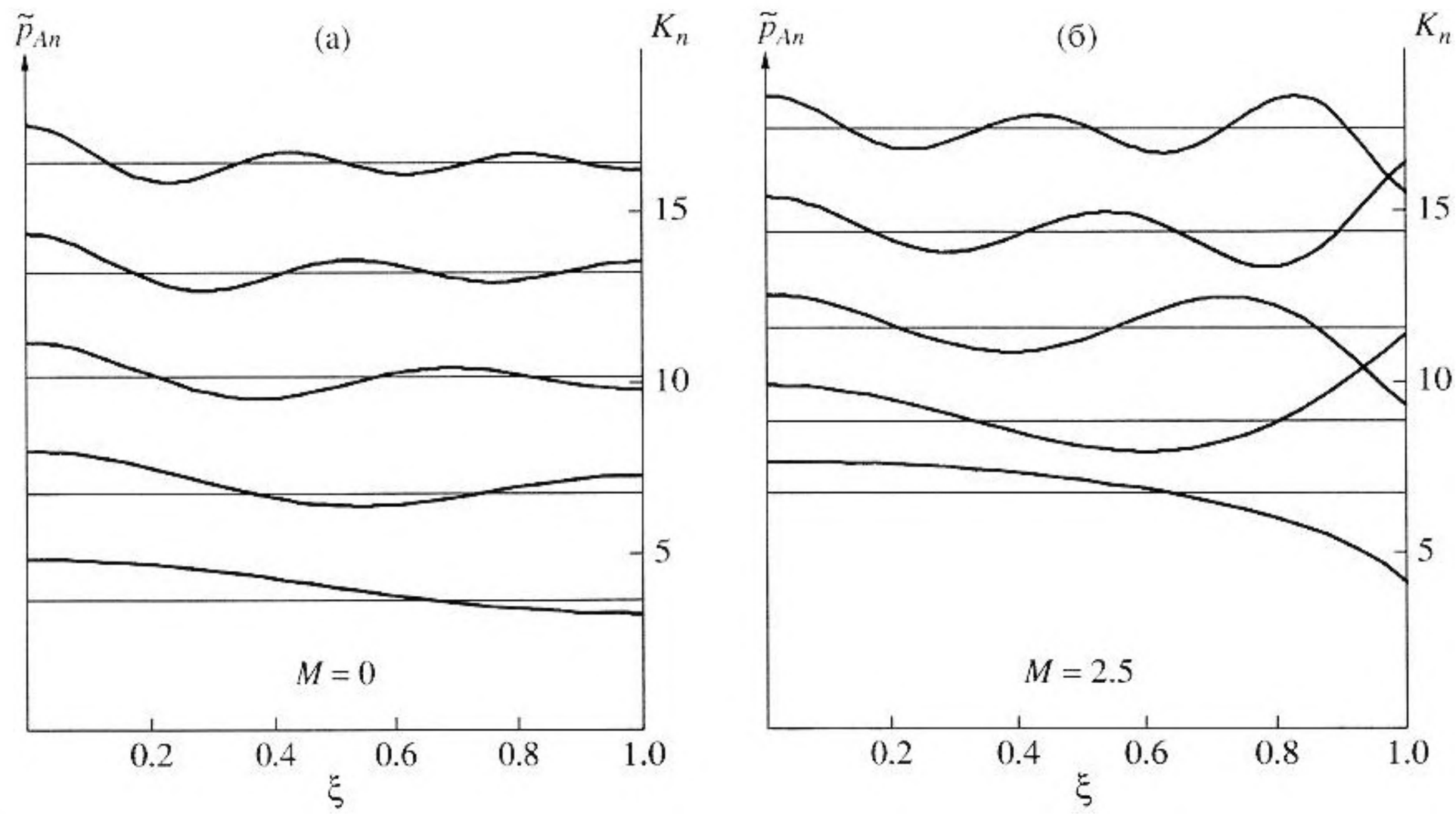

Рис. 5. Распределение амплитуд звукового давления. Уровни значений K_n служат осями абсцисс для графиков $\tilde{p}_{An}(\xi)$.

полнено граничное условие на оси вращения $V_r^A(0) = 0$, имеет вид:

$$V_r^A(r) = \frac{A\omega^2 r}{2c_0}\,{}_1F_1(\alpha, 2, x),$$
$$\alpha = 1 - \frac{2}{\gamma_0} + \frac{\omega^2}{2\gamma_0\Omega^2}, \quad x = -\frac{\gamma_0\Omega^2 r^2}{2c_0^2}. \tag{31}$$

2.3. Спектр резонансных частот обобщенных радиальных мод

Из (29), с учетом граничного условия на стенке цилиндра $w(1) = 0$, следует:

$${}_1F_1[1 - 2/\gamma_0 + K^2/(2\gamma_0 M^2), 2, -\gamma_0 M^2/2] = 0. \tag{32}$$

Уравнение (32) содержит в неявном виде зависимость K от M, и тем самым набор резонансных частот ω_n обобщенных радиальных мод для любых Ω и R. Для поиска корней уравнения (32) численными методами необходимо указывать границы интервалов, внутри которых заключены корни, для каждого номера моды n. Для этого использовалось отражающее общий характер зависимости $K(M)$ выражение $\tilde{K}_n = \sqrt[4]{K_n^4(0) + (4 + 2\gamma_0 n)^2 M^4}$ (где $K_n(0)$ – корни уравнения $J_1(K) = 0$), подобранное на основе качественного анализа, проведенного в п. 2.1.

По просчитанным для двадцати мод ($n = 1, 2, \ldots, 20$) в интервале чисел M от 0 до 10 с шагом 0.1 значениям $K_n(M)$ построены интерполяционные кривые (рис. 3). Они содержат информацию о зависимости резонансных частот $\nu_n = \omega_n/(2\pi)$ рассматриваемых мод от частоты вращения $N = \Omega/(2\pi)$ для цилиндра любого радиуса R. Пересчет сводится к изменению масштабов на обеих осях диаграммы в соответствии с формулами $K = 2\pi\nu R/c_0$, $M = 2\pi NR/c_0$. Для рис. 3 взяты значения: $c_0 = 340$ м/с, $\gamma_0 = 1.4$, $R = 0.5$ м.

Результаты численных расчетов полностью согласуются с асимптотиками: $K_n^2(M^2) \longrightarrow (4 + 2\gamma_0 n)M^2$ при $M \longrightarrow \infty$ (см. (27)), и $K_n^2(M^2) \longrightarrow K_n^2(0) + 4M^2$ при $M \longrightarrow 0$; последняя вытекает из свойств гипергеометрических функций [10].

2.4. Влияние вращения на распределение возмущений давления и скорости

Располагая значениями $K_n(M)$, а также точным решением $w(\xi)$ (31), можно найти зависимости для амплитуд величин V_r, V_φ, $\tilde{p}$, $\tilde{\rho}$ как функций $\xi = r/R$. Графики $V_{rn}^A(\xi)$ и $\tilde{p}_{An}(\xi)$ для пяти мод ($n = 1, 2, \ldots, 5$) при $M = 0$ и $M = 2.5$ представлены на рис. 4 и 5.

Видно (рис. 4), что распределение амплитуд скорости возмущений $V_{rn}^A(\xi)$ существенно изменяется с ростом частоты вращения. Так, при $M = 2.5$ амплитуда $V_{rn}^A(\xi)$ (и вместе с ней амплитуда смещений) убывает к периферии цилиндра значительно быстрее, чем при $M = 0$. В то же время, ам-

плитуда возмущений давления $\tilde{p}_{An}(\xi)$ (рис. 5) при достаточно больших скоростях вращения с ростом расстояния от оси существенно увеличивается.

При построении графиков на рис. 4 и 5 использовались соотношения (20), (22), (23), (31). Графики $V^A_{rn}(\xi)$ нормировались на постоянство параметра $A\omega$ (масштаба скорости колебаний), а $\tilde{p}_{An}(\xi)$ – на постоянство $A\omega$ и $p_0(0)$ (равновесного давления на оси). Отметим, что согласно (17) угловая компонента скорости $V^A_{\varphi n}(\xi) = 2\Omega V^A_{rn}(\xi)/\omega$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представлены варианты замкнутой системы уравнений для компонент скорости, описывающей в линейном приближении волновые процессы, носящие характер адиабатических отклонений от равновесного состояния равномерно вращающейся сжимаемой жидкости (газа) с любым двухпараметрическим уравнением состояния.

Для обобщенных радиальных мод вращающегося идеального газа в цилиндре:

– получены точные аналитические решения для возмущений скорости и давления как функций расстояния от оси, зависящие параметрически от радиуса цилиндра и скорости вращения газа;

– найдены численные значения резонансных частот обобщенных радиальных мод в широком интервале значений радиуса цилиндра и угловой скорости;

– сделан вывод о существовании и установлены количественные характеристики эффекта сдвига частот обобщенных радиальных мод, обусловленного вращением.

Результаты представляются полезными как для теории волновых процессов во вращающихся сжимаемых средах, так и для применения при расчетах акустических полей в технических устройствах, вращающихся с большими угловыми скоростями.

Авторы выражают благодарность Ю.Н. Макову за внимание к работе и рекомендации, которые носили конструктивный характер.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Физика океана: в 2 т. М.: Наука, 1978. Т. 2. Гидродинамика океана / Под ред. В.М. Каменковича и А.С. Монина. 1978. 323 с.
2. *Eckart C.* Hydrodynamics of Oceans and Atmospheres. London: Pergamon Press, 1960. 290 p.; *Эккарт К.* Гидродинамика океана и атмосферы. М.: ИЛ, 1963. 327 с.
3. *Greenspan H.P.* The Theory of Rotating Fluids. Cambridge Univ. Press, 1968; *Гринспен Х.* Теория вращающихся жидкостей. Л.: Гидрометеоиздат, 1975.
4. *Kurosaka M., Caruthers J.E.* "Coriolis Resonance" within a Rotating Duct // AIAA J. 1982. V. 20. № 8. P. 1148–1150.
5. *Хитрик В.Л.* О распространении звука во вращающемся межлопаточном канале турбомашины // Акуст. журн. 1997. Т. 43. № 1. С. 110–115.
6. *Ерофеев В.И., Солдатов И.Н.* Акустические волны во вращающемся идеальном газе // Акуст. журн. 2000. Т. 46. № 5. С. 644–649.
7. *Сокольский А.А., Садчиков В.И.* Препринт-11 ОИЭЯИ НАН Беларуси. Минск, 2003. 24 с.
8. *Исакович М.А.* Общая акустика. М.: Наука, 1973. С. 269.
9. *Галицкий В.М., Карнаков Б.М., Коган В.И.* Задачи по квантовой механике. М.: Наука, 1981. С. 223.
10. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. М.: Наука, 1979. С. 321–325.

Generalized Radial Oscillation Modes of an Acoustical Medium Rotating in a Cylinder

A. A. Sokol'skii and V. I. Sadchikov

Belarusian State University, pr. Nezavisimosti 4, Minsk, 220030 Belarus

e-mail: sokolan@tut.by

Sosny Joint Institute of Power and Nuclear Research, National Academy of Sciences of Belarus, ul. Akademika A.K. Krasina 99, Minsk, 220199 Belarus

e-mail: jinpr@sosny.bas-net.by

Received March 10, 2006

Abstract—Variants of closed wave equations for velocity perturbations in a rotating compressible medium (liquid or gas) are suggested. Effects of both nonideal form of the equation of state of the medium and the behavior of the medium in the unperturbed state are taken into account in the equations. In the case of an ideal gas at an isothermal background state, these equations are solved exactly in analytic form, and the solutions describe the generalized radial oscillation modes. The inference is made about the existence of a shift of resonance frequencies of these modes because of the rotation of the medium. This shift is calculated as a function of the velocity of gas rotation and the radius of the cylinder.