АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2008, том 54, № 1, с. 18–19

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК 534.26

О СВОЙСТВАХ КРУГОВЫХ И СПИРАЛЬНО-ВИНТОВЫХ ВОЛН ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ВОЛНОВОДА

© 2008 г. В. В. Тютекин
Акустический институт им. Н.Н. Андреева РАН
E-mail: Tyutekin@akin.ru

Поступила в редакцию 9.01.07 г.

PACS: 43.20.Mv, 43.35.Cg, 46.40.Cd

Круговые и спирально-винтовые нормальные волны цилиндрических волноводов были рассмотрены в работе автора [1]. Настоящее сообщение является дополнением к этой работе, устанавливающим область физически возможного существования нормальных волн подобного типа.

Звуковое давление в таких волнах было представлено в следующем виде

$$p(r,\theta,z) = p(r)\exp(ikz \pm i\nu\theta), \qquad (1)$$

где $p(r)$ удовлетворяет уравнению Бесселя, частное решение которого имеет вид

$$p_\nu(r) = a_\nu J_\nu(qr). \qquad (2)$$

Здесь $q = \sqrt{k_0^2 - k^2}$, k_0 – волновое число акустической среды, a_ν – произвольный коэффициент.

В [1] предполагалось, что величина кругового волнового числа ν удовлетворяет условию $\nu \geq 0$. Однако радиальная колебательная скорость

$$(u_r)_\nu = -\frac{1}{\rho_0\omega}\frac{dp_\nu(r)}{dr} \qquad (3)$$

на оси волновода ($r = 0$) остается конечной (что является условием физического существования нормальной волны) не при всех указанных значениях ν.

Используя выражения (2) и (3), эту скорость можно представить в виде

$$(u_r)_\nu = -\frac{q_\nu}{\rho_0\omega}\left[qJ_{\nu+1}(qr) - \frac{\nu}{r}J_\nu(qr)\right]. \qquad (4)$$

Поскольку при $r \longrightarrow 0$, функция $J_\nu(qr) \sim (qr)^\nu$ [2], то определяющим членом в выражении (4) будет

$$(u_r)_\nu \sim \nu r^{\nu-1}, \qquad (5)$$

откуда следует, что колебательная скорость на оси волновода будет конечной только при $\nu = 0$ и $\nu \geq 1$.

Первое значение соответствует известным осесимметричным нормальным волнам. Значения $\nu = 1$ должны играть роль критической частоты для круговых и винтовых волн, описанных в [1]. Эти волны были введены соотношениями $k_k = \dfrac{\nu}{a}$ – волновое число круговых волн и $k_h = \sqrt{k^2 + k_k^2}$ – волновое число винтовых волн (a – радиус волновода). Связь между ними задается соотношениями $k_k = k_h\sin\alpha$ и $k = k_h\cos\alpha$, где α – угол между волновым вектором $\bar{k}_h$ и осью z. В дальнейшем изложении α является углом “выхода” волны на поверхность волновода.

Введя безразмерную частоту $Y = k_0a$ и $z = \sqrt{Y^2 - \nu^2\mathrm{ctg}^2\alpha}$, дисперсионные уравнения для нормальных волн целесообразно записать в виде

– для граничного условия Дирихле

$$J_\nu\sqrt{Y^2 - \nu^2\mathrm{ctg}^2\alpha} = 0; \qquad (6)$$

– для граничного условия Неймана

$$zJ_{\nu+1}(z) - \nu J_\nu(z) = 0. \qquad (7)$$

Здесь неизвестной величиной является $\nu = k_ka$ в зависимости от Y; угол α является свободным параметром [1]. Отметим, что при таком подходе круговую волну можно рассматривать в качестве винтовой волны для $\alpha = 90°$. Наиболее представительной величиной в рассматриваемой задаче является безразмерная фазовая скорость винтовых волн $C = \dfrac{c_h}{c_0}$, которую можно выразить формулой

$$C = \frac{Y\sin\alpha}{\nu}. \qquad (8)$$

Критические частоты винтовых волн Y_{cr} ($\nu = 1$) в соответствии с формулами (6) и (7) должны определяться уравнениями

$$J_1\sqrt{Y_{\mathrm{cr}}^2 - \mathrm{ctg}^2\alpha} = 0, \qquad (9)$$

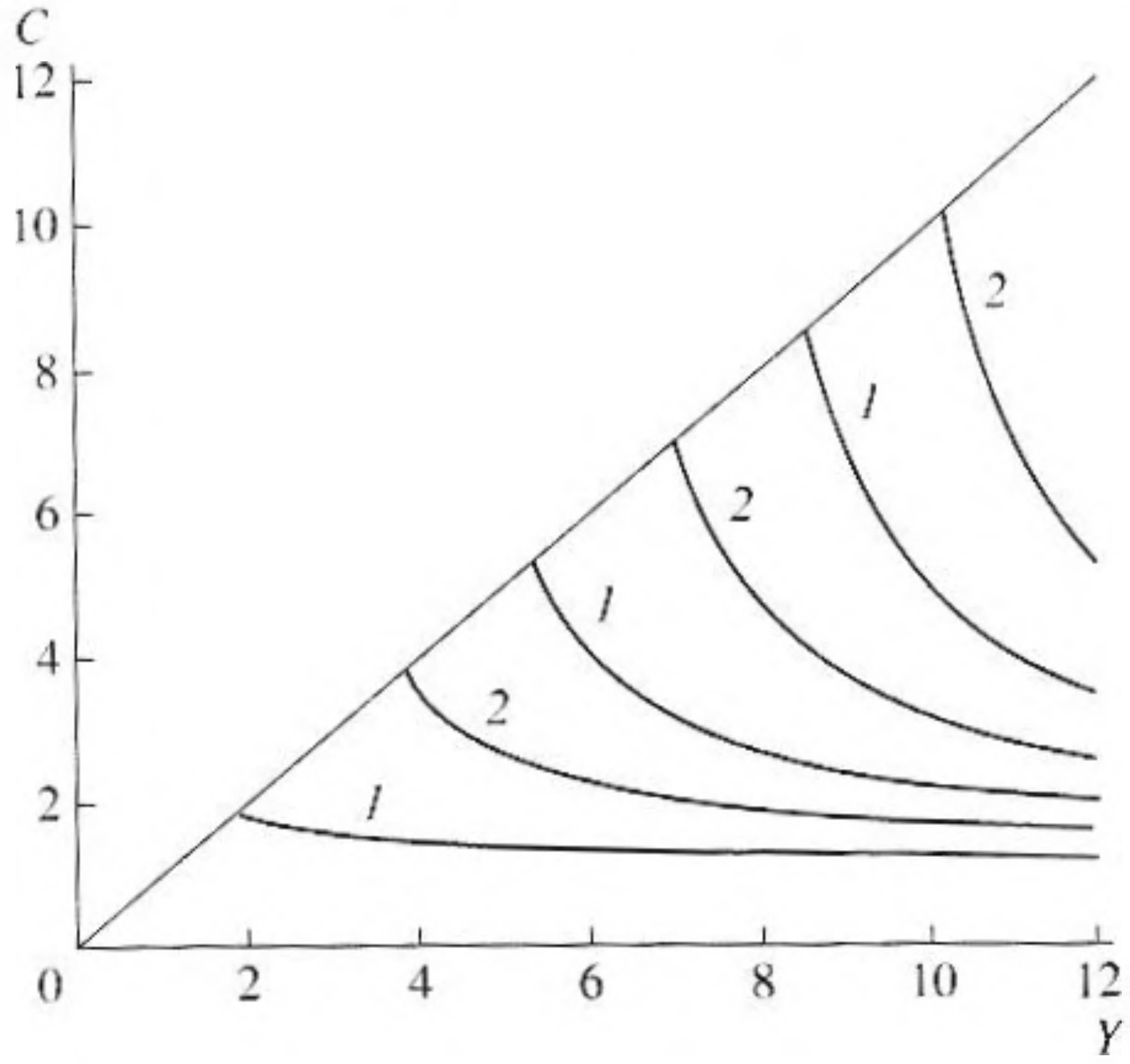

Рис. 1. Фазовые скорости круговых нормальных волн ($\alpha = 90°$) в зависимости от безразмерной частоты. *1* – для граничного условия Неймана, *2* – для граничного условия Дирихле.

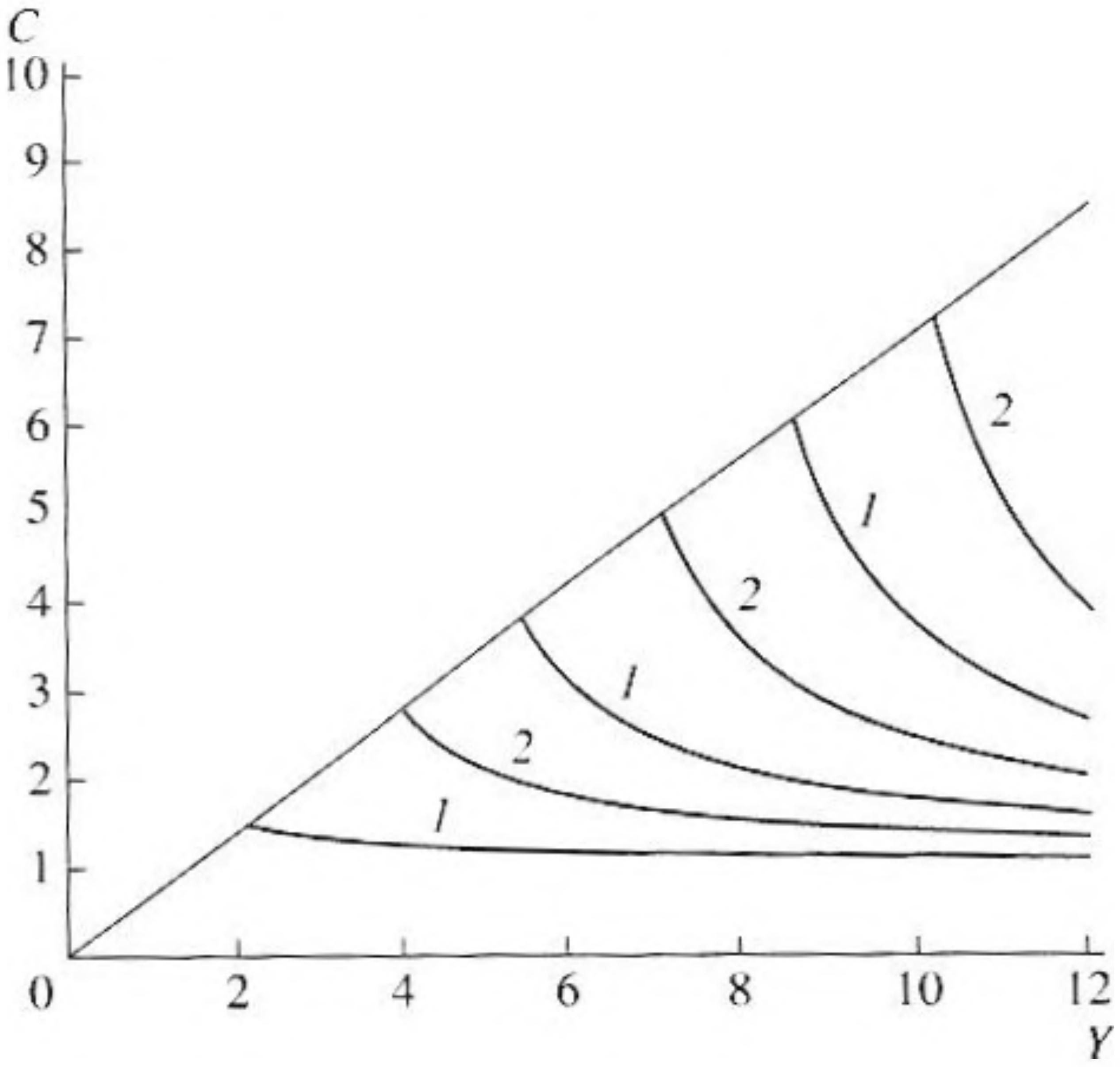

Рис. 2. То же, что на рис. 1, но для винтовых нормальных волн с $\alpha = 45°$. Обозначения те же.

$$\sqrt{Y_{\text{cr}}^2 - \text{ctg}^2\alpha}J_2(\sqrt{Y_{\text{cr}}^2 - \text{ctg}^2\alpha}) - \\ - J_1(\sqrt{Y_{\text{cr}}^2 - \text{ctg}^2\alpha}) = 0. \tag{10}$$

Уравнение (9) имеет решение

$$Y_{\text{cr}} = \sqrt{\beta_{1n}^2 + \text{ctg}^2\alpha}, \tag{11}$$

где β_{1n} – n-й корень функции Бесселя $J_1(x)$.

При этом из формулы (8) значение

$$C_{\text{cr}} = Y_{\text{cr}}\sin\alpha \tag{12}$$

Из формулы (12) следует, что в координатной плоскости (C, Y) пары значений C_{cr}, Y_{cr} лежат на прямой

$$C = Y\sin\alpha. \tag{12'}$$

Это же относится и к решению уравнения (10).

Решения уравнений (6) и (7) в виде зависимости $C(Y)$ представлены в качестве примера на рис. 1 и 2 для углов $\alpha = 90°$ (круговые волны) и $\alpha = 45°$ (пример винтовой волны), соответственно. Все кривые исходят из точек (11) и (12), лежащих на прямых (12'); при $Y \longrightarrow \infty$, $C \longrightarrow 1$, т.е. фазовая скорость всех винтовых волн стремится к скорости звука в среде, как и у других его нормальных волн.

В заключение отметим, что условие $\nu = k_k a \geq 1$, или $2\pi a \geq \lambda_k$ означает, что для существования винтовых волн необходимо, чтобы по круговой границе волновода укладывалась хотя бы одна такая волна.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тютекин В.В.* Круговые и спирально-винтовые нормальные волны цилиндрического волновода. Спиральные волны в свободном пространстве // Акуст. журн. 2006. Т. 52. № 4. С. 549–555.
2. Справочник по специальным функциям. М. "Наука", 1979. С. 830.

Specific Features of Quasi-Rayleigh Waves Caused by a Two-Component Impedance Load

V. V. Tyutekin

Andreev Acoustics Institute, Russian Academy of Sciences, ul. Shvernika 4, Moscow, 117036 Russia

e-mail: Tyutekin@akin.ru