

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ
ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК 517.934, 534.26

О ВЛИЯНИИ ИМПЕДАНСА НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН
СОСКАЛЬЗЫВАНИЯ

© 2008 г. И. В. Андронов

Санкт-Петербургский государственный университет 198504 Петродворец, ул. Ульяновская 1
e-mail: iva—@list.ru

Поступила в редакцию 7.11.06 г.

Рассматриваются волны соскальзывания на цилиндрической поверхности с импедансным условием. Исследуется влияние импеданса. Выявлены критические значения импеданса, при которых происходит вырождение. Исследовано прохождение волн соскальзывания через точку вырождения.

PACS: 43.20.Bi, 43.20.Ei

ВОЛНЫ СОСКАЛЬЗЫВАНИЯ

Изучение влияния импеданса поверхности на свойства волн является актуальной задачей, см., например, [1]. В этой работе исследуется влияние импеданса на волны соскальзывания. Волны соскальзывания описывают высокочастотное дифрагированное поле вблизи затененной части поверхности гладкого выпуклого тела [2]. Как показывают многочисленные публикации (см., например, [3], [4], [5], [6], [7]), исследование волн соскальзывания активно обсуждается в научной литературе.

Мы рассматриваем стационарный волновой процесс круговой частоты ω (множитель $\exp(-i\omega t)$ всюду опущен) и ищем решение в виде волны, бегущей вдоль поверхности выпуклого тела – волны соскальзывания. Волны соскальзывания распространяются вдоль геодезических линий. На произвольной трехмерной выпуклой поверхности семейство геодезических линий имеет общие огибающие, фокальные точки или точки возврата. Мы будем рассматривать область, в которой система геодезических линий регулярна, и будем параметризовать эти линии при помощи координаты a . Вторая поверхностная координата s отмеряется вдоль геодезической линии от некоторой опорной линии $s = 0$ (см. рис. 1). В старшем порядке асимптотика акустической волны соскальзывания имеет вид [2]

$$U = A_0(a) \exp \left\{ iks + \left(\frac{k}{2} \right)^{1/3} \int_0^s \frac{\xi}{\rho^{2/3}} ds \right\} \times \times \rho^{-1/6} h^{-1/2} (\xi + q^2)^{-1/2} \frac{w_1(\xi - \nu)}{w_1(\xi)}. \quad (1)$$

Здесь A_0 – амплитуда, задающая профиль волны при $s = 0$, k – волновое число, большой параметр, $\rho = \rho(s, a)$ – радиус кривизны геодезической линии

$h = h(s, a)$ – расходимость семейства этих линий
 $\nu = 2^{1/3} k^{2/3} \rho^{-1/3} n$ – растянутая координата нормали,
 $w_1()$ – функция Эйри, ξ – параметр, определяемый из уравнения

$$\dot{w}_1(\xi) = iq w_1(\xi), \quad (2)$$

где $q = (k\rho/2)^{1/3} Z$, а Z – импеданс в краевом условии

$$\frac{\partial U}{\partial n} + ikZU = 0,$$

выполняющемся на поверхности.

Таким образом, в старшем порядке по большому параметру поле волны соскальзывания зависит только от кривизны поверхности и вида краевого условия. Первое слагаемое в показателе экспоненты отражает тот факт, что волна соскальзывания распространяется вдоль геодезической линии с волновым числом k . Второе слагаемое имеет порядок $O(k^{1/3})$ и дает поправку к вол-

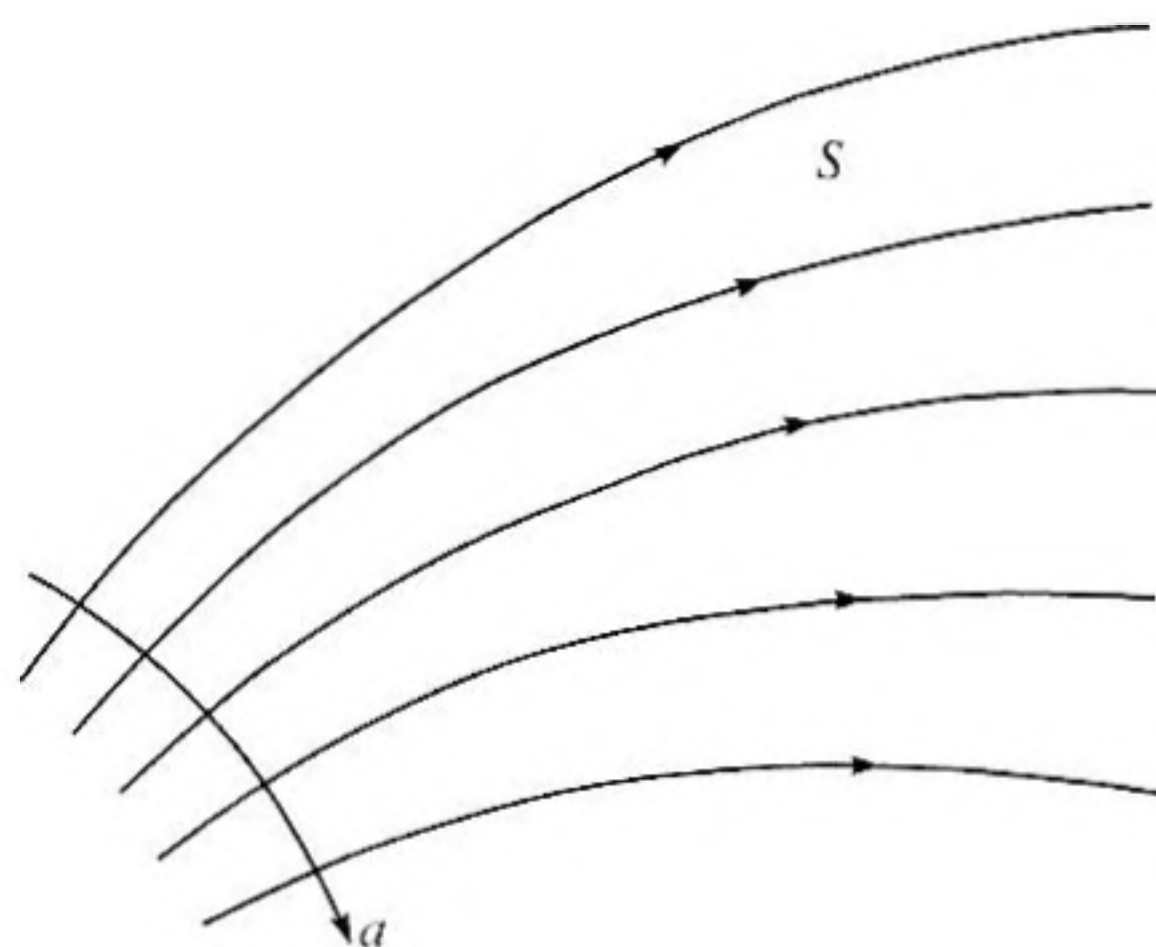


Рис. 1. Геодезическая система координат на поверхности.

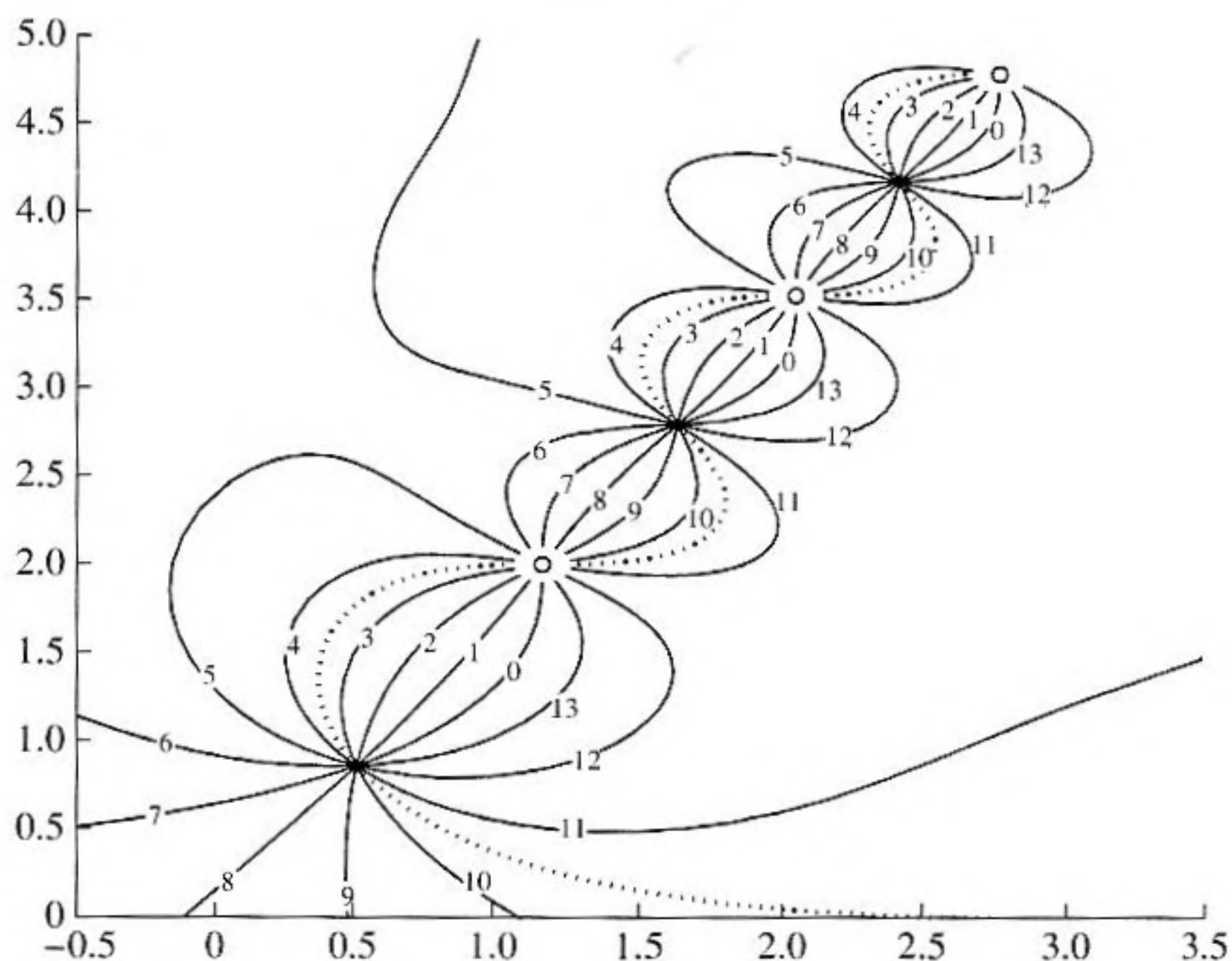


Рис. 2. Линии $\xi(e^{i\pi j/7}\mathbb{R}_+)$ на комплексной плоскости (кривые помечены индексом j).

новому числу и, что более существенно, описывает затухание волны, характеризуемое мнимой частью параметра ξ . Отметим, что уравнение (2) имеет бесконечный набор решений ξ_l , $l = 1, 2, \dots$. На практике интерес представляют обычно лишь одно – два решения, имеющие минимальные мнимые части.

Вообще, асимптотическое разложение поля волны соскальзывания проводится по обратным степеням параметра $k^{1/3}$. В следующих, поправочных порядках проявляется влияние трансверсальной кривизны поверхности, кручения геодезической линии и других параметров. Для произвольной поверхности влияние трансверсальной кривизны и кручения впервые было исследовано в [8] для случая акустических и электромагнитных волн, подчиняющихся идеальным краевым условиям. Для поверхности, описываемой импедансным краевым условием, второй член асимптотического разложения получен в [9].

Асимптотическая формула (1), справедливая в случае общего положения, позволяет указать ситуации, когда происходит то или иное вырождение волн соскальзывания. Например, фактор $h^{-1/2}$ обращается в бесконечность, если семейство геодезических линий имеет каустику или фокальную точку (соответствующие этим случаям асимптотики получены в [10], см. также [11]).

Другой случай вырождения связан с импедансом. Зависимость решений уравнения (2) от величины q исследовалась в [12]. Проведем здесь более детальное исследование.

Заметим, что при $q = \infty$, решения уравнения (2) совпадают с нулями функции Эйри w_1 , а при $q = 0$, с нулями ее производной \dot{w}_1 . При конечных q зависимость параметра затухания ξ от q определяется уравнением Абеля

$$\frac{d\xi}{dq} = \frac{i}{\xi + q^2},$$

которое легко получить, если продифференцировать (2), а затем, пользуясь уравнением (2), выразить $\dot{w}_1(\xi)$ через $w_1(\xi)$. На рис. 2 приведены линии $\xi(e^{i\pi\theta}\mathbb{R}_+)$ для значений $\theta = 0, 1/7, 2/7, \dots, 13/7$. Отметим, что линии с $\theta = 4/7, 5/7, \dots, 10/7$ отвечают импедансам с отрицательной вещественной частью, что соответствует подкачке энергии, а линии с $\theta = 0, 1/7, 2/7, 3/7$ и $\theta = 11/7, 12/7, 13/7$ соответствуют поглощению. Граница областей значений параметров затухания, отвечающих случаю поглощения и случаю подкачки энергии, показана пунктирной линией.

Отметим также, что кривые номер 11 и 12, выходящие из первого нуля производной функции Эйри, имеют существенно разное поведение. Кривая номер 11 уходит на бесконечность и соответствующая ей волна соскальзывания быстро затухает. Кривая номер 12 приходит в нуль функции Эйри и затухание соответствующей ей волны соскальзывания остается конечным. Более детальное исследование функции $\xi(q)$ показывает, что на комплексной плоскости ξ имеются точки пересечения кривых $\xi(e^{i\pi\theta}\mathbb{R}_+)$. Такие пересечения соот-

Значения параметра q , при которых происходит вырождение

1	q_l	$\arg(q_l)$	вырождающиеся волны
1	$0.57199767731018 - 1.63402278615971i$	-0.393π	1 и 2
2	$0.85335012269960 - 1.96109887603740i$	-0.369π	2 и 3
3	$1.03840366971010 - 2.20213365672701i$	-0.360π	3 и 4
4	$1.18058880069906 - 2.39842942356833i$	-0.354π	4 и 5

ветствуют кратным корням и происходят при значениях параметра q , удовлетворяющих уравнению

$$\dot{w}_1(-q^2) = iqw_1(-q^2). \quad (3)$$

При этих значениях импеданса происходит совпадение параметра затухания ξ с $-q^2$, что приводит к расходимости в формуле (1). Исследование поля волн соскальзывания в случае такого вырождения и является предметом данной работы. Эффект присутствует также в двумерной задаче (падения плоской волны на цилиндрическую поверхность в ортогональном направлении). Будем ниже рассматривать такой случай. При этом асимптотика (1) теряет множитель $h^{-1/2}$, а также существенно упрощаются члены более высокого порядка малости по параметру $k^{-1/3}$.

В природе известны ситуации, когда скорости двух волновых процессов в некоторой точке совпадают. При этом, если в общем случае волновые процессы были независимы, то вблизи точки совпадения скоростей они оказываются перевязанными. Подобный эффект имеет место и в рассматриваемом случае. Волновых процессов (волн

соскальзывания) при этом бесконечно много, но вырождению подвергаются лишь два, и вырождение происходит не в старшем порядке, а в поправочном члене.

ХАРАКТЕР РАСХОДИМОСТИ В АСИМПТОТИКЕ ВОЛН СОСКАЛЬЗЫВАНИЯ В ОКРЕСТНОСТИ ВЫРОЖДЕНИЯ

Обратимся сначала к уравнению (3), дающему значения импеданса (точнее параметра q), при которых происходит вырождение волн соскальзывания. Производя замену переменной $q = e^{i\pi/6}x$ и переходя к вещественно значной функции Эйри v , несложно свести уравнение (3) к следующему

$$(\dot{v}x^2) = xv(x^2).$$

Можно проверить, что это уравнение не имеет вещественных решений, а комплексные корни комплексно сопряжены. Решения, полученные численно, приведены в таблице. На рис. 3 приведены линии значений параметра ξ , отвечающие

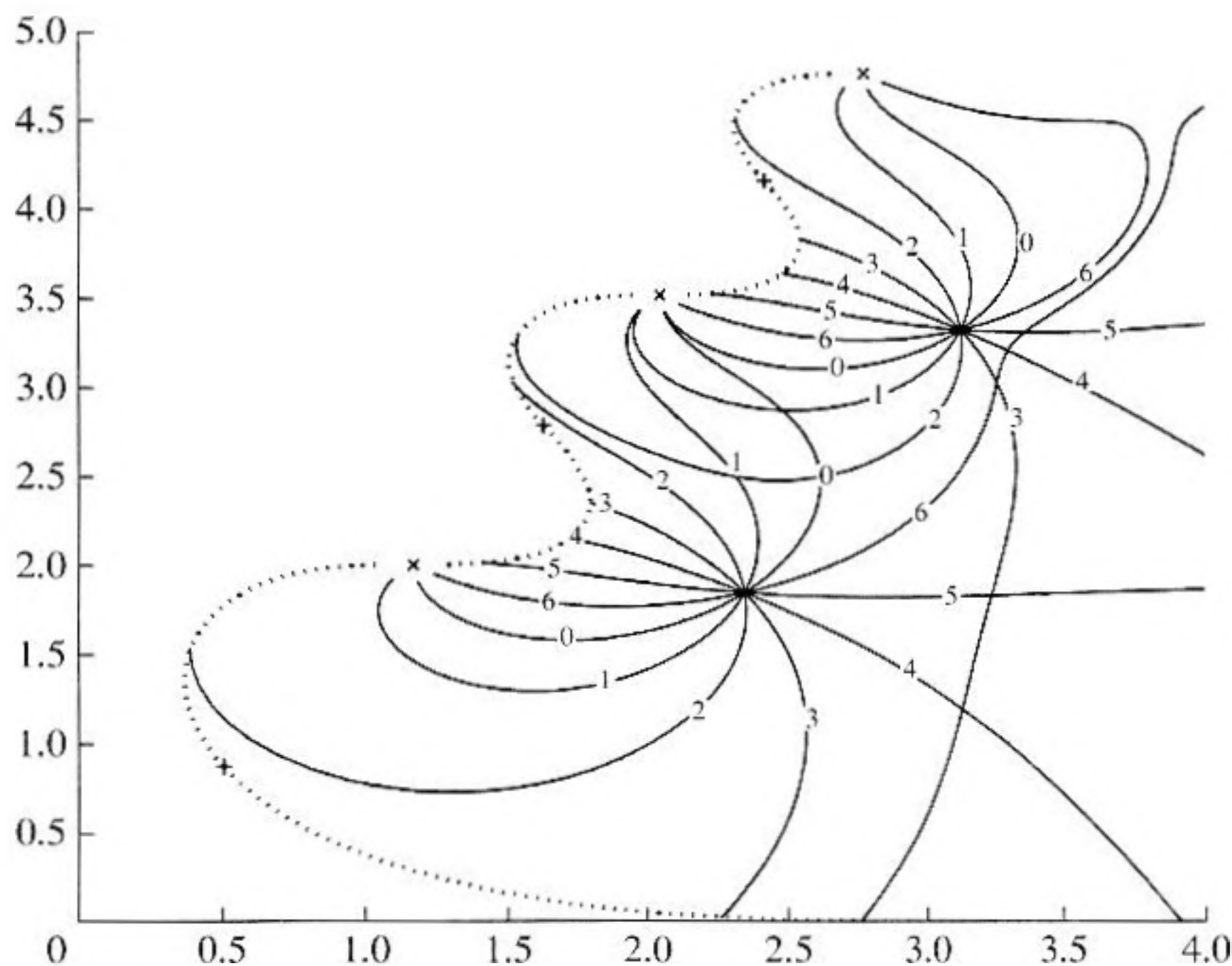


Рис. 3. Линии $\xi(q_l + e^{i2\pi j/7}\mathbb{R}_+)$ на комплексной плоскости (кривые помечены индексом j).

импедансам $q = q_l + e^{i\pi\theta} \mathbb{R}_+$ для $l = 1$ и $l = 2$. Отметим, что каждому значению параметра θ отвечают две линии, выходящие из точки $\xi = -q_l^2$. То есть, при стремлении импеданса q к критическому значению, два решения уравнения (2) сближаются и при $q = q_l$ дают кратный корень. Исследование уравнения (2) в окрестности кратного корня позволяет указать асимптотику решения

$$\xi(q_l + \delta) = -q_l^2 \pm \sqrt{2i\delta} - \frac{2}{3}q_l\delta + \dots, \quad (4)$$

$$|\delta| \rightarrow 0.$$

Поскольку величина q зависит не только от импеданса, но и от кривизны геодезической линии, она не является постоянной. Зависимость амплитуды волны соскальзывания от величины q выражается в асимптотике (1) множителем $Q = 1/\sqrt{\xi + q^2}$. Пусть в некоторой точке $s = s^\circ$ параметр q принимает одно из критических значений q_l . Тогда в окрестности точки $s = s^\circ$ асимптотика (1) нарушается. Будем считать, что в окрестности точки вырождения имеет место разложение

$$q(s) = q_l + q'(s^\circ)(s - s^\circ) + \dots$$

Тогда, согласно (4), амплитуды соответствующих волн соскальзывания имеют особенности вида $(s - s^\circ)^{-1/4}$.

Рассмотрим поправочный член, полученный в [9] (см. также [11]) и имеющий вид множителя

$$\exp\left\{\int_0^s S ds\right\}.$$

Среди большого числа слагаемых в выражении для функции S присутствуют следующие

$$k^{12/9}: \frac{\partial^2 U_0}{\partial l^2} - 2\frac{\partial P}{\partial \sigma} U_0 + \frac{l}{\rho_0} U_0,$$

$$k^{11/9}: 2i\frac{\partial U_0}{\partial \sigma},$$

$$k^{10/9}: -2\frac{l}{\rho_0^2} \frac{\partial \rho(s^\circ)}{\partial s} \sigma U_0,$$

$$k^{9/9}: 0,$$

$$k^{8/9}: \left[\left(\frac{\partial \rho(s^\circ)}{\partial s} \right)^2 - \frac{\rho_0 \partial^2 \rho(s^\circ)}{\partial s^2} \right] l \sigma^2 U_0,$$

$$k^{7/9}: 0,$$

$$k^{6/9}: \frac{1}{6} \frac{\partial^3}{\partial s^3} \left(\frac{1}{\rho(s^\circ)} \right) l \sigma^3 U_0 + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial U_0}{\partial l} + \frac{2l}{\rho_0} \frac{\partial^2 U_0}{\partial l^2} + \frac{l^2}{\rho_0^2} U_0 - \left(\frac{\partial P}{\partial \sigma} \right)^2 U_0,$$

.....

$$S_4 = \frac{1}{8} \rho(\xi')^2 \left(3Q^2 - 2 - 2i\frac{m}{Z} Q^2 \right) -$$

$$- \left(\frac{\xi'' \rho}{6} + \frac{\xi' \rho'}{9} \right) \left(2\xi + \frac{3}{2} Q^2 - i\frac{m}{Z} Q \right) + \frac{\rho \xi' m}{2Z} \left(\frac{m}{Z} \right) Q.$$

С учетом асимптотики (4) имеем

$$\xi' \sim Q^{-1} \sim 1/\sqrt{s - s^\circ}, \quad \xi'' \sim Q^{-3} \sim (s - s^\circ)^{-3/2}.$$

Тогда наибольшая сингулярность поправочного множителя происходит из слагаемого $\xi'' Q^2$ и с учетом интегрирования имеет вид $(s - s^\circ)^{-3/2}$. Таким образом, поправочный член $k^{-1/3} (s - s^\circ)^{-3/2}$ становится сравнимым со старшим на расстояниях порядка $s - s^\circ = O(k^{-2/9})$. Иными словами, естественно ожидать наличие пограничного слоя длины $k^{-2/9}$ в окрестности точки вырождения.

АСИМПТОТИКА В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

Введем растянутую координату $\sigma = k^{2/9}(s - s^\circ)$ и, следуя [13], будем искать асимптотику волн соскальзывания в виде

$$U = \exp\{iks + ik^{1/9} P(\sigma)\} \sum_{j=0}^{\infty} k^{-j/9} U_j(\sigma, l), \quad (5)$$

$$l = k^{2/3} n.$$

Подставим анзац (5) в уравнение Гельмгольца, записанное в координатах (s, n) , и в импедансное граничное условие. При этом кривизну поверхности $1/\rho$ и импеданс Z разложим в ряды Тейлора, которые ввиду малости s в пограничном слое носят также асимптотический характер. В уравнении Гельмгольца имеем слагаемые следующих порядков

Приравнивая слагаемые при одинаковых степенях большого параметра k , получим последовательность краевых задач. В старшем порядке, при $k^{4/3}$ имеем

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 U_0}{\partial l^2} - 2 \frac{dP}{d\sigma} U_0 + 2 \frac{l}{\rho_0} U_0 = 0, \\ \frac{\partial U_0}{\partial l} + ik^{1/3} Z_0 U_0 = 0, \quad l = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Здесь $\rho_0 = \rho(s^\circ)$, $Z_0 = Z(s^\circ)$. Задачу (6) удобно переписать с использованием растянутой нормали $v = kn/m_0$, где $m_0 = (k\rho_0/2)^{1/3}$. Имеем

$$\begin{cases} LU_0 = 0, \quad L = \frac{\partial^2}{\partial v^2} + v - \xi, \\ \frac{\partial U_0}{\partial v} + iq_l U_0 = 0, \quad v = 0. \end{cases} \quad (7)$$

В следующем порядке, при $k^{11/9}$ имеем

$$\begin{cases} LU_1 = -\left(\frac{\rho_0}{2}\right)^{2/3} 2i \frac{\partial U_0}{\partial \sigma}, \\ \frac{\partial U_1}{\partial v} + iq_l U_1 = 0, \quad v = 0. \end{cases} \quad (8)$$

В порядке $k^{10/9}$ задача учитывает изменение кривизны и импеданса, имеем

$$\begin{cases} LU_2 = -\left(\frac{\rho_0}{2}\right)^{2/3} \left(2i \frac{\partial U_1}{\partial \sigma} - 2 \frac{l}{\rho_0^2} \rho' \sigma U_0\right), \\ \frac{\partial U_2}{\partial v} + iq_l U_2 = -im_0 z' \sigma U_0, \quad v = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Здесь штрихом обозначена производная по длине дуги s , вычисленная при $s = s^\circ$.

Как будет показано ниже, для получения старшего члена асимптотики волны соскальзывания можно ограничиться лишь задачами при $k^{4/3}$, $k^{11/9}$ и $k^{10/9}$.

Задача (7) возникает при построении асимптотики волн соскальзывания в случае общего положения. Ее решение имеет вид

$$U_0 = A_0(\sigma) w_1(\xi^\circ - v),$$

где функция A_0 – произвольна, а параметр ξ° связан с производной $dP(\sigma)/d\sigma$ и определяется из уравнения (3). Вырождению подвергаются лишь те волны соскальзывания, для которых $\xi^\circ = -q_l^2$. Мы рассматриваем только такие волны. Функция $P(\sigma)$ определяется по ξ° интегрированием

$$P(\sigma) = 2^{-1/3} \rho_0^{-2/3} \xi^\circ \sigma.$$

Уравнение в краевой задаче (8) имеет ненулевую правую часть, которая содержит производную функции $A_0(\sigma)$. Поскольку при решении задачи в старшем порядке спектральный параметр ξ был выбран равным ξ° , неоднородная задача разрешима не при любой правой части. Однако в случае задачи (8) условие разрешимости оказывается выполненным, в чем легко убедиться, вычислив интеграл

$$\int_0^{+\infty} w_1^2(\xi^\circ - v) dv = \xi^\circ w_1^2(\xi^\circ) - \dot{w}_1^2(\xi^\circ) = 0.$$

Решение задачи (8) может быть записано в явном виде

$$U_1 = A_1(\sigma) w_1(\xi^\circ - v) - 2i \left(\frac{\rho_0}{2}\right)^{2/3} \frac{\partial A_0}{\partial \sigma} \dot{w}_1(\xi^\circ - v).$$

Здесь амплитуда $A_1(\sigma)$ также является произвольной.

Перейдем к следующему порядку. В задаче (9) неоднородными являются и уравнение, и краевое условие. Выделяя функцию

$$U_2^{(1)} = -im_0 z' A_0 \sigma v w_1(\xi^\circ - v),$$

получим краевую задачу для $U_2^{(2)} = U_2 - U_2^{(1)}$ с однородным краевым условием. Правая часть в уравнении для $U_2^{(2)}$ содержит производные амплитуд A_0 и A_1

$$\begin{aligned} \text{r.h.s.} = & 2^{2/3} \rho_0^{-5/3} \rho' \sigma A_0 v w_1(\xi^\circ - v) + \\ & + 4 \frac{\partial^2 A_0}{\partial \sigma^2} \left(\frac{\rho_0}{2}\right)^{2/3} \dot{w}_1(\xi^\circ - v) + \\ & + 2i \left(\frac{2}{\rho_0}\right)^{2/3} m_0 z' A_0 \sigma \dot{w}_1(\xi^\circ - v) + 2i \frac{\partial A_1}{\partial \sigma} w_1(\xi^\circ - v). \end{aligned}$$

Условие разрешимости, которое может быть получено, если домножить правую часть на $w_1(\xi^\circ - v)$ и проинтегрировать по полуоси $0 < v$, приводит к уравнению

$$\frac{d^2 A_0}{d\sigma^2} - \Theta \sigma A_0 = 0, \quad (10)$$

где

$$\Theta = \frac{-iq_l}{2} \left(\frac{2}{\rho_0}\right)^{4/3} \left(\frac{Z_0'}{Z_0} + \frac{1}{3} \frac{\rho_0'}{\rho_0}\right).$$

Уравнение (10) является уравнением Эйри. Зависимость амплитуды A_0 от σ имеет вид

$$A_0 = \alpha_0 \text{Ai}(\Theta^{1/3} \sigma) + \beta_0 \text{Bi}(\Theta^{1/3} \sigma),$$

где α_0 и β_0 – некоторые константы.

Таким образом, решение построено в старшем порядке и имеет вид

$$U = \exp(iks + ik^{1/3} 2^{-1/3} \rho_0^{-2/3} \xi^0 (s - s^0)) \times \\ \times (\alpha_0 \text{Ai}(k^{2/9} \Theta^{1/3} (s - s^0)) + \\ + \beta_0 \text{Bi}(k^{2/9} \Theta^{1/3} (s - s^0))) w_1(\xi^0 - \nu). \quad (11)$$

Можно показать, что процедура позволяет найти решение в любом порядке по малому параметру $k^{-1/9}$. При этом в каждом порядке решение будет содержать неопределенные коэффициенты α_j, β_j . Определению α_0 и β_0 посвящен следующий параграф.

СШИВАНИЕ С АСИМПТОТИКОЙ ВНЕ ЗОНЫ ВЫРОЖДЕНИЯ

Пусть при $s < s^0$ распространяется волна соскальзывания (1) с параметром затухания ξ , подвергнувшись вырождению при $s = s^0$. Асимптотикой (1) можно пользоваться на расстояниях порядка $O(k^{-2/9 + \varepsilon})$ от точки вырождения. В окрестности $s = s^0$ асимптотика дается формулой (11), которая справедлива в несколько большей окрестности, чем $O(k^{-2/9})$. Произведем сшивание асимптотик. Для этого переразложим функции Эйри Ai и Bi по другой паре функций Эйри. А именно, введем функцию Эйри $V^{(+)}$, такую, что ее асимптотика при $\sigma \rightarrow -\infty$ дается формулой

$$V^{(+)}(\Theta^{1/3} \sigma) \sim (\Theta^{1/3} \sigma)^{-1/4} \exp\left\{\frac{2}{3}(\Theta^{1/3} \sigma)^{3/2}\right\}, \quad (12) \\ \sigma \rightarrow -\infty,$$

то есть имеет только одну экспоненту. Аналогично, пусть функция Эйри $V^{(-)}$ имеет асимптотику

$$V^{(-)}(\Theta^{1/3} \sigma) \sim (\Theta^{1/3} \sigma)^{-1/4} \exp\left\{-\frac{2}{3}(\Theta^{1/3} \sigma)^{3/2}\right\}, \quad (13) \\ \sigma \rightarrow -\infty.$$

Тогда, считая, что $\alpha_0 \text{Ai} + \beta_0 \text{Bi} = a_+ V^{(+)} + a_- V^{(-)}$, имеем

$$U \sim a_+ U^{(+)} + a_- U^{(-)}, \\ U^{(\pm)} = k^{-1/18} \Theta^{-1/12} (s^0 - s)^{-1/4} \times \\ \times \exp\left(iks + i\left(\frac{k}{2}\right)^{1/3} \frac{\xi^0}{\rho_0} (s - s^0) \pm \right. \\ \left. \pm \frac{2}{3} k^{1/3} \sqrt{\Theta} (s^0 - s)^{3/2}\right) w_1(\xi^0 - \nu).$$

С учетом (4) видно, что это выражение совпадает с суммой асимптотик (1) волн соскальзывания,

подвергающихся вырождению. Слагаемое $U^{(+)}$ отвечает волне с параметром затухания ξ , имеющим асимптотику (4) со знаком плюс, а слагаемое $U^{(-)}$ отвечает волне соскальзывания с параметром ξ , имеющим асимптотику (4) со знаком минус. Сравнивая амплитуды волн, находим

$$a_+ = \frac{k^{1/18}}{2^{2/9} \rho_0^{5/18} w_1(\xi^0)} (q'(s^0))^{-1/6} e^{-i\pi/6} A_0 \times \\ \times \exp\left(i\left(\frac{k}{2}\right)^{1/3} \int_0^{s^0} \frac{\xi ds}{\rho^{2/3}}\right), \quad a_- = 0,$$

если параметр затухания ξ падающей волны соскальзывания имеет асимптотику (4) со знаком плюс и

$$a_+ = 0, \quad a_- = \frac{k^{1/18}}{2^{2/9} \rho_0^{5/18} w_1(\xi^0)} (q'(s^0))^{-1/6} e^{i\pi/3} A_0 \times \\ \times \exp\left(i\left(\frac{k}{2}\right)^{1/3} \int_0^{s^0} \frac{\xi ds}{\rho^{2/3}}\right)$$

в противном случае.

За точкой вырождения, при $s > s^0$ асимптотики функций Эйри $V^{(\pm)}$ содержат одну или две экспоненты, получающиеся аналитическим продолжением асимптотик (12), (13). Рассмотрим для определенности случай постоянного импеданса Z . Тогда вырождение происходит за счет изменения радиуса кривизны $\rho(s)$ вдоль поверхности. Пусть волна соскальзывания падает на точку вырождения со стороны области большей кривизны. В этом случае $\arg(q') = \arg(q)$ и, как видно из таблицы, при любом l лежит в интервале $(-2\pi/5, -\pi/3)$. Тогда для аргумента функций Эйри $V^{(\pm)}$ имеем оценки

$$\arg(\Theta^{1/3} \sigma) \in (7\pi/10, 13\pi/18), \quad s < s^0, \\ \arg(\Theta^{1/3} \sigma) \in (-3\pi/10, -5\pi/18), \quad s > s^0.$$

Функции Эйри выражаются интегралами

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathcal{L}_j} e^{iz - z^3/3} dz, \quad (14)$$

где возможны три варианта контуров интегрирования ($j = 1, 2, 3$), а именно: для функции w_1 контур $\mathcal{L}_1 = (e^{-2\pi i/3} \infty, +\infty)$, для функции w_2 контур симметричен к \mathcal{L}_1 относительно вещественной оси $\mathcal{L}_2 = (e^{2\pi i/3} \infty, +\infty)$, и для ν $\mathcal{L}_3 = (e^{-2\pi i/3} \infty, e^{2\pi i/3} \infty)$. Асимптотика интегралов (14) может быть получена по методу перевала, при этом вклад дают седловые точки $z_{1,2} = \pm \sqrt{t}$. В рассматриваемом случае при $s < s^0$ седловые точки лежат в секторах $(7\pi/20, 13\pi/36)$ и $(-13\pi/20, -23\pi/36)$ см. рис. 4 (сле-

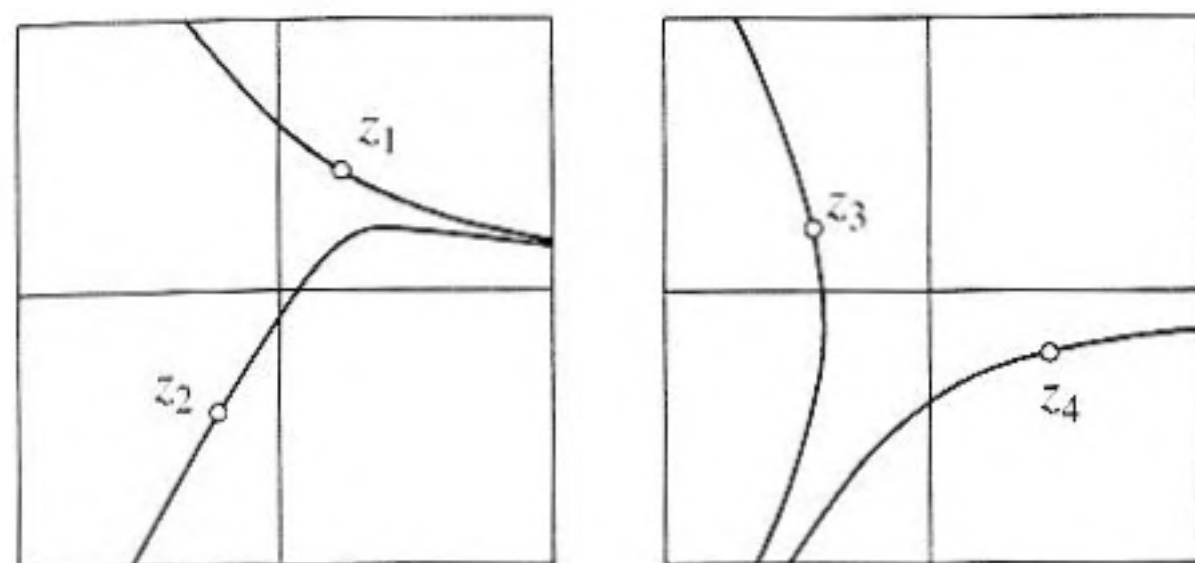


Рис. 4. Взаимное расположение контуров и перевальных точек.

ва). Седловая точка z_1 дает вклад с экспонентой, показатель которой лежит в левой полуплоскости. То есть, вклад седловой точки z_1 отвечает падению волны соскальзывания с меньшим затуханием, в то время как вклад седловой точки z_2 соответствует волне с большим затуханием. После перехода через точку вырождения, то есть при $s > s^\circ$, седловые точки показаны на рисунке справа. Точка z_3 отвечает волне с большим затуханием, а точка z_4 – волне с меньшим затуханием.

Из рис. 4 видно, что, если падает волна с меньшим затуханием, в интеграле (14) следует брать контур \mathcal{L}_2 . При этом, за точкой вырождения с учетом $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_3$ вклад в асимптотику дают обе перевальные точки. Если же падает волна с большим затуханием, то надо выбирать контур \mathcal{L}_1 , и вклад при $s > s^\circ$ дает лишь точка перевала z_4 . С учетом асимптотик (12) и (13) и выражений для коэффициентов a_\pm , можно установить, что амплитуды волн соскальзывания после точки вырождения получают дополнительный фазовый множитель $\exp(i\pi/2)$.

Аналогичным образом обстоит дело и при падении волн соскальзывания из области меньшей кривизны.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы рассмотрели эффект вырождения волн соскальзывания, связанный с совпадением параметра

$$q = \left(\frac{k\rho(s, a)}{2} \right)^{1/3} Z$$

с критическими значениями q_l , определенными в таблице. Значения q_l комплексные и совпадение q с q_l может быть достигнуто при помощи специальной подстройки импеданса, который тоже должен быть комплексным, то есть описывать поверхность с поглощением.

Для каждого критического значения происходит вырождение лишь двух из бесконечного набора волн соскальзывания. До точки вырождения две эти волны соскальзывания распространяются

вдоль поверхности независимо, как описано асимптотикой (1). При приближении к точке вырождения поправочные члены в показателе экспоненты в (1) сближаются и в точке вырождения становятся равными. При этом две вырождающиеся волны соскальзывания не могут быть описаны раздельно. В окрестности точки вырождения поле волн соскальзывания описывается асимптотикой (11). Отметим, что появление функции Эйри, описывающей амплитуду волны соскальзывания, характерно для случая каустики геодезических линий (см. [10], [11]), схожесть физических процессов со случаем каустики геодезических линий проявляется и в усилении поля, правда в данном случае лишь на величину порядка $O(k^{1/18})$. После точки вырождения волны соскальзывания опять становятся независимыми, но приобретают фазовый сдвиг на $\pi/2$. Эффект может быть описан следующим образом. Падающая волна с меньшим затуханием порождает после точки вырождения две волны. Падающая волна с большим затуханием порождает после точки вырождения одну волну, имеющую меньшее затухание.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тютюкин В.В. Влияние поверхностной импедансной нагрузки на свойства квазирелеевских волн. // Акуст. ж., 2007. Т. 53. № 4. С. 514–521.
2. Фок В.А. Диффракция радиоволн вокруг земной поверхности // ЖЭТФ. 1945. Т. 15. № 9. С. 479.
3. Миронов М.А., Урусовский И.А. Затухающие волны в тени цилиндра // Акуст. ж. 2002. Т. 48. № 5. С. 661–665.
4. Андронов И.В. Волны, сосредоточенные у слабоконтрастных границ // Акуст. ж. 2004. Т. 50. № 4. С. 435–441.
5. Molinet F.A. Edge excited rays on convex and concave structures – 2D and 3D problems / The URSI 2004 EMTS Proceedings. 2004. Università di Pisa. P. 1044–1046.
6. Stève H., Laval D., Molinet F., Tort S. Diffraction by a strongly elongated object illuminated by an electromagnetic plane wave propagating in the paraxial direction – application to a prolate ellipsoid / Proc. of the Internat. Conf. "Days on diffraction 2006". 2006. St. Petersburg Univ. P. 268–274.
7. Andronov I.V., Bouche D. Asymptotics of creeping waves in a degenerated case of matrix impedance // Progress in Electromagnetics Research, PIER. 2006. V. 59. P. 215–230.
8. Hong S. Asymptotic theory of electromagnetic and acoustic diffraction by smooth convex surfaces of variable curvature. // J. Math. Phys. 1967. V. 8. № 6. P. 1223–1232.
9. Andronov I.V., Bouche D. Calcul du second terme de l'exposant linéique de propagation des ondes rampantes par une méthode de couche limite. // Ann. Télécommun. 1994. V. 49. № 3–4. P. 199–204.
10. Bouche D. Calcul du champ à la surface d'un obstacle convexe vérifiant une condition d'impédance par une

- méthode de développement asymptotique // *J. Acoustique*. 1992. V. 5. P. 507–530.
11. *Molinet F., Andronov I., Bouche D.* Asymptotic and Hybrid Methods in Electromagnetics. London, The IEE, 2005. xi+249 p.
12. *Bouche D.* Thèse de Mathématiques Appliquées, Université de Bordeaux, France. 1992.
13. *Перель М.В., Фиалковский И.В., Киселев А.П.* Резонансное взаимодействие поперечных волн в балке Тимошенко. // *Записки научн. семин. ПОМИ*. 2000. Т. 264. С. 258–284.

The Influence of the Impedance on the Creeping Wave Propagation

I. V. Andronov

St.-Petersburg State University, ul. Ul'yanovskaya 1, Petrodvorets, 198504 Russia

e-mail: iva—@list.ru

Abstract—Creeping waves on a cylindrical surface with an impedance boundary condition are considered. The influence of the impedance is examined. The critical impedance values at which the degeneration occurs are found. The passage of creeping waves through the point of degeneracy is studied.