

УДК 534.23

## УПРАВЛЕНИЕ ВОЛНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В ДВУМЕРНОЙ МОДЕЛИ КРОМКИ СОПЛА

© 2008 г. В. Ф. Копьев, Г. А. Фараносов

Филиал ФГУП ЦАГИ "Московский комплекс ЦАГИ"

105005 Москва, ул. Радио 17

E-mail: vkopiev@mx.iki.rssi.ru

Поступила в редакцию 3.05.07 г.

Рассмотрена задача о генерации волны неустойчивости, развивающейся с кромки полуплоскости, разделяющей покоящуюся и движущуюся среды. Предполагается, что волна неустойчивости инициирована акустической волной, приходящей из области движущейся среды. Исследована возможность гашения волны неустойчивости с помощью акустической волны, падающей из области, где потока нет. Показано, что этого всегда можно добиться, подбирая амплитуду и фазу управляющего возмущения в зависимости от параметров волны неустойчивости.

PACS: 43.50.Ki, 47.20.Ft, 47.27.Rc

Как известно, шум турбулентной струи остается определяющим источником шума, препятствующим созданию сверхзвукового транспорта. Поэтому к настоящему моменту ощущается необходимость, наряду с развитием традиционных подходов в проблеме снижения шума авиационных двигателей, выдвигать и использовать новые идеи, в том числе и идеи, основанные на попытках активного управления шумом турбулентных струй. Однако главная проблема реализации идеи активного управления упирается в отсутствие концептуальной проработки самой стратегии снижения, что в свою очередь отражает наше недостаточное понимание основных механизмов образования шума, поскольку для устранения причины шума, т.е. активного воздействия на излучающую часть турбулентности, требуется, во всяком случае, понимание основных механизмов возникновения этой причины, т.е. понимания структуры и свойств излучающей турбулентности. Здесь ситуация оказывается принципиально различной для дозвуковых и сверхзвуковых струй. Для сверхзвуковых струй механизм шумообразования во многом понятен и связан с волнами неустойчивости, развивающимися от сопла вниз по потоку. Эта ситуация существенно отличается от дозвуковых потоков, где до сих пор отсутствует полное понимание механизмов генерации шума.

Считается [1–4], что шум сверхзвуковых струй определяется крупномасштабными возмущениями, представляющими собой пространственно растущие на начальном участке волновые пакеты (волны неустойчивости), развивающиеся вниз по потоку от кромки сопла. Их начальная амплитуда связана с процессами воз-

буждения сдвигового слоя внутренними возмущениями в струе и механизмом их дифракции на кромке. Для перерасширенных или недорасширенных струй взаимодействие волн неустойчивости со скачками уплотнения становится дополнительным источником широкополосного шума. Распространение этого шума вверх по потоку и взаимодействие его с кромкой может стать причиной образования обратной связи, что приводит к появлению дискретных составляющих. Таким образом, основные механизмы генерации шума в сверхзвуковой струе связаны с развитием волн неустойчивости и/или их взаимодействием с ударно-волновой структурой струи. Поэтому задачу управления шумом для сверхзвуковых струй можно сформулировать как задачу генерации "антиволн", находящихся в противофазе с наиболее опасными (с точки зрения акустики) волнами неустойчивости, естественно возникающими и развивающимися от кромки вниз по потоку. Именно идея управления малой (а не всей) частью турбулентности, в случае решения проблемы измерителей-актюаторов, делает такой подход привлекательным и, по-видимому, реализуемым [5, 6]. Представляется, что в настоящий момент основная проблема активного управления состоит в разработке подходящей элементной базы для создания антиволны (плазменные актюаторы, пьезодатчики и т.д.) и развитии методов экспериментального выделения в ближнем поле той малой части турбулентности, которая соответствует волне неустойчивости (измерение с помощью антенн, решеток микрофонов и т.д. в реальном времени). При этом было бы желательно выделять волну неустойчивости и создавать антиволну с помощью датчиков, располагаемых в области вне

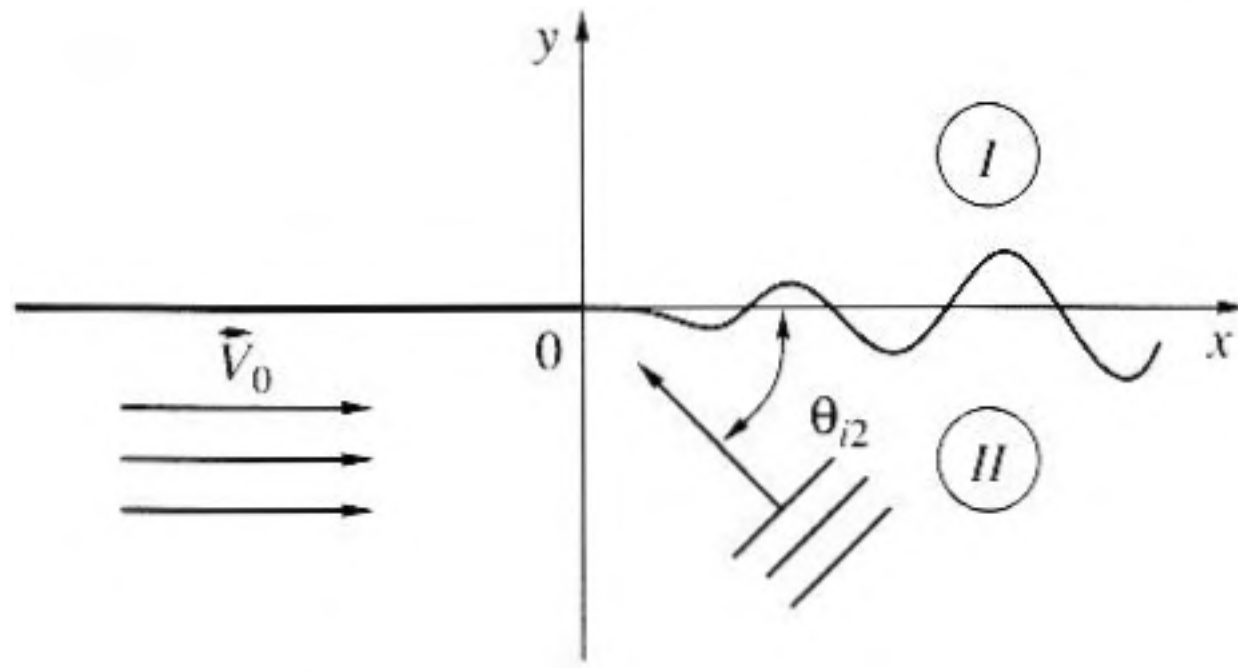


Рис. 1. Двумерная модель кромки сопла.

основного потока, например, располагая их вблизи поверхности сопла на внешней его стороне. Это гарантировало бы невмешательство в естественные процессы в струе, и означало лишь их тонкую настройку с помощью внешних возбудителей. Для принципиальной реализуемости такого подхода необходимо ответить на следующий вопрос – можно ли подобрать внешнее возмущение так, чтобы погасить волну неустойчивости и если можно, то какие должны быть характеристики управляющего поля. Ответу на этот вопрос в простейшей двумерной постановке, когда управляющее поле имеет вид плоской звуковой волны, посвящена настоящая работа.

Задача решается для идеального газа в линейном приближении. Рассматривается известное решение о дифракции акустической волны на жесткой полуплоскости, разделяющей покоящуюся среду и однородный стационарный поток (двумерная модель кромки сопла). Задачи такого типа обычно исследуются методом Винера–Хопфа [7]. Применительно к задачам о взаимодействии звука с тангенциальным разрывом этот метод использовался во многих работах: в [8, 9] решена двумерная задача о дифракции поля точечного источника на полуплоскости, в [10, 11] исследована задача дифракции акустических волн на осесимметричной струе. Отметим также альтернативный подход в задаче о возбуждении волны неустойчивости при дифракции звука на щели, развитый в работах [12, 13], не использующий технику метода Винера–Хопфа. Учет упругих свойств пластины в подобных задачах может приводить к дополнительным эффектам [14, 15].

Предполагается, что исходная волна неустойчивости создается плоской волной, падающей под заданным углом к полуплоскости из области движущейся среды и имеющей заданную амплитуду и фазу. В качестве управления рассматривается другая волна неустойчивости, создаваемая плоской волной, падающей из покоящейся среды на полуплоскость. Характеристики управляющей волны подлежат определению из условия максимального гашения амплитуды суммарной волны

неустойчивости. Пусть  $(x, y)$  – декартова система координат. В области I ( $y > 0$ ) газ покоится, а в области II ( $y < 0$ ) имеется однородный поток того же газа со скоростью  $V_0$ , направленной вдоль оси  $x$ . Области I и II разделены твердой пластинкой, занимающей полуплоскость  $y = 0, x < 0$ , и вихревой пеленой при  $y = 0, x > 0$ . Газ предполагается невязким, скорость звука одинакова во всем пространстве и равна  $c$ . Пусть также возмущения малы, так что движение газа можно считать потенциальным, и зависят от времени как  $\exp(-ikct)$ , где волновое число  $k$  действительно и положительно.

Пусть из области II падает на границу раздела  $y = 0$  плоская гармоническая волна, нормаль к фронту которой составляет угол  $\theta_{i2}$  с осью  $x$  (рис. 1). Ее потенциал скорости задается выражением

$$\varphi_{i2} = b \exp\left(-ikct - i \frac{k \cos \theta_{i2}}{1 - M \cos \theta_{i2}} x + i \frac{k \sin \theta_{i2}}{1 - M \cos \theta_{i2}} y\right) \quad (1)$$

В областях I и II потенциал скорости удовлетворяет следующим уравнениям

$$\Delta \varphi_I + k^2 \varphi_I = 0, \quad y > 0 \quad (2)$$

$$\Delta \varphi_{II} - \left(M \frac{\partial}{\partial x} - ik\right)^2 \varphi_{II} = 0, \quad y < 0 \quad (3)$$

где  $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$  – двумерный оператор Лапласа,  $M = V_0/c$  – число Маха.

На линии  $y = 0$  должны выполняться условия равенства давления  $p$  (для краткости за  $p$  мы обозначаем отношение давления к средней плотности среды) и смещения частиц газа  $h$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_I}{\partial y} &= -ikch, & \frac{\partial \varphi_I}{\partial y} &= -ikch, \\ \frac{\partial \varphi_{II}}{\partial y} &= -ikch + V_0 \frac{dh}{dx}, \\ h &= 0, \quad x < 0; \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} p &= p_I - p_{II} = -ikc(\varphi_I - \varphi_{II}) - V_0 \frac{\partial \varphi_{II}}{\partial x}, \\ p &= 0, \quad x > 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Кроме того, должно выполняться условие излучения: (I) при  $y \rightarrow \pm\infty$  возмущения, вызванные падающей на границу раздела сред волной, должны убывать в каждый фиксированный момент времени, (II) возмущения должны создаваться источниками, расположенными на границе раздела  $y = 0$  (причинность).

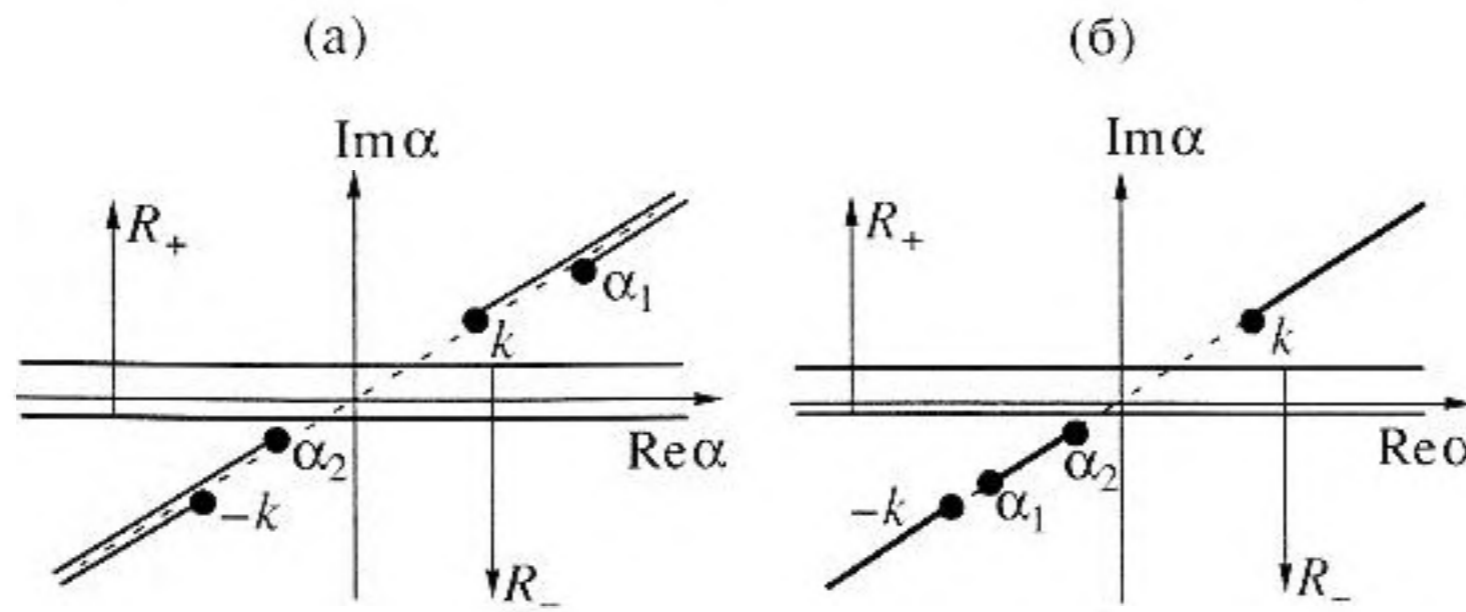


Рис. 2. Разрезы и полосы регулярности функций в комплексной плоскости  $\alpha$ ; а –  $M < 1$ ; б –  $M > 1$ .

Решение будем искать в виде

$$\varphi_I = \varphi_1 \text{ при } y > 0, \quad (6)$$

$$\varphi_{II} = \varphi_{i2} + \varphi_2 \text{ при } y < 0, \quad (7)$$

где  $\varphi_1, \varphi_2$  – искомые возмущения; для удобства в (7) явно выделено падающее поле в области II.

Хотя в дальнейшем будет использоваться плоская волна в качестве источника возбуждения  $\varphi_{i2}$ , запишем это поле в общем виде  $\varphi_{i2} = A^*(x, y) \exp(-ikct)$ . Временной множитель далее будем опускать. Подобные задачи с неоднородными граничными условиями эффективно решаются с помощью метода Винера–Хопфа [7]. Введем в рассмотрение преобразование Фурье

$$\Phi(\alpha, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi \exp(i\alpha x) dx, \quad \alpha = \sigma + i\tau. \quad (8)$$

При определенных условиях [7] формула (8) определяет аналитическую функцию  $\Phi(\alpha, y)$  от  $\alpha$ , регулярную в полосе  $\tau_- < \tau < \tau_+$  (т.е. однозначную и дифференцируемую в каждой точке полосы), причем при любом  $\tau$  таком, что  $\tau_- < \tau < \tau_+$ , имеет место

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{i\tau_-}^{i\tau_+} \Phi \exp(-i\alpha x) d\alpha. \quad (9)$$

Заметим также, что  $\Phi(\alpha, y)$  можно представить в виде  $\Phi(\alpha, y) = \Phi_- + \Phi_+$ , где

$$\Phi_- = \int_{-\infty}^0 \varphi \exp(i\alpha x) dx, \quad \Phi_+ = \int_0^{+\infty} \varphi \exp(i\alpha x) dx \quad (10)$$

– функции, регулярные при  $\tau < \tau_+$  и  $\tau_- < \tau$  соответственно. Следуя [16], будем называть такие функции “–”-функциями и “+”-функциями.

Применяя к уравнениям (4), (5) с учетом (6), (7) преобразование Фурье, найдем, что фурье-обра-

зами функций  $\varphi_{i2}, \varphi_1, \varphi_2$  будут соответственно функции

$$\begin{aligned} \Phi_{i2} &= A(\alpha) \exp(-\beta y), \\ \Phi_1 &= P(\alpha) \exp(-\gamma y), \\ \Phi_2 &= Q(\alpha) \exp(\beta y), \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} \gamma &= \sqrt{\alpha^2 - k^2}, \quad \beta = \sqrt{(1-M)^2(\alpha - \alpha_1)(\alpha - \alpha_2)}, \\ \alpha_1 &= \frac{k}{1-M}, \quad \alpha_2 = -\frac{k}{1+M}. \end{aligned}$$

Ветви функций  $\gamma$  и  $\beta$  выбираются в соответствии с условием излучения. Для комплексных  $k = k_1 + ik_2$  ( $k_1 > 0$ ) это условие, при выбранных знаках в показателях экспонент в (11), эквивалентно выполнению неравенств  $k_2 > 0, \text{Re} \gamma > 0, \text{Re} \beta > 0$ . Случай действительных  $k$  рассматривается как предел  $k_2 \rightarrow +0$ .

Разрезы для функций  $\gamma$  и  $\beta$  в комплексной  $\alpha$ -плоскости проведем так, чтобы на оси  $\text{Re} \alpha$  выполнялось условие излучения. Нам будет удобно проводить разрезы вдоль прямой, проходящей через точки  $k$  и  $-k$  (рис. 2). При этом для дозвукового и сверхзвукового потоков картинки принципиально различны из-за того, что точка ветвления  $\alpha_1$  функции  $\beta$  переходит из верхней полуплоскости в нижнюю, когда поток становится сверхзвуковым. Заметим, что при  $M < 1$   $\beta = \beta_+ \beta_-$ , где  $\beta_+ = \sqrt{\alpha(1+M) + k}, \beta_- = \sqrt{\alpha(1-M) - k}$ , т.е. является произведением “+” и “–”-функций, а при  $M > 1$  вся  $\beta$  является “+”-функцией:  $\beta = \beta_+$ .

После преобразования Фурье граничных условий получаем

$$\begin{aligned} -\gamma P &= -ikch_+, \\ \beta(Q - A) &= -(ikc + iM\alpha c)h_+, \\ p_- &= -ikc(P - A - Q) + iM\alpha c(A + Q), \end{aligned} \quad (12)$$

откуда

$$\begin{aligned}
 h_+ &= -\frac{2i(k+M\alpha)}{c} \frac{A}{H(\alpha)} + \frac{1}{c^2} \frac{p_-}{H(\alpha)}, \\
 P &= AT(\alpha) - \frac{ik}{c} \frac{p_-}{\gamma H(\alpha)} = \frac{ikch_+}{\gamma}, \\
 Q &= AR(\alpha) - \frac{i(k+M\alpha)}{c} \frac{p_-}{\beta H(\alpha)} = A - \frac{i(k+M\alpha)ch_+}{\beta}, \\
 R(\alpha) &= \frac{k^2\beta - (k+M\alpha)^2\gamma}{k^2\beta + (k+M\alpha)^2\gamma}, \\
 T(\alpha) &= \frac{2k(k+M\alpha)\beta}{k^2\beta + (k+M\alpha)^2\gamma}, \\
 H(\alpha) &= \frac{k^2\beta + (k+M\alpha)^2\gamma}{\gamma\beta}.
 \end{aligned} \tag{13}$$

Аргументы у функций  $\gamma$ ,  $\beta$ ,  $A$ ,  $P$ ,  $Q$ ,  $h_+$ ,  $p_-$  для краткости мы будем опускать, подразумевая, что все они – функции от  $\alpha$ . Фурье-образы смещений и разности давлений согласно (4), (5) и (10) являются “+”-функцией и “-”-функцией,  $h_+$  и  $p_-$ , и регулярны в верхней  $R_+$  и нижней  $R_-$  полуплоскостях соответственно. Функции  $\gamma$ ,  $\beta$ ,  $A$ ,  $P$ ,  $Q$  регулярны в полосе пересечения  $R_+$  и  $R_-$ . Легко видеть, что эта полоса проходит между точками ветвления  $k$  и  $-\frac{k}{1+M}$  функций  $\gamma$  и  $\beta$  (рис. 2). Заметим, что функции  $R(\alpha)$  и  $T(\alpha)$  определяют соответственно коэффициенты отражения и прохождения плоской волны, падающей из движущейся среды на бесконечный тангенциальный разрыв скорости, т.е. когда пластина отсутствует. Действительно, в отсутствие пластины, разделяющей области I и II,  $p_- \equiv 0$  и (13) дают решение задачи о падении волны на тангенциальный разрыв [17, 18].

Итак, у нас есть три уравнения (12) с четырьмя неизвестными функциями  $P$ ,  $Q$ ,  $h_+$ ,  $p_-$ . Очевидно, что нули  $H(\alpha)$  являются полюсами этих функций. Можно показать, что при выбранных разрезах в  $\alpha$ -плоскости, при  $M < 2$  уравнение  $H(\alpha) = 0$  имеет два корня

$$\begin{aligned}
 \alpha_0 &= k \frac{-M/2 + i\sqrt{\sqrt{1+M^2}-1} - M^2/4}{\sqrt{1+M^2}-1} = \\
 &= -k \cos\left(\frac{\pi}{4} + i\delta_0\right),
 \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
 \alpha_0^* &= k \frac{-M/2 - i\sqrt{\sqrt{1+M^2}-1} - M^2/4}{\sqrt{1+M^2}-1} = \\
 &= -k \cos\left(\frac{\pi}{4} - i\delta_0\right),
 \end{aligned} \tag{15}$$

где  $\text{ch}\delta_0 = \frac{1 + \sqrt{1+M^2}}{M\sqrt{2}}$ . При действительном  $k$  они комплексно сопряжены и  $\alpha_0$  соответствует неустойчивости Кельвина–Гельмгольца [19]. При  $M \geq 2\sqrt{2}$ ,  $\alpha_0$ ,  $\alpha_0^*$  и  $k$  лежат на одной прямой и, следовательно (при переходе к действительному  $k$ ), двумерные возмущения тангенциального разрыва становятся нейтрально устойчивыми. При  $M > 2$  появляется еще один корень

$$\alpha_1 = -\frac{k}{2M}, \tag{16}$$

который соответствует нейтрально устойчивым волнам и в контексте настоящей работы нас не интересует.

Выделим в  $H(\alpha)$  явно нули  $\alpha$  и  $\alpha_0^*$ :

$$H(\alpha) = \mu(\alpha)(\alpha - \alpha_0)(\alpha - \alpha_0^*).$$

Представим  $\mu(\alpha)$  в виде произведения “+” и “-”-функций  $\mu(\alpha) = \mu_+(\alpha)\mu_-(\alpha)$  [7, 9, 20]. При этом  $\mu_-(\alpha)$  не имеет нулей в  $\alpha$ -плоскости, а  $\mu_+(\alpha)$  не имеет нулей в  $R_+$ .

Для получения решения, учитывающего принцип причинности, следуя [21, 22], ищем сначала решение с большим  $k_2$ , что соответствует быстрому включению возбуждающего поля. Искомое решение  $k_2 \rightarrow 0$  рассматриваем как аналитическое продолжение решения с большим  $k_2$ . Это означает, что исходно (при больших  $k_2$ ) полюсы  $\alpha_0$ ,  $\alpha_0^*$  лежат в нижней полуплоскости (рис. 2), поэтому их нужно отнести к  $H_+(\alpha)$ , так как именно функция  $\frac{1}{\mu_+(\alpha)(\alpha - \alpha_0)(\alpha - \alpha_0^*)}$  будет регулярна в  $R_+$  [8, 9, 20, 23, 24]. Таким образом, для  $H(\alpha)$  мы имеем следующее разбиение

$$H(\alpha) = H_+(\alpha)H_-(\alpha),$$

где

$$\begin{aligned}
 H_+(\alpha) &= \mu_+(\alpha)(\alpha - \alpha_0)(\alpha - \alpha_0^*), \\
 H_-(\alpha) &= \mu_-(\alpha).
 \end{aligned}$$

Подчеркнем еще раз, что все нули функции  $H(\alpha)$  содержатся в  $H_+(\alpha)$ , в то время как  $H_-(\alpha)$  нулей в  $\alpha$ -плоскости не имеет. Удобные для аналитического и численного исследования выражения были получены в [9]:

$$H_+ = H(\alpha)\beta_- \exp(-\Lambda(\alpha)), \quad H_- = \frac{\exp(\Lambda(\alpha))}{\beta_-}.$$

Здесь

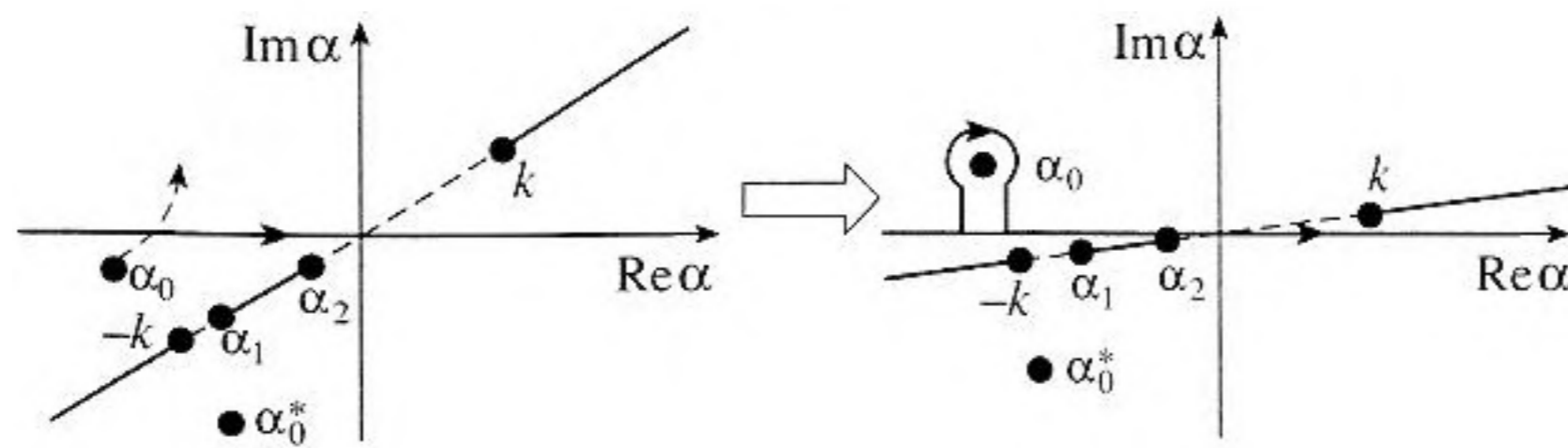


Рис. 3. Переход полюса  $\alpha_0$  в верхнюю полуплоскость при  $\text{Im} k \rightarrow 0$ .

$$\Lambda(\alpha) = -\frac{1}{\pi} \int_1^{\text{Lim}} \frac{\arctg \left[ \frac{|\sqrt{\xi^2 - 1}| (1 + M\xi)^2}{\sqrt{(M^2 - 1)(\xi - \alpha_1/k)(\xi - \alpha_2/k)}} \right] - \frac{\pi}{2}}{\xi - \alpha/k} d\xi,$$

$\text{Lim} = \frac{1}{1 - M}$  при  $M < 1$ ,  $\text{Lim} = +\infty$  при  $M > 1$ . Легко показать, что при  $M < 1$   $H_- \sim \alpha^{-1/2}$ ,  $\alpha \rightarrow \infty$  в  $R_-$ ,  $H_+ \sim \alpha^{3/2}$ ,  $\alpha \rightarrow \infty$  в  $R_+$ , а при  $M > 1$ ,  $H_- \sim 1$ ,  $\alpha \rightarrow \infty$  в  $R_-$ ,  $H_+ \sim \alpha$ ,  $\alpha \rightarrow \infty$  в  $R_+$ .

Учитывая факторизацию  $H(\alpha)$ , из (13) можно получить

$$c^2 H_+ h_+ + 2i(k + M\alpha)c \frac{A}{H_-} = \frac{p_-}{H_-}.$$

Поскольку функцию, регулярную в полосе  $R_+ \cap R_-$ , можно представить [7] в виде суммы двух функций, регулярных в  $R_+$  и в  $R_-$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{(k + M\alpha)A}{H_-} &= \frac{(k + M\alpha)A_-}{H_-} + \frac{(k + M\alpha)A_+}{H_-} = \\ &= (k + M\alpha) \frac{A_-}{H_-} + \left( \frac{(k + M\alpha)A_+}{H_-} \right)_- + \left( \frac{(k + M\alpha)A_+}{H_-} \right)_+ \end{aligned} \quad (17)$$

Переносим “+” и “-”-функции в левую и правую части уравнения соответственно, получим окончательно

$$\begin{aligned} J(\alpha) &= c^2 H_+ h_+ + 2ic \left( \frac{(k + M\alpha)A_+}{H_-} \right)_+ = \\ &= \frac{p_-}{H_-} - 2i(k + M\alpha)c \frac{A_-}{H_-} - 2ic \left( \frac{(k + M\alpha)A}{H_-} \right)_- \end{aligned} \quad (18)$$

Уравнение (18) является основным уравнением метода Винера–Хопфа в данной задаче. Левая часть этого равенства определяется функцией, регулярной в  $R_+$ , а правая – в  $R_-$ , а поскольку эти области перекрываются, то левая и правая части, будучи равными в этой области перекрытия, определяют функцию  $J(\alpha)$ , регулярную на всей  $\alpha$ -плоскости. Если  $J(\alpha)$  имеет на бесконечности алгебраический рост, то, согласно обобщенной теореме Лиувилля, она представляет собой полином

целой степени от  $\alpha$ , причем если  $J(\alpha) \sim \alpha^\mu$ ,  $\alpha \rightarrow \infty$  в  $R_+$ ,  $J(\alpha) \sim \alpha^\nu$ ,  $\alpha \rightarrow \infty$  в  $R_-$ , то степень этого полинома равна  $\eta = \max\{\mu, \nu\}$ , где квадратные скобки обозначают целую часть числа [7]. Итак, зная  $J(\alpha)$  с точностью до коэффициентов полинома, находим из (18), (13) неизвестные функции. Коэффициенты полинома определяются из физического условия поведения решения на кромке (условие Жуковского–Кутта).

Таким образом, для больших значений  $k_2$  мы определили все неизвестные функции и можем записать решение в виде обратного преобразования Фурье

$$h = \frac{1}{2\pi} \int_{i\tau - \infty}^{i\tau + \infty} h_+ \exp(-i\alpha x) d\alpha,$$

$$p = \frac{1}{2\pi} \int_{i\tau - \infty}^{i\tau + \infty} p_- \exp(-i\alpha x) d\alpha,$$

$$\varphi_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{i\tau - \infty}^{i\tau + \infty} P \exp(-i\alpha x - \gamma y) d\alpha,$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{i\tau - \infty}^{i\tau + \infty} Q \exp(-i\alpha x + \beta y) d\alpha.$$

В этих интегралах контур интегрирования параллелен действительной оси  $\text{Re} \alpha$  и лежит в полосе  $R_+ \cap R_-$ , где функции  $P, Q, h_+, p_-$  регулярны. Теперь будем уменьшать  $k_2$ . При этом полюсы  $\alpha_0, \alpha_0^*$  приближаются к действительной оси и при некотором  $k_2 > 0$  полюс  $\alpha_0$  пересекает ее. Аналитическому продолжению решения будет соответствовать интеграл по контуру, лежащему на действительной оси, деформированному так, чтобы он продолжал огибать полюс  $\alpha_0$  сверху (рис. 3),

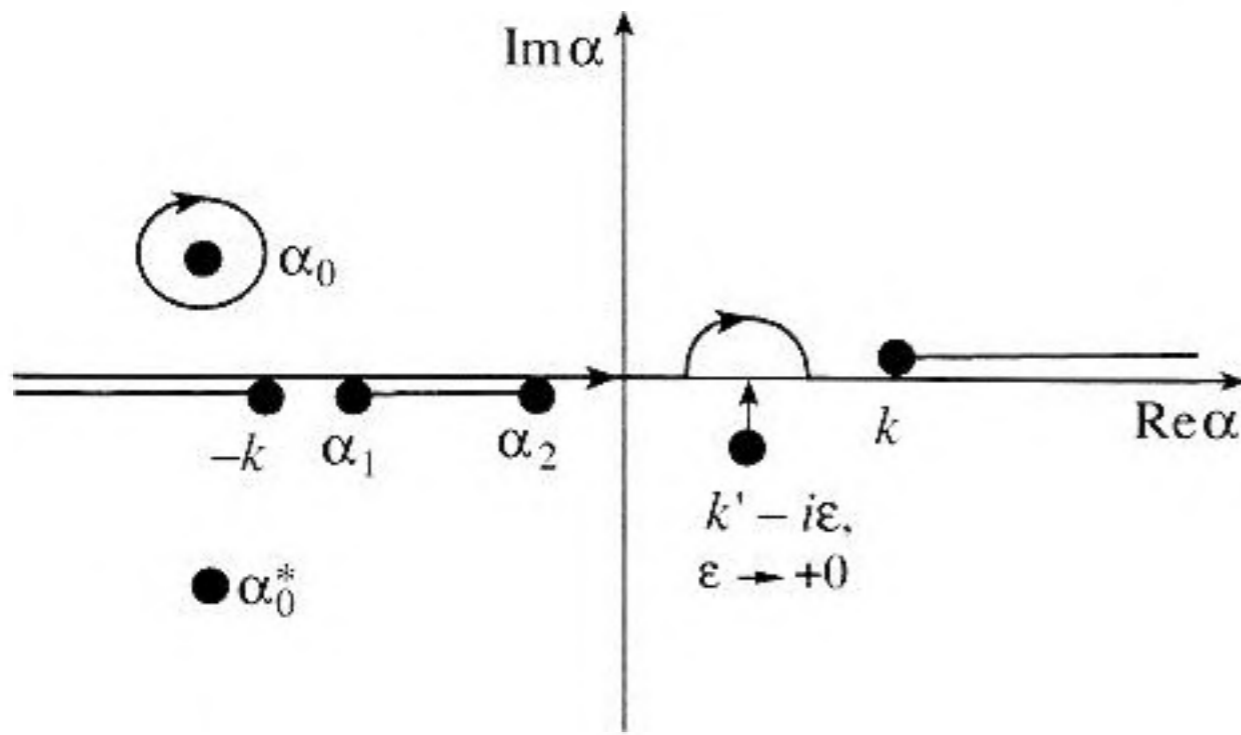


Рис. 4. Обход полюса, связанного с падающей волной.

т.е. к интегралу вдоль действительной оси мы должны прибавлять вклад от вычета в полюсе.

При получении выписанных выше выражений конкретный вид внешнего поля  $\Phi_{i2}$  не использовался. Пусть теперь  $\Phi_{i2}$  соответствует плоской волне, т.е. определяется выражением (1), где  $k$  действительно и положительно. Легко показать, что

$$\begin{aligned} \Phi_{i2} &= b \exp\left(-ikct + i \frac{k \sin \theta_{i2}}{1 - M \cos \theta_{i2}} y\right) \times \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-i \frac{k \cos \theta_{i2}}{1 - M \cos \theta_{i2}} x + i \alpha x\right) dx = \\ &= b \exp(-ikct + ik''y) 2\pi \delta(\alpha - k'), \end{aligned} \tag{19}$$

где

$$k' = \frac{k \cos \theta_{i2}}{1 - M \cos \theta_{i2}}, \quad k'' = \frac{k \sin \theta_{i2}}{1 - M \cos \theta_{i2}}.$$

Учитывая наличие  $\delta$ -функции и определение функции  $\beta(\alpha)$ , опуская временной множитель, можно записать  $\Phi_{i2}$  в виде

$$\begin{aligned} \Phi_{i2} &= A(\alpha) \exp(-\beta y) = b \exp(-\beta y) 2\pi \delta(\alpha - k') = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{b i \exp(-\beta y)}{\alpha - (k' - i\epsilon)} + \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{b(-i) \exp(-\beta y)}{\alpha - (k' + i\epsilon)}. \end{aligned} \tag{20}$$

Во втором равенстве первое слагаемое, очевидно, есть “+”-функция (регулярна при  $\text{Im} \alpha > -\epsilon$ ), а второе – “-”-функция (регулярна при  $\text{Im} \alpha < \epsilon$ ). Это выражение задает представление для функции  $A(\alpha)$  в виде  $A = A_+ + A_-$ . Слагаемые  $A_+$  и  $A_-$  имеют по одному простому полюсу и при  $\alpha \rightarrow \infty$  ведут себя, как  $\alpha^{-1}$ . Можно показать строго или угадать, что

$$\begin{aligned} \frac{(k + M\alpha)A_+(\alpha)}{H_-(\alpha)} &= \frac{(k + Mk')A_+(\alpha)}{H_-(k')} + \\ &+ \left( \frac{(k + M\alpha)A_+(\alpha)}{H_-(\alpha)} - \frac{(k + Mk')A_+(\alpha)}{H_-(k')} \right), \end{aligned} \tag{21}$$

где, очевидно,

$$\begin{aligned} \left( \frac{(k + M\alpha)A_+(\alpha)}{H_-(\alpha)} \right)_+ &= \frac{(k + Mk')A_+(\alpha)}{H_-(k')}, \\ \left( \frac{(k + M\alpha)A_+(\alpha)}{H_-(\alpha)} \right)_- &= \\ &= \frac{(k + M\alpha)A_+(\alpha)}{H_-(\alpha)} - \frac{(k + Mk')A_+(\alpha)}{H_-(k')}. \end{aligned}$$

Учитывая поведение  $A_+, A_-$  и  $H_+, H_-$  при  $\alpha \rightarrow \infty$ , а также предполагая, что функции  $p$  и  $h$  интегрируемы вблизи кромки, на основании теоремы Лиувилля заключаем, что  $J(\alpha) = C_0$ , где  $C_0 = \text{const}$ . Тогда из (18) получаем

$$\begin{aligned} h_+ &= -\frac{2i}{cH_+} \left( \frac{(k + M\alpha)A_+}{H_-} \right)_+ + \frac{C_0}{c^2 H_+}, \\ p_- &= 2i(k + M\alpha)cA_- + \\ &+ 2ic \left( \frac{(k + M\alpha)A_+}{H_-} \right)_- H_- + C_0 H_-. \end{aligned} \tag{22}$$

Потребуем выполнения на кромке условия Жуковского-Кутта, т.е. потребуем, чтобы поток сходил с кромки как можно более гладко [25]. Для этого, очевидно, особенность функций  $p$  и  $h$  на кромке должна быть минимальной, что соответствует условию  $C_0 = 0$ .

Выполняя обратное преобразование Фурье с учетом вклада вычета в полюсе  $\alpha = \alpha_0 = \text{Re} \alpha_0 + i \text{Im} \alpha_0$  ( $\text{Im} \alpha_0 > 0$ ), получим

$$\begin{aligned} h &= \frac{1}{2\pi} \int_{i\tau - \infty}^{i\tau + \infty} h_+ \exp(-ikct - i\alpha x) d\alpha - \\ &- i \text{res}_{\alpha = \alpha_0} (h_+) \exp(\text{Im} \alpha_0 x - ikct - i \text{Re} \alpha_0 x), \end{aligned} \tag{24}$$

где  $\text{res}_{\alpha = \alpha_0} (h_+)$  обозначает вычет функции  $h_+$  в полюсе  $\alpha = \alpha_0$ . Аналогично выписываются выражения для  $p, \Phi_1, \Phi_2$ . В интеграле в (24), с учетом (22), можно упростить подынтегральную функцию  $h_+$ ,

используя  $\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{bi}{\alpha - (k' - i\epsilon)} = \frac{bi}{\alpha - k'}$  и условие, что контур интегрирования обходит полюс  $k'$  сверху (рис. 4). Таким образом, волна неустойчивости для смещения границы раздела сред определяется падающим полем и дается выражением

$$h_2(x, t) = h_{02} \exp(-ikct - i\alpha_0 x), \tag{25}$$

где

$$h_{02} \equiv \frac{2(k + Mk')bi}{cH_-(k')} \frac{1}{\alpha_0 - k'} \frac{1}{H'_+(\alpha_0)}, \tag{26}$$

$H'_+(\alpha_0)$  обозначает значение производной функции  $H_+(\alpha)$  в точке  $\alpha_0$ .

Следует сказать, что выражение (25) носит универсальный характер. При произвольном способе возбуждения среды волна неустойчивости связана с обходом корня  $\alpha_0$ , соответствующего неустойчивости Кельвина-Гельмгольца. При акустическом возбуждении плоской волной со стороны потока амплитуда волны неустойчивости связана с характеристиками возбуждающего поля выражением (26).

Поскольку главная цель работы показать возможность гашения волны неустойчивости с помощью специально подобранного управления со стороны покоящейся среды, мы привели полный вывод выражения (25). Рассмотрим падающую звуковую волну со стороны покоящейся среды, которую будем называть управляющей, имея в виду создание с ее помощью антиволны неустойчивости, уничтожающей волну (25).

Итак, пусть дополнительно к исходной волне (1) на границу раздела из покоящейся среды падает плоская волна, потенциал скорости которой равен

$$\varphi_{I1} = a \exp(-ikct - ik \cos \theta_{i1} x + ik \sin \theta_{i1} y). \quad (27)$$

Решение будем искать в виде  $\varphi_I = \varphi_{I1} + \varphi_{I2}$ ,  $y > 0$  и  $\varphi_{II} = \varphi_2$ ,  $y < 0$ . Опуская детальные рассуждения, запишем решение, аналогичное (24)

$$h = \frac{1}{2\pi} \int_{i\tau - \infty}^{i\tau + \infty} h_+ \exp(-ikct - i\alpha x) d\alpha -$$

$$- i \operatorname{res}_{\alpha = \alpha_0} (h_+) \exp(\operatorname{Im} \alpha_0 x - ikct - i \operatorname{Re} \alpha_0 x),$$

$$h_+ = \frac{2ik}{cH_-(k \cos \theta_{i1})} \frac{A_+}{H_+}, \quad A_+ = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{ai}{\alpha - (k \cos \theta_{i1} - i\epsilon)}$$

Тогда для смещения границы раздела сред, соответствующего волне неустойчивости, порождаемой управляющей волной (27), получим:

$$h_1(x, t) = \frac{2kai}{cH_-(k \cos \theta_{i1})} \frac{\exp(-ikct - i\alpha_0 x)}{H'_+(\alpha_0)(\alpha_0 - k \cos \theta_{i1})}. \quad (28)$$

Поскольку задача линейная, решение представляет собой сумму волн неустойчивости (25) и (28), создаваемых соответственно исходным полем (1), падающим из движущейся среды, и управляющим полем (27), падающим из неподвижной среды. Для гашения волны неустойчивости (25) частота управляющего воздействия в (27), очевидно, должна совпадать с исходной. Поскольку антиволна будет соответствовать тому же полюсу  $\alpha_0$  в комплексной плоскости  $\alpha$ , ее зависимость от  $x$  будет той же самой при любых углах падения исходного и управляющего полей. Поэтому необходимо подобрать только амплитуду и фазу волны

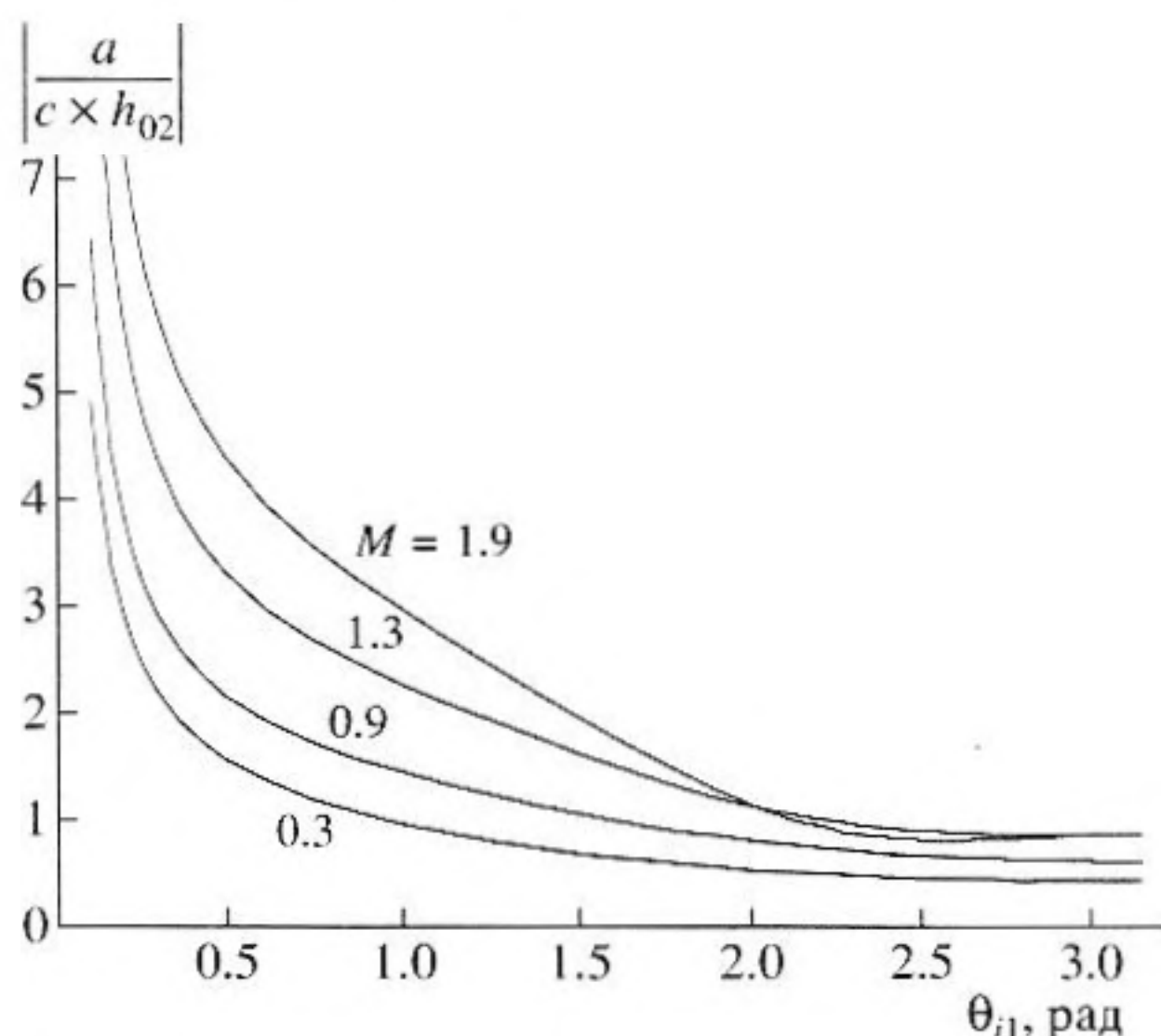


Рис. 5. Амплитуда  $a$  управляющего поля, обеспечивающая уничтожение волны неустойчивости  $h_{02}$  при различных числах Маха  $M$  и углах воздействия  $\theta_{i1}$ .

(27) так, чтобы суммарная амплитуда волны неустойчивости обратилась в ноль. При этом можно подобрать угол падения управляющей волны, исходя, например, из условия ее минимальной амплитуды. Наоборот, зафиксировав угол падения (из соображения пространственного удобства при создании управляющей системы), всегда можно подобрать амплитуду и фазу управляющего поля, чтобы полностью погасить исходную волну неустойчивости. Рассмотрим эти ситуации количественно, опираясь на выписанные выше решения.

Для полного взаимного гашения волн неустойчивости потребуем, чтобы суммарное смещение границы раздела  $h(x, t) = h_1 + h_2$  было равно нулю, откуда получаем связь амплитуд и фаз потенциалов  $\varphi_{I1}$  и  $\varphi_{I2}$

$$a = \left(1 + M \frac{k'}{k}\right) \frac{H_-(k \cos \theta_{i1})}{H_-(k')} \frac{\alpha_0 - k \cos \theta_{i1}}{\alpha_0 - k'} b. \quad (29)$$

Предположим, что мы не знаем характеристик возбуждающего поля, а знаем (измерили) только амплитуду и фазу волны неустойчивости  $h_{02}$ . Тогда (29) с учетом (26) определяет характеристики управляющего поля

$$a = \frac{1}{2} ic \left( \cos \theta_{i1} - \frac{\alpha_0}{k} \right) H'_+(\alpha_0) H_-(k \cos \theta_{i1}) h_{02}$$

или, после подстановки выражения (14),

$$a = \frac{h_{02}}{2} ic H_-(k \cos \theta_{i1}) \left( \cos \theta_{i1} + \cos \left( \frac{\pi}{4} + i\delta_0 \right) \right) \times$$

$$\times H'_+ \left( -k \cos \left( \frac{\pi}{4} + i\delta_0 \right) \right). \quad (30)$$

Итак, чтобы полностью погасить волну неустойчивости (25) плоской волной (27), падающей из неподвижной среды под углом  $\theta_{i1}$ , нужно выбрать ее комплексную амплитуду  $a$  в соответствии с (30). На рис. 5 показана зависимость модуля безразмерной величины  $a/ch_{02}$  от угла  $\theta_{i1}$  (в радианах) для различных чисел Маха. Как уже отмечалось, полное гашение волны неустойчивости можно осуществить при любых углах падения управляющего поля. При этом наиболее выгодно запускать управляющую волну вниз по потоку, т.к. в этом случае ее амплитуда будет минимальна и, как можно вычислить из (29), порядка амплитуды возбуждающего поля. Последнее обстоятельство особенно важно: поскольку развитие волн неустойчивости вызывается малыми возмущениями в потоке, то интенсивность управляющего поля также может быть мала.

Таким образом, в рамках выбранной двумерной модели показана принципиальная возможность эффективного управления волной неустойчивости путем подбора управляющего акустического воздействия. Интенсивность такого воздействия может быть порядка величины возмущений в потоке, вызывающих развитие исходной волны неустойчивости, т.е. весьма мало вблизи кромки сопла. Для реализации такого подхода необходимо независимым образом определить (измерить) начальные параметры волны неустойчивости, сходящей с кромки сопла (в той совокупности возмущений, которые имеют место вблизи кромки), и в соответствии с этим подобрать внешнее воздействие, полностью гасящее волну неустойчивости. В настоящее время нами проводится анализ характеристик ближнего поля, необходимых для идентификации волны неустойчивости.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 08-01-00697).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Tam C.K.W., Morris P.J. The radiation of sound by the instability waves of a compressible plane turbulent shear layer // *J. Fluid Mech.* 1980. V. 98 P. 349–381.
2. Tam C.K.W., Chen P. Turbulent mixing noise from supersonic jets // *AIAA Paper.* 1993. 93–4408.
3. Tam C. K. W. Jet noise generated by large-scale coherent motion // *Aeroacoustics of flight vehicles. Theory and practice.* ed. H. Hubbard, 1991. V. 1. P. 311–390. ASA/AIP.
4. Kopyev V.F., Chernyshev S.A., Zaitsev M.Yu., Kuznetsov V.M. Experimental validation of instability wave theory for round supersonic jet // *AIAA Paper.* 2006–2595.
5. Kopyev V.F. On the possibility and prospects of turbulent flow noise control // *CD-ROM Proceedings. FM11–12156. XXI ICTAM.* 15–21 August 2004. Warsaw. Poland.
6. Kopyev V.F., Ostrikov N.N., Chernyshev S.A., Elliot J.W. Aeroacoustics of supersonic jet issued from corrugated nozzle: new approach and prospects // *Int. J. of Aeroacoustics.* 2004. V. 3. № 3. P. 199–228.
7. Нобл Б. Применение метода Винера–Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М.: ИЛ, 1952, 280 с.
8. Crighthton D.G., Leppington F.G. Radiation properties of the semi-infinite vortex sheet: the initial value problem // *J. Fluid Mech.* 1974. V. 64. № 2. P. 393–414.
9. Morgan J.D. The interaction of sound with a semi-infinite vortex sheet // *Q. J. Mech. Appl. Math.* 1974. V. 27. P. 465–487.
10. Munt R.M. The interaction of sound with a subsonic jet issuing from a semi-infinite cylindrical pipe // *J. Fluid Mech.* 1977. V. 83. № 4. P. 609–640.
11. Munt R.M. Acoustic transmission properties of a jet pipe with subsonic jet flow: I. The cold jet reflection coefficient // *J. Sound Vib.* 1990. V. 142. № 3. P. 413–436.
12. Миронов М.А. Импеданс отверстия в экране, отделяющем движущуюся среду от неподвижной // *Акуст. журн.* 1982. Т. 28. № 4. С. 528–534.
13. Howe M.S. The influence of mean shear on unsteady aperture flow, with application to acoustical diffraction and self-sustained cavity oscillations // *J. Fluid Mech.* 1981. V. 109. P. 125–146.
14. Лямшев Л.М. Дифракция звука на полубесконечной упругой пластине в движущейся среде // *Акуст. журн.* 1966. Т. 12. № 3. С. 340–346.
15. Семенов Ю.Б. Излучение звука тонкой полубесконечной пластиной, возбуждаемой турбулентным пограничным слоем // *Акуст. журн.* 1990. Т. 36. № 6. С. 1077–1082.
16. Orzag S.A., Crow S.C. Instability of a vortex sheet leaving a semi-infinite plate // *Stud. Appl. Math.* 1970. V. 49. P. 167–181.
17. Miles J.W. On the reflection of sound at an interface of relative motion // *JASA.* 1957. V. 29. P. 226.
18. Ribner H.S. Reflection, transmission and amplification of sound by moving medium // *JASA.* 1957. V. 29. P. 435.
19. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. § 84. М.: Наука, 1986. С. 736.
20. Peak N. The viscous interaction between sound waves and the trailing edge of a supersonic splitter plate // *J. Fluid Mech.* 1994. V. 264. P. 321–342.
21. Briggs R.J. Electron stream interaction with plasmas. MIT press, 1964. P. 187.
22. Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Физическая кинетика. § 62. М.: Наука, 1979. С. 528.
23. Tam C.K.W. Directional acoustic radiation from a supersonic jet generated by shear layer instability // *J. Fluid Mech.* 1971. V. 46 P. 757–768.
24. Миронов М.А. Воздействие гармонического источника объемной скорости на течение с плоским тангенциальным разрывом // *Акуст. журн.* 1975. Т. 21. № 1. С. 79–85.
25. Crighthton D.G. The Kutta condition in unsteady flow // *Ann. Rev. Fluid Mech.* 1985. V. 17. P. 411–445.



## Control over the Instability Wave in Terms of the Two-Dimensional Model of a Nozzle Edge

V. F. Kop'ev and G. A. Faranosov

*Zhukovsky Central Institute of Aerohydrodynamics, Moscow Complex TsAGI Branch,  
ul. Radio 17, Moscow, 105005 Russia  
e-mail: vkopiev@mx.iki.rssi.ru*

**Abstract**—The problem on the generation of the instability wave leaving the edge of a half-plane that separates an immobile medium from a moving medium is considered. It is assumed that the instability wave is initiated by an acoustic wave arriving from the moving medium. The possibility of suppressing the instability wave by another acoustic wave incident from the nonflowing medium is considered. It is shown that the suppression is always possible by adjusting the amplitude and phase of the control perturbation to the parameters of the instability wave.