

## ЛУЧЕВОЕ ОПИСАНИЕ ПОЛЯ РАСПРЕДЕЛЕННОГО ИСТОЧНИКА В ВОЛНОВОДЕ

© 2008 г. А. Л. Вировлянский, А. Ю. Казарова, Л. Я. Любавин, Д. В. Нефедова

Институт прикладной физики РАН  
603950 Нижний Новгород, ул. Ульянова 46  
E-mail: viro@hydro.appl.sci-nnov.ru  
Поступила в редакцию 17.10.07 г.

Предложена процедура построения лучевого описания поля распределенного источника на длинных трассах. Она представляет собой обобщение известного преобразования, связывающего модовое и лучевое представления поля точечного источника в волноводе. Этот результат использован для изучения структуры волнового пучка, излученного вертикальной антенной. Рассмотрен пример пучка, для которого простое аналитическое описание может быть получено не только на длинных трассах, но и вблизи источника. Проанализировано распыление пучка с увеличением расстояния.

PACS: 43.30.Cq, 43.20.Dk

### ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В данной работе предложена процедура построения лучевого описания поля распределенного монохроматического источника в плоскостром акустическом волноводе. Чтобы не загромождать изложение непринципиальными деталями, задача рассматривается в простейшей постановке. Предполагается, что монохроматический источник звука представляет собой вертикальную антенну (нить). При этом поле обладает цилиндрической симметрией. Его комплексная амплитуда выражается функцией  $u(r, z)$ , где  $z$  – глубина, а  $r$  – расстояние от антенны (она расположена вдоль линии  $r = 0$ ) в горизонтальной плоскости. Для сокращения выкладок мы пользуемся малоугловым приближением и считаем, что  $u(r, z)$  удовлетворяет параболическому уравнению

$$\frac{i \partial u}{k \partial r} = -\frac{1}{2k^2} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + U(z)u, \quad (1)$$

где

$$U(z) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{c_0^2}{c^2(z)} \right), \quad (2)$$

$k$  – волновое число,  $c(z)$  – профиль скорости звука в волноводе,  $c_0$  – постоянная скорость звука.

Начнем с того, что кратко остановимся на введении лучевого описания поля распределенного источника в свободном пространстве с  $c(z) = c_0$  ( $U = 0$ ). В дальнейшем мы увидим, что между решениями рассматриваемой задачи в свободном пространстве и волноводе имеется определенная аналогия. Лучевым подходом (приближением

геометрической оптики) можно пользоваться лишь в том случае, когда поле в окрестностях точки наблюдения представляет собой либо квазиплоскую волну, либо суперпозицию нескольких таких волн. В свободном пространстве данная ситуация всегда реализуется на больших удалениях от источника [1]. Это следует из формулы

$$u(r, z) = \int dz' u(0, z') \exp\left(\frac{ik(z-z')^2}{2r}\right), \quad (3)$$

связывающей поле в точке наблюдения  $(r, z)$  с полем на апертуре антенны  $u(0, z)$ . В дальней зоне антенны, то есть при  $r \gg b^2/\lambda$  ( $b$  – размер апертуры,  $\lambda = 2\pi/k$  – длина волны), имеем

$$u(r, \lambda) = A \exp(ikS), \quad (4)$$

где

$$S = \frac{z^2}{2r}, \quad (5)$$

$$A = \int dz' u(0, z') \exp(ikz'tg\chi), \quad (6)$$

$\chi = \arctg(z/r)$  – угол между горизонтальной плоскостью и прямой, соединяющей центр антенны  $(0, 0)$  с точкой наблюдения. Согласно (4), поле в точке  $(r, z)$  можно интерпретировать как вклад приходящего туда луча с эйконалом  $S$  и амплитудой  $A$ . Угол прихода луча  $\chi' = \arctg(\partial S/\partial z)$  оказывается равным  $\chi$ . Зависимость  $A$  от  $\chi$  определяет диаграмму направленности источника. Принципиально важно, что каким бы сложным и изрезанным ни было поле при  $r = 0$ , на длинных трассах оно разглаживается и в окрестности точки наблюдения имеет вид квазиплоской волны.



Поэтому введение лучевого описания на длинных трассах возможно всегда.

В некоторых случаях лучевое описание можно ввести и на малых удалениях от источника. Очевидным примером является линейная синфазная антенна размера  $b \gg \lambda$ . Она излучает волновой пучок, форма которого показана на рис. 1. На дистанциях  $r < b^2/\lambda$  – внутри прожекторной зоны антенны – ширина пучка не сильно отличается от  $b$  и линии постоянной фазы (вдали от краев пучка) примерно параллельны антенне. Соответственно, лучи в этой области представляют собой горизонтальные прямые. В качестве грубой оценки длины прожекторной зоны примем

$$r_* = b^2/\lambda. \quad (7)$$

В дальней зоне, то есть при  $r \gg r_*$ , поле характеризуется другой системой лучей, о которой шла речь выше. Продолжения этих лучей в область малых  $r$ , показанные на рис. 1 пунктирными линиями, пересекаются в центре антенны.

Формулой (3) в волноводе можно пользоваться лишь на малых дистанциях  $r < r_{cr}$ , где  $r_{cr}$  – оценка максимального расстояния, до которого звуковое поле еще не успевает почувствовать зависимость скорости звука от глубины  $z$ . Если  $r_* < r_{cr}$ , то реальный распределенный источник можно приближенно заменить точечным с эффективной диаграммой направленности (или коэффициентом концентрации [2])  $A(\chi)$ , учитывающей, что лучи под разными углами выходят с разными весовыми коэффициентами.

Такой способ введения лучевого описания поля распределенного источника в волноводе, разумеется, применим далеко не всегда. В данной статье предложен более строгий и универсальный подход для решения этой задачи. Отправной точкой нашего анализа служит модовое представление поля, то есть представление  $u(r, z)$  в виде суперпозиции нормальных мод волновода, которое применимо на любых расстояниях. Это выражение преобразуется с помощью формулы суммирования Пуассона. Хорошо известно, что подобная процедура переводит модовое представление поля точечного источника в плоскостном волноводе в лучевое [2, 3]. Оказывается, аналогичный результат получается и для распределенного источника. Однако, как и в случае свободного пространства, лучевое описание поля в общем случае можно ввести лишь на достаточно длинных трассах.

В качестве приложения мы рассматриваем поле вертикальной антенны, излучающей волновой пучок, который вначале локализован в окрестности некоторого опорного луча. Рассмотрен пример пучка, для которого аналитическое описание может быть получено не только на достаточно

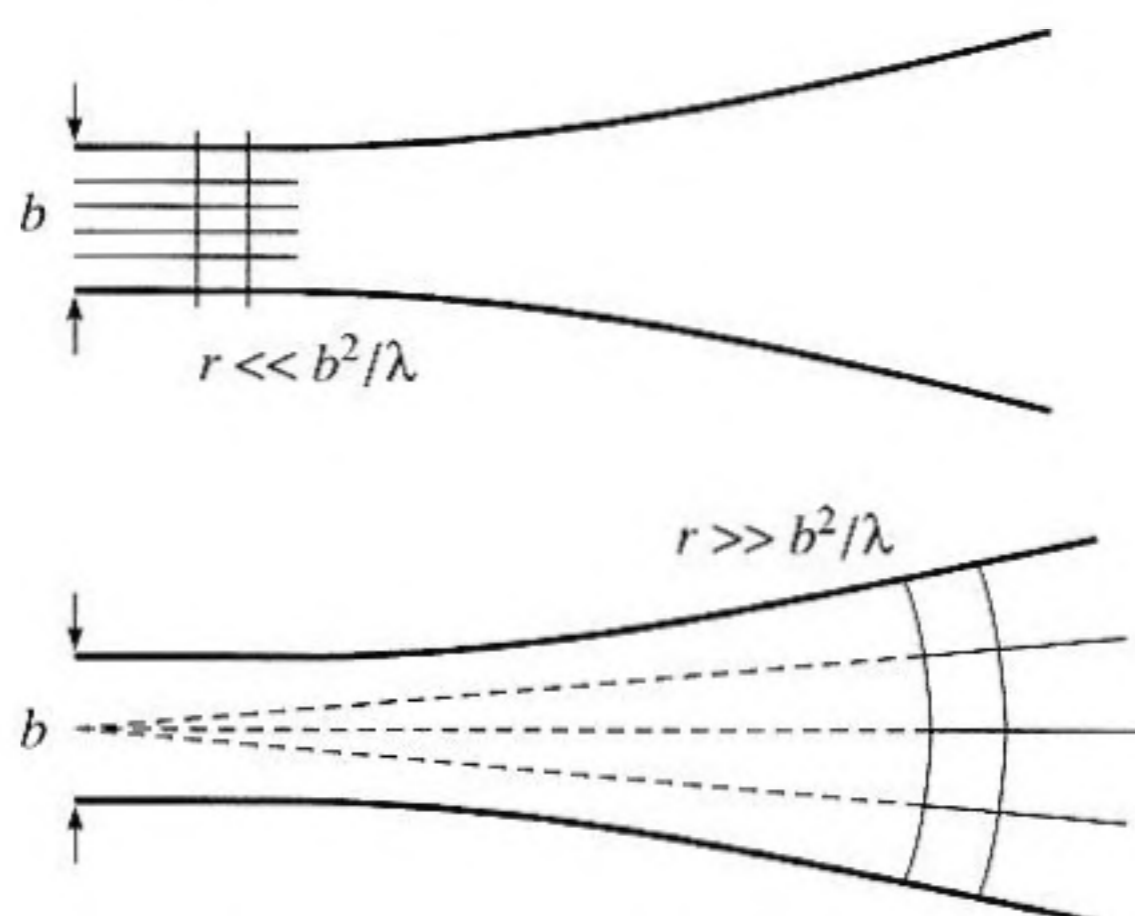


Рис. 1. Волновой пучок, созданный линейной синфазной антенной в свободном пространстве. Вверху: система лучей в ближней (прожекторной) зоне. Линии постоянной фазы и лучи представляют собой отрезки прямых параллельных и перпендикулярных антенне, соответственно. Внизу: система лучей в дальней зоне. Линии постоянной фазы представляют собой отрезки параболы. Продолжения лучей в сторону малых расстояний, показанные пунктирными линиями, пересекаются в центре антенны.

длинных трассах, где применим лучевой подход, но и вблизи источника. Найдена оценка предельной дистанции – мы называем ее прожекторной зоной антенны в волноводе, – до которой пучок распространяется без существенного расплывания. Близкий результат ранее был получен в работе [4].

## ГАМИЛЬТОНОВ ФОРМАЛИЗМ ДЛЯ АНАЛИЗА ЛУЧЕВОЙ СТРУКТУРЫ ПОЛЯ

В этом разделе приведены известные формулы для расчета лучевых траекторий, которые затем будут использованы в основной части работы.

### Переменные импульс-координата

В рамках гамильтонова формализма каждая точка лучевой траектории характеризуется координатой (глубиной)  $z$  и обобщенным импульсом  $p = \operatorname{tg} \chi$ , где  $\chi$  – угол скольжения луча [5, 6]. Траектории подчиняются уравнениям Гамильтона [5, 7]

$$\frac{dz}{dr} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dr} = -\frac{\partial H}{\partial z}, \quad (8)$$

где

$$H(p, z) = \frac{p^2}{2} + U(z) \quad (9)$$



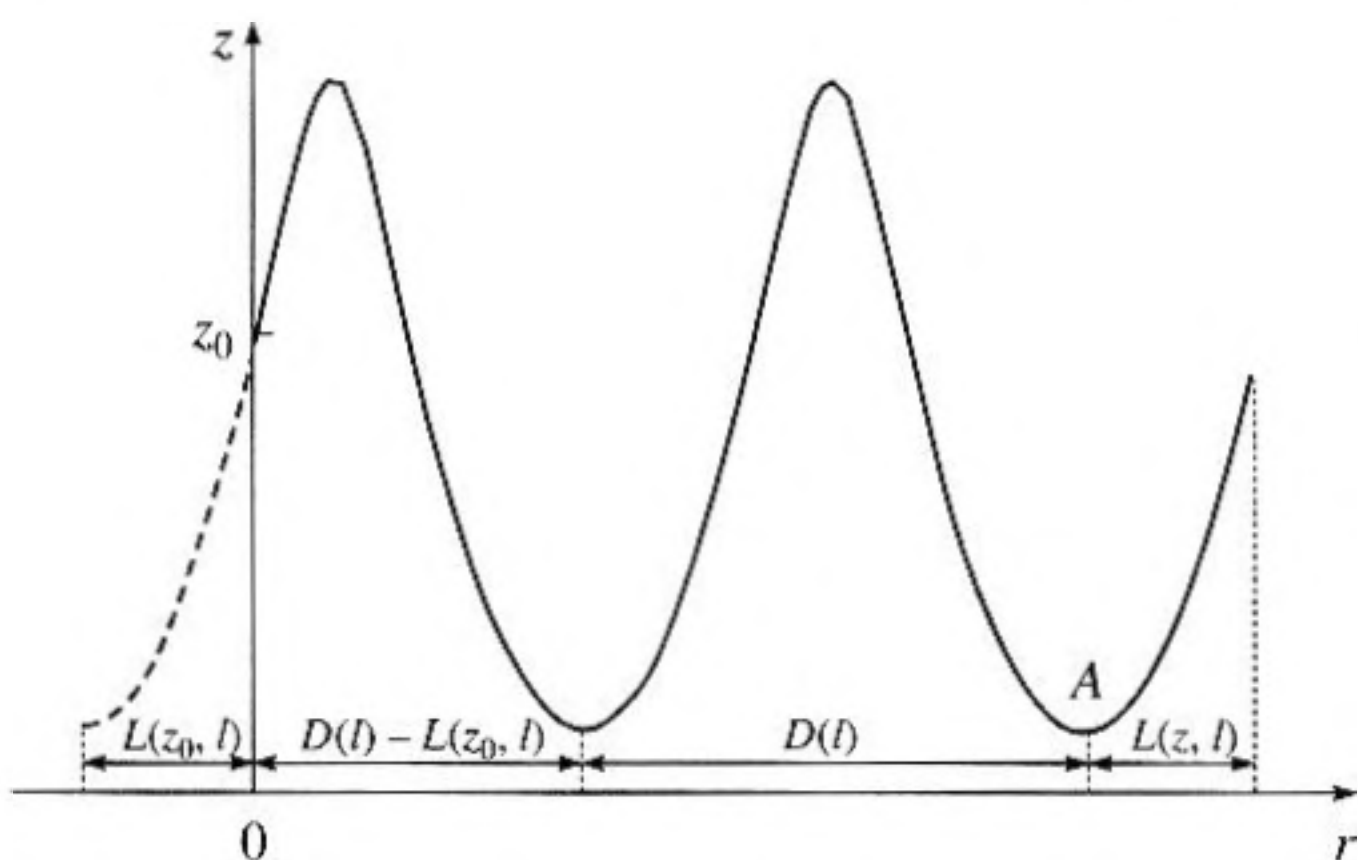


Рис. 2. График, иллюстрирующий смысл функции  $L(z, I)$ . Участок показанной траектории правее минимума  $A$  задается уравнением  $r = -L(z_0, I) + 2D(I) + L(z, I)$ .

– гамильтониан. Предполагаем, что профиль скорости звука  $c(z)$  (а вместе с ним и функция  $U(z)$ ) имеет единственный минимум на горизонте  $z = z_0$ , который называют осью волновода. При этом луч осциллирует подобно механической частице, колеблющейся в потенциальной яме. В этой аналогии с механикой  $r$  играет роль времени, а  $U(z)$  – роль потенциала.

### Переменные действие-угол

Для описания осцилляций лучевой траектории (как и для описания колебаний механической частицы) удобно перейти к каноническим переменным действие-угол  $(I, \theta)$  [5, 8]. В плоскостном волноводе гамильтониан  $H$  сохраняется вдоль траектории. Переменная действия  $I$  определена интегралом по циклу траектории

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint p dz = \frac{1}{\pi} \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} dz \sqrt{2[H - U(z)]}. \quad (10)$$

Здесь  $z_{\min}$  и  $z_{\max}$  – глубины нижней и верхней точек поворота луча. Интеграл (10) определяет гамильтониан  $H$  как функцию переменной действия  $I$ . Мы будем обозначать ее  $H(I)$ .

Каноническое преобразование, связывающее пары переменных  $(p, z)$  и  $(I, \theta)$ , при  $p > 0$  задается соотношениями [5, 8]

$$p = \frac{\partial G}{\partial z}, \quad \theta = \frac{\partial G}{\partial I}, \quad (11)$$

где

$$G(z, I) = \int_{z_{\min}}^z dz P(z, I), \quad (12)$$

$$P(z, I) = \sqrt{2[H(I) - U(z)]}.$$

– производящая функция. При  $p < 0$  в формуле (11)  $G(z, I)$  следует заменить на  $2\pi I - G(z, I)$  [6]. Отметим, что функция  $P(z, I)$  представляет собой импульс луча с переменной действия  $I$  на глубине  $z$ . В новых переменных уравнения Гамильтона принимают предельно простой вид

$$\frac{dI}{dr} = 0, \quad \frac{d\theta}{dr} = \omega, \quad (13)$$

где

$$\omega(I) = H'(I) \quad (14)$$

– угловая частота осцилляций луча с переменной действия  $I$  в невозмущенном волноводе. Здесь и далее штрих используется для обозначения производной, в том числе и частной, по  $I$ . Величина  $D(I) = 2\pi/\omega(I)$  задает длину цикла (период) осцилляций луча.

Согласно (11) и (12), переменная  $\theta$  заключена в интервале от 0 до  $2\pi$ . Однако, пользуясь стандартным приемом, ее можно сделать непрерывной функцией расстояния [6, 8]. Для этого в начале каждого нового цикла  $\theta$  следует увеличивать на  $2\pi$ . После этого  $\theta$  естественно интерпретировать как фазу осциллирующей лучевой траектории.

### Траектория луча в невозмущенном волноводе

Решения лучевых уравнений (13) имеют вид:  $I = I_0$  и  $\theta = \theta_0 + \omega(I_0)r$ , где  $I_0$  и  $\theta_0$  – начальные значения переменных действие и угол, соответственно. Несложный анализ показывает, что с учетом (11) траекторию луча можно записать в виде

$$r = R(z, I), \quad (15)$$

где

$$R(z, I) = \frac{D(I)}{2\pi} [\pm G'(z_0, I) + 2\pi N \pm G'(z, I)], \quad (16)$$

$N$  – целое число, задающее количество циклов осцилляций траектории,  $z_0$  – начальная глубина. В списке аргументов  $R$  для краткости мы опускаем  $z_0$  и  $N$ . Введя обозначение

$$L(z, I) \equiv G'(z, I)/\omega(I) = \int_{z_{\min}}^z dz/P(z, I), \quad (17)$$

перепишем выражение для траектории луча в виде

$$R(z, I) = \pm L(z_0, I) + ND(I) \pm L(z, I). \quad (18)$$

Геометрический смысл функции  $L(z, I)$  проиллюстрирован на рис. 2.



## МОДОВОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОЛЯ

Решение уравнения (1) можно представить в виде разложения

$$u(r, z) = \sum_m a_m \varphi_m(z) e^{ik_m r}, \quad (19)$$

где  $\varphi_m(z)$  и  $k_m$  – собственные функции и собственные числа задачи Штурма-Лиувилля, соответственно [2, 6]. Каждое слагаемое в этой сумме описывает одну из нормальных мод волновода. Множитель

$$a_m = \int dz u(0, z) \varphi_m(z) \quad (20)$$

задает коэффициент возбуждения моды источником.

Для простоты будем считать, что точки поворота рассматриваемых мод находятся внутри водной толщи. В приближении ВКБ функция  $\varphi_m(z)$  в интервале глубин между точками поворота выражается соотношением [2, 9]

$$\varphi(z) = \varphi_m^+(z) + \varphi_m^-(z), \quad (21)$$

где

$$\varphi_m^\pm(z) = [D(I_m)P(z, I_m)]^{-1/2} \times \exp\{\pm i[kG(I_m, z)] - \pi/4\}. \quad (22)$$

Постоянная  $I_m$  задается условием квантования [9]

$$kI_m = m - 1/2, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (23)$$

и

$$k_m = -kH(I_m). \quad (24)$$

Обратим внимание, что нумерацию мод мы начинаем с  $m = 1$ , сохраняя символ  $I_0$  для обозначения начального значения переменной действия луча. Согласно (21), каждая мода представляет сумму двух квазиплоских волн  $\varphi_m^\pm(z) \exp(ik_m r)$ , которые называют волнами Бриллюэна. В приближении ВКБ  $\varphi_m(z)$  определяется параметрами невозмущенного луча с  $I = I_m$ . Поэтому величину  $I_m$  естественно назвать переменной действия  $m$ -й моды.

В дальнейшем будем предполагать, что коэффициент возбуждения моды можно представить в виде

$$a_m = Q(I_m) e^{2\pi i k \alpha(I_m)}. \quad (25)$$

При этом источник фактически задается двумя функциями  $Q(I)$  и  $\alpha(I)$ , которые мы будем считать достаточно плавными. Их плавность понадобится нам при расчете поля с помощью метода стационарной фазы. Полученные ниже результаты будут применимы и в ситуации, когда коэффициент возбуждения представлен в виде суммы нескольких слагаемых вида (25). Таким образом, речь

идет о широком классе источников. В него входит и точечный источник, для которого  $a_m = \varphi_m(z_s) = \varphi_m^-(z_s) + \varphi_m^+(z_s)$ , где  $z_s$  – глубина источника. Ведь функции  $\varphi_m^\pm(z_s)$  имеют вид (25).

## ПРИБЛИЖЕННОЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПОЛЯ РАСПРЕДЕЛЕННОГО ИСТОЧНИКА

## Формула суммирования Пуассона

Применив формулу суммирования Пуассона [3]

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m) = \sum_{N=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dm f(m) e^{-2\pi i N m} \quad (26)$$

к выражению

$$u(r, z) = \sum_m Q(I_m) \varphi_m(z) e^{ik[\alpha(I_m) - H(I_m)r]}, \quad (27)$$

полученному подстановкой (25) в (19), имеем

$$u(r, z) = \sum_{N=-\infty}^{\infty} \int dm Q(I_m) \times \varphi_m(z) e^{ik[2\pi\alpha(I_m) - H(I_m)r] + 2\pi i N m}. \quad (28)$$

Представим  $\varphi_m(z)$  в виде суммы (21) и, воспользовавшись (23), от интегрирования по  $m$  перейдем к интегрированию по  $I_m$ . При этом волновое поле будет представлено в виде суммы интегралов вида

$$u(r, z) = k \int dI Q(I) \times \varphi_m^\sigma(z) e^{ik[2\pi\alpha(I) - H(I)r] + 2\pi i N m} = \int dI C e^{ik\Phi}, \quad (29)$$

где  $\sigma$  означает + или -,

$$C(I, z) = kQ(I)[D(I)P(I, z)]^{-1/2}, \quad (30)$$

$$\Phi = 2\pi\alpha(I) + 2\pi N I + \sigma G(z, I) - H(I)r - \pi(N - \sigma/4). \quad (31)$$

При обозначении переменной интегрирования от символа  $I_m$  для краткости мы перешли к  $I$ .

Приближенное аналитическое вычисление интеграла (29) возможно в двух случаях, которые рассмотрены далее.

## Расчет поля на длинных трассах методом стационарной фазы

На больших расстояниях от источника фаза подынтегрального выражения в (29) меняется гораздо быстрее амплитуды.

При этом основной вклад в интеграл дают окрестности так называемой стационарной точки



$I = I_s$ , в которой производная  $\Phi'$  обращается в нуль [6]. Согласно (11) и (14)

$$\Phi'(r, z, I) = \frac{2\pi}{D(I)} [R_s(z, I) - r], \quad (32)$$

где

$$R_s(z, I) = D(I)\alpha'(I) + ND(I) + \sigma L(z, I). \quad (33)$$

Стационарная точка  $I_s$  является решением уравнения

$$r = R_s(z, I) \quad (34)$$

при фиксированных  $r$  и  $z$ . Из сравнения (33) с (16) видим, что функция  $R_s(z, I)$  задает траекторию луча с переменной действия  $I$ , которая (при  $r = 0$ ) вышла с глубины  $z_0$  удовлетворяющей условию

$$D(I)\alpha'(I) \pm L(z_0, I) = 0. \quad (35)$$

Соотношение (34) при заданном  $I$  можно рассматривать как уравнение лучевой траектории. При этом вычисление  $I_s$  интерпретируется как решение обычной для геометрической оптики задачи прицеливания, то есть отыскания луча, попадающего в заданную точку наблюдения  $(r, z)$ .

Вторая производная фазы в стационарной точке  $I = I_s$  равна

$$\Phi''(r, z, I_s) = \omega(I_s)R'_s(I_s, z). \quad (36)$$

Метод стационарной фазы базируется на использовании аппроксимации

$$\Phi(r, z, I) = \Phi(r, z, I_s) + \frac{1}{2}\Phi''(r, z, I_s)(I - I_s)^2, \quad (37)$$

условия применимости которой мы обсудим ниже. Окрестность стационарной точки, дающая основной вклад в интеграл (29), имеет ширину порядка

$$\Delta I_{\text{eff}} = \frac{1}{\sqrt{k|\Phi''(r, z, I_s)|}} = \sqrt{\frac{D(I_s)}{2\pi k|R'_s(I_s, z)|}}. \quad (38)$$

Полагая, что предэкспоненциальный множитель в (29) мало меняется на этом интервале, заменим  $C(I, z)$  на  $C(I_s, z)$ . Вычислив получившийся гауссов интеграл, находим

$$\begin{aligned} u(r, z) &= \sqrt{\frac{2\pi}{|\Phi''(r, z, I_s)|}} C e^{ik\Phi_s + i\gamma\pi/4} = \\ &= Q(I_s) \sqrt{\frac{k}{P(z, I_s)|R'_s(z, I_s)|}} e^{ik\Phi_s + i\gamma\pi/4} \end{aligned} \quad (39)$$

где  $\gamma = \text{sign}(R'_s(z, I_s))$ ,  $\Phi_s = \Phi(r, z, I_s)$ . Отметим, что хотя величина  $N$  в сумме (28) пробегает все целочисленные значения, существенный вклад в поле дадут лишь те интегралы, у которых зависимости  $\Phi$  от  $I$  имеют стационарные точки внутри интер-

вала интегрирования, на котором весовая функция  $Q(I)$  существенно отличается от нуля.

Формулы (33), (34) и (39) фактически задают лучевое описание поля распределенного источника. Ему отвечает семейство лучей (конгруэнция), выходящих с, вообще говоря, разных глубин  $z_0$ . Параметром, маркирующим траектории, служит  $I$ . С учетом (11) и (17) из (35) следует, что луч с переменной действия  $I$  имеет начальное значение угловой переменной

$$\theta_0 = [-2\pi\alpha'(I)] \bmod 2\pi. \quad (40)$$

Вклад луча в суммарное волновое поле выражается формулой (39). Если в точку наблюдения приходят несколько лучей (то есть при заданных  $r$  и  $z$  уравнение (34) имеет несколько решений  $I_s$ ), то их вклады следует просуммировать.

Наряду с функцией  $R_s(z, I)$  для описания траектории удобно использовать и обратную ей функцию  $z_s(r, I)$ , задающую глубину текущей точки луча, как функцию переменной действия и расстояния. Пользуясь тем, что  $P(z, I) = \text{tg}\chi$ , где  $\chi$  – угол скольжения луча в точке наблюдения, перепишем (39) в форме

$$u(r, z) = Q(I_s) \sqrt{\frac{k}{|z'_s(r, I_s)|}} e^{ik\Phi_s + i\gamma\pi/4}. \quad (41)$$

В случае точечного источника (см. комментарий после формулы (25)) соотношения (39) и (41) сводятся к известным формулам, выражающим лучевое представление поля данного источника в волноводе [2, 3, 6].

Остановимся на вопросе о применимости метода стационарной фазы. Первым из отброшенных в разложении (37) членов можно пренебречь, если

$$\frac{k}{6} |\Phi''(r, z, I_s)| \Delta I_{\text{eff}}^3 = \frac{|\Phi'''(r, z, I_s)|}{6k^{1/2} |\Phi''(r, z, I_s)|^{3/2}} \ll \pi. \quad (42)$$

Кроме того, должно выполняться неравенство

$$\Delta I_{\text{eff}} \ll \Delta I, \quad (43)$$

где  $\Delta I$  – оценка интервала значений переменной  $I$ , на котором функция  $Q(I)$  заметно отличается от нуля. Оба условия заведомо нарушаются вблизи каустик, где производные  $R'_s$  и  $z'_s$  (а, значит, и  $\Phi''$ ) обращаются в нуль.

Анализ критериев (42) и (43) упрощается в случае, когда точка наблюдения находится вдали от каустик. На таких глубинах производную  $L'$  можно приближенно заменить на  $LD'/D$ . Для профиля  $c_0(z)$ , симметричного



относительно оси волновода,  $L = D/2$  и эта замена будет точной. В указанном приближении

$$R_s(z, I) = D(I)(\alpha_1 + N + \sigma/2),$$

$$R'_s(I, r, z) = \frac{rD'(I)}{D(I)}. \quad (44)$$

Отсюда получаем оценки (по порядку величины)

$$|\Phi''(r, z, I_s)| \approx \frac{2\pi N}{\delta I}, \quad |\Phi'''(r, z, I_s)| \approx \frac{2\pi N}{\delta I^2}, \quad (45)$$

где  $\delta I = |D/D'|$  – характерный масштаб функции  $D(I)$ ,  $N$  – число циклов лучевой траектории. Теперь условие (42) можно переписать в виде

$$(10Nk\delta I)^{-1/2} \ll 1. \quad (46)$$

Для типичных глубоководных волноводов на частотах порядка 100 Гц этот критерий выполняется уже при  $N = 1$ .

Теперь обратимся к условию (43) и перепишем его (с учетом (44)) в виде

$$r \gg r_p(I), \quad (47)$$

где

$$r_p(I) = \frac{D^2(I)}{2\pi k |D'(I)| \Delta_I^2} = \frac{D\delta I}{2\pi k \Delta_I^2}. \quad (48)$$

Из (47) видим, что, хотя лучевые траектории определены, начиная с  $r = 0$ , описание поля на основе формул (39) и (41) применимо лишь на достаточно длинных трассах. С аналогичной ситуацией мы встречались при рассмотрении поля антенны в свободном пространстве.

#### Расчет поля на малых дистанциях

Как и в случае свободного пространства, аналитическое описание на коротких трассах можно получить лишь для источника специального вида. Следуя работе [4], рассмотрим источник, заданный соотношением (25) с

$$Q(I) = \exp\left[-\frac{(I - \bar{I})^2}{2\Delta_I^2}\right] \quad (49)$$

и

$$\alpha(I) = \alpha_1(I - \bar{I}). \quad (50)$$

При этом, согласно (23),

$$a_m = \exp\left\{-\frac{(m - \bar{m})^2}{2\mu^2} + 2\pi i \alpha_1(m - \bar{m})\right\}, \quad (51)$$

где  $\bar{m} = k\bar{I} + 1/2$ ,

$$\mu = k\Delta_I. \quad (52)$$

В [4] показано, что такой источник излучает волновой пучок, который на малых расстояниях локализован в окрестности луча с переменной действия  $I = \bar{I}$ . Этот луч мы будем называть опорным. Поле пучка формируется группой из примерно  $2\mu$  эффективно возбужденных мод. Без ограничения общности можно считать, что

$$-1/2 < \alpha_1 \leq 1/2. \quad (53)$$

При выполнении условия

$$\frac{k}{6} |\Phi'''(\bar{I}, r)| \Delta_I^3 \approx \frac{r}{r_p} \frac{\mu}{2\pi k \delta I} = \frac{r}{r_p} \frac{\Delta_I}{2\pi \delta I} \ll \pi, \quad (54)$$

то есть на не слишком больших расстояниях, функцию  $\Phi$  можно аппроксимировать выражением

$$\Phi(I, r, z) = \Phi(\bar{I}, r, z) + \Phi'(\bar{I}, r, z)(I - \bar{I}) + \frac{1}{2} \Phi''(\bar{I}, r, z)(I - \bar{I})^2. \quad (55)$$

Поскольку  $\bar{I}$ , вообще говоря, не является точкой стационарной фазы, линейный член разложения (в отличие от (37)) здесь присутствует. Выражение для  $\Phi'$ , по-прежнему, задается формулой (32). Подставляя (55) в (29) и заменяя  $I$  в предэкспоненциальном множителе на  $\bar{I}$ , получаем гауссов интеграл, который легко вычисляется.

Для оценки интенсивности поля исследуемого волнового пучка в окрестностях тех мест, где опорный луч (а значит и пучок) пересекает ось волновода, то есть при  $z \approx z_a$ , вновь воспользуемся приближенной формулой (44). При этом  $\Phi''(I, r, z) = 2\pi D'(I)/D^2(I)$  и выражение для интенсивности поля имеет вид

$$|u(r, z)|^2 = \frac{2\pi\mu^2}{\sqrt{1 + r^2/r_p^2(I)}} [D(\bar{I})P(\bar{I}, z)]^{-1/2} \times \exp\left\{-\frac{4\pi^2\mu^2 [R_s(\bar{I}, z) - r]^2}{D^2(\bar{I})[1 + r^2/r_p^2(I)]}\right\}. \quad (56)$$

Как и в случае с формулой (39), на каждой дистанции величина  $u(r, z)$  фактически определяется лишь одним из членов суммы по  $N$ . Анализом поля пучка вблизи оси волновода мы ограничиваемся лишь для сокращения выкладок. Формула (56) очевидным образом обобщается на случай произвольных  $z$ .

Анализ критерия (54) показывает, что на частотах порядка 100 Гц в типичных глубоководных волноводах он обычно выполняется на расстояниях существенно превосходящих  $r_p$ . Поэтому имеется интервал дистанций, на которых применимы оба рассмотренных выше способа приближенного аналитического описания поля пучка. Отметим, что для источника, заданного соотно-



шениями (49) и (50), выражение (48) можно переписать в виде

$$r_p(I) = \frac{kD^2(I)}{2\pi|D'(I)|\mu^2}. \quad (57)$$

### РАСПЛЫВАНИЕ ВОЛНОВОГО ПУЧКА

В этом разделе мы используем полученные формулы для анализа расплывания волнового пучка с расстоянием. Ширину вертикального сечения пучка  $\Delta_z$  на расстоянии  $r$  определим соотношением

$$\Delta_z^2 = v^{-1} \int dz [z - \bar{z}(r)]^2 |u(r, z)|^2, \quad (58)$$

где

$$\bar{z}(r) = v^{-1} \int dz |u(r, z)|^2, \quad v = \int dz |u(r, z)|^2. \quad (59)$$

Предполагаем, что на малых дистанциях пучок узок и  $\Delta_z \ll \bar{z}_{\max} - \bar{z}_{\min}$ , где  $\bar{z}_{\max}$  и  $\bar{z}_{\min}$  — глубины верхней и нижней точек поворота опорного луча. Рассмотрим участок пучка в месте пересечения им оси волновода. Угол скольжения опорного луча (и пучка) на горизонте  $z = z_a$  обозначим  $\chi_a$ . Взяв в (56)  $r = R_s(\bar{I}, z)$  и пользуясь приближением

$$\begin{aligned} R_s(\bar{I}, z) - R_s(\bar{I}, z_a) &= \\ &= \left. \frac{\partial L(\bar{I}, z)}{\partial z} \right|_{z=z_a} (z - z_a) = \frac{z - z_a}{\operatorname{tg} \chi_a}, \end{aligned} \quad (60)$$

получаем

$$\begin{aligned} \Delta_z &= \frac{D(\bar{I}) \operatorname{tg} \chi_a}{2\sqrt{2}\pi\mu} \sqrt{1 + \frac{r^2}{r_p^2(\bar{I})}} = \\ &= \frac{\bar{z}_{\max} - \bar{z}_{\min}}{2\sqrt{2}\pi\mu} \sqrt{1 + \frac{r^2}{r_p^2(\bar{I})}}. \end{aligned} \quad (61)$$

В последнем равенстве мы грубо оценили  $D(\bar{I}) \operatorname{tg} \chi_a$  как  $\bar{z}_{\max} - \bar{z}_{\min}$ . Пучок будет узким (по сравнению с  $\bar{z}_{\max} - \bar{z}_{\min}$ ), если антенна излучает группу из большого числа мод, то есть  $\mu \gg 1$ . При том же условии ширина горизонтального сечения пучка в месте его выхода к оси волновода  $\Delta_r = \Delta_z / \operatorname{tg} \chi_a$  будет мала по сравнению с длиной цикла опорного луча  $D(\bar{I})$ .

Согласно (61), ширина пучка в местах пересечения оси волновода изменяется относительно мало до тех пор, пока  $r < r_p$ . Ранее этот результат был получен в работе [4]. Интервал расстояний  $0 < r < r_p$  назовем прожекторной зоной антенны в волноводе. В волноводе с постоянной скоростью звука и отражающими стенками пучок (пока его

ширина остается много меньше расстояния между стенками) расплывается по тем же законам, что и в свободном пространстве. В [4] показано, что в таком волноводе  $r_p \approx b^2/\lambda$ , где  $b$  — начальная ширина пучка (значение  $\Delta_z$  при  $r = 0$ ). Как и должно быть, это совпадает с оценкой длины прожекторной зоны в свободном пространстве (7). Другой интересный частный случай имеет место в волноводе с параболическим профилем скорости звука, для которого  $D' = 0$  и, соответственно,  $r_p = \infty$ . В таком волноводе все лучи имеют одинаковую длину цикла и пучок распространяется без расплывания. Его ширина меняется с дистанцией по периодическому закону.

При  $r \gg r_p$  (61) переходит в

$$\Delta_z = \frac{r\mu|D'(\bar{I})| \operatorname{tg} \chi_a}{\sqrt{2}kD(\bar{I})} = \frac{r|D'(\bar{I})|\Delta_l \operatorname{tg} \chi_a}{\sqrt{2}D(\bar{I})}. \quad (62)$$

На таких дистанциях уже применимо лучевое описание и аналогичная оценка следует из (44). Действительно, переменные  $l$  лучей, дающих существенный вклад в волновое поле, и, следовательно, формирующих пучок, принадлежат интервалу  $\bar{I} \pm \Delta_l$ . Пользуясь (44), размер горизонтального сечения пучка в месте пересечения им оси канала можно оценить как  $\Delta_r = 2rD'(\bar{I})\Delta_l/D(\bar{I})$ . Отсюда находим оценку ширины вертикального сечения  $\Delta_z = \Delta_r \operatorname{tg} \chi_a$ , которая отличается от (62) лишь множителем  $\sqrt{2}$ . Отметим, что формулы (61) и (62) применимы лишь до тех пор, пока пучок остается узким по сравнению с расстоянием между точками поворота опорного луча, то есть пока выполняется условие

$$\Delta_z \ll \bar{z}_{\max} - \bar{z}_{\min}. \quad (63)$$

### Численный пример

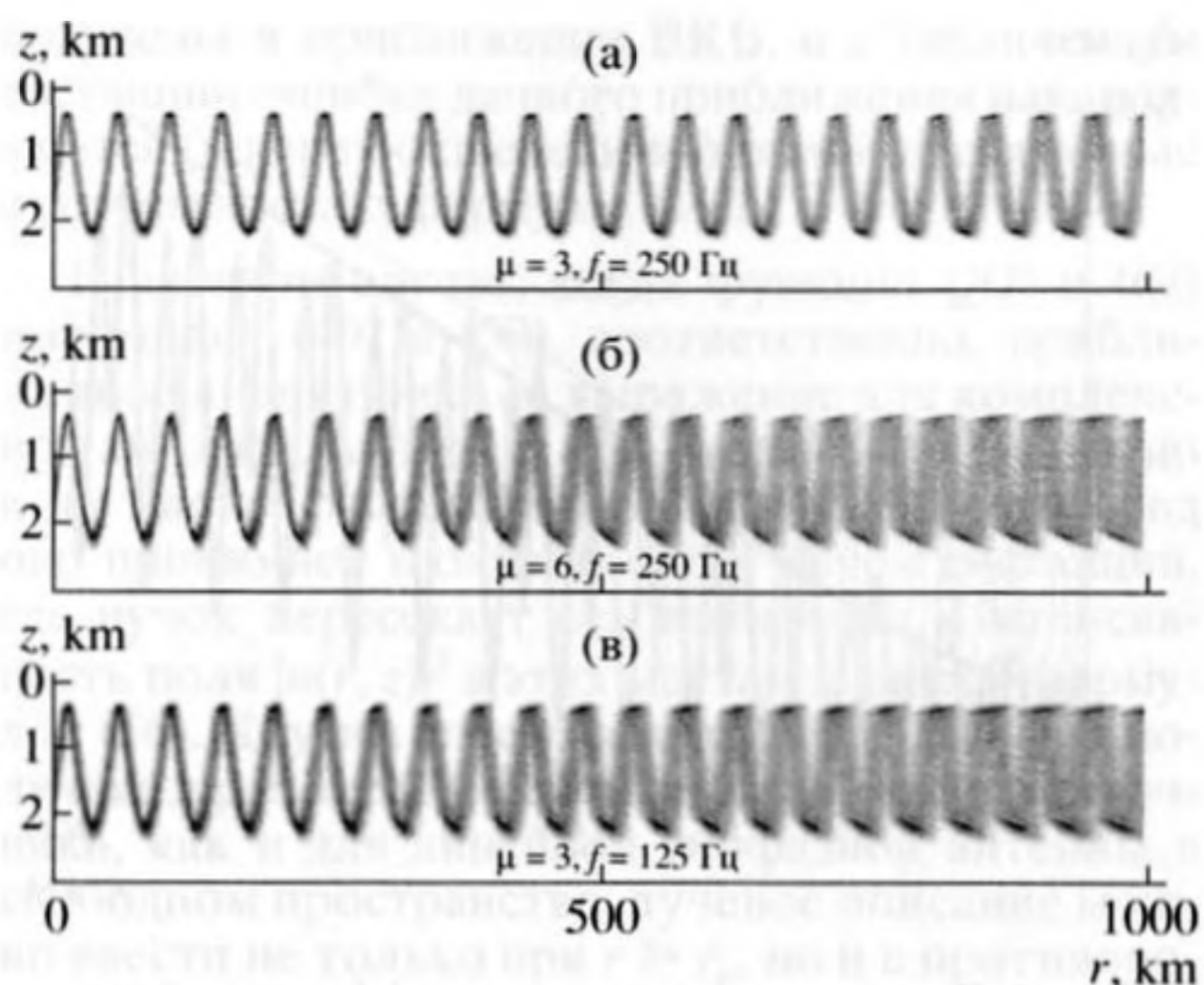
Проиллюстрируем полученные результаты на примере пучка, распространяющегося в волноводе с профилем скорости звука (ось  $z$  направлена вертикально вверх, и поверхность воды лежит в плоскости  $z = 0$ )

$$c(z) = c_0(1 + \varepsilon(e^{2(z-z_a)/B} - 2(z-z_a)/B - 1)) \quad (64)$$

с параметрами  $c_0 = 1.5$  км/с,  $z_a = -1$  км,  $\varepsilon = 0.0057$  и  $B = 1$  км. Это так называемый профиль Манка, который широко используется при моделировании распространения звука в глубоком море [2].

На рис. 3 показаны три пучка, рассчитанные путем прямого численного решения параболического уравнения (1) с начальным условием (51). Во всех трех случаях  $\alpha_1 = -1/2$ . Отметим, что, варьируя параметр  $\alpha_1$  в интервале (53), можно сдвигать пучок вдоль оси  $r$  на любое расстояние в пределах длины цикла опорного луча. Фигурирую-





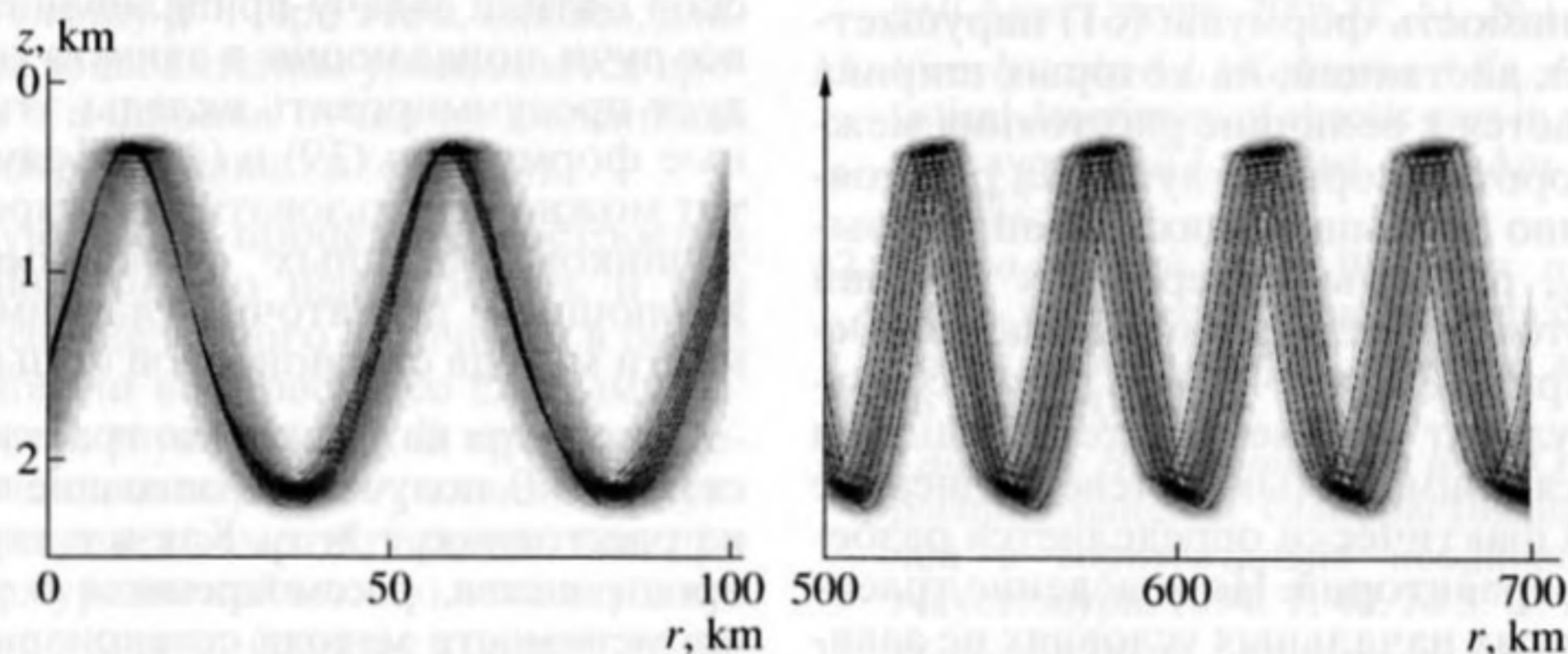
**Рис. 3.** Результаты расчета волновых пучков путем прямого решения параболического уравнения с начальными условиями, заданными соотношением (51). Для всех пучков  $\alpha_1 = -1/2$ . Значения несущей частоты  $f$  и параметра  $\mu$ , использованные при расчетах, указаны на графиках.

щий в (51) номер центральной моды  $\bar{m}$  был выбран равным 60 для частоты 250 Гц и 30 для частоты 125 Гц. При этом всем трем пучкам отвечает один и тот же опорный луч, выходящий с глубины  $z = -1.49$  км под углом скольжения  $6.3^\circ$ . Рисунки 3а и б представляют пучки на частоте 250 Гц с разными  $\mu$ . Их сравнение подтверждает следующие из (61) и (62) качественные выводы о том, что с уменьшением  $\mu$  (то есть с уменьшением числа возбуждаемых мод) растет как начальная ширина пучка, так и предельное расстояние, до которого пучок распространяется без заметного расплывания. Для пучков, показанных на рис. 3а, б и в, параметр  $r_p$  принимает значения 440 км, 110 км и 220 км, соответственно. Размер антен-

ны  $b$ , необходимой для излучения пучка, определяется интервалом глубин, на котором поле пучка сосредоточено на начальной дистанции  $r = 0$ . Для пучков, показанных на рис. 3а и с,  $b \approx 1.4$  км, а для пучка на рис. 3б имеем  $b \approx 0.7$  км.

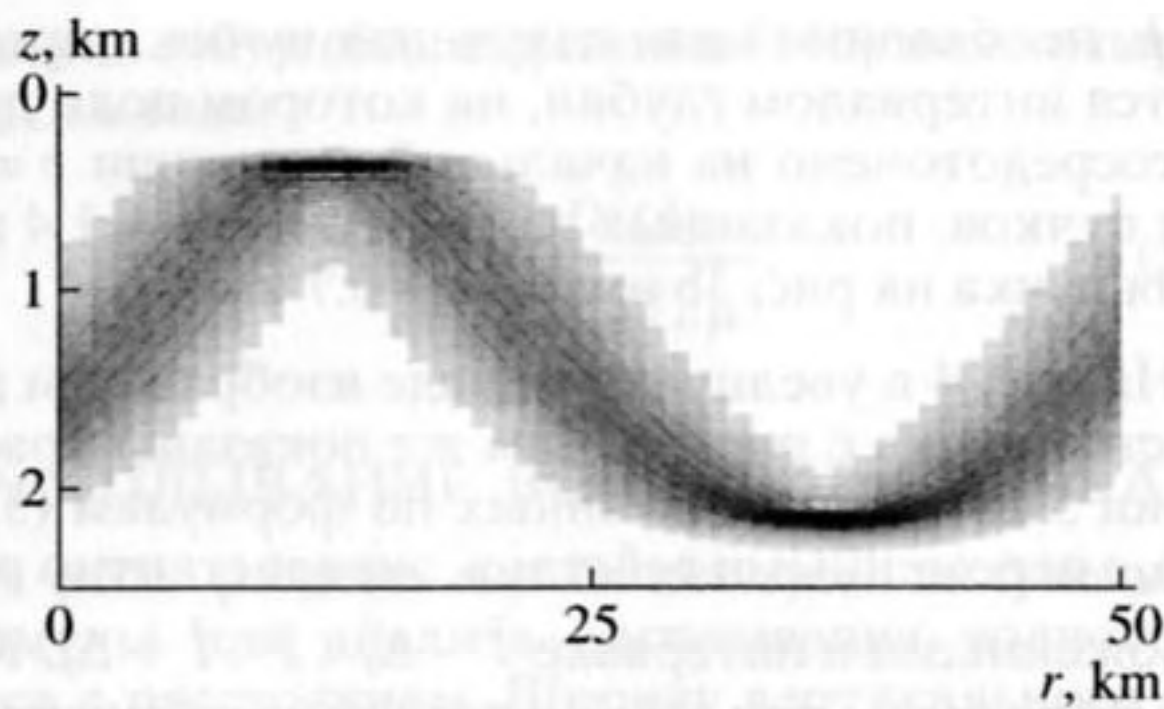
На рис. 4 в увеличенном виде изображены два участка пучка с рис. 3а. Там же показаны траектории 5 лучей, рассчитанных по формулам (33)–(35), с переменными действия, эквидистантно расположенными в интервале  $\bar{l} - \Delta_l < l < \bar{l} + \Delta_l$ . Как и должно быть, при  $r > r_p$  (в правой части рисунка) траектории заполняют пучок. Видно, что поле усиливается в окрестностях точек поворота пучка, около которых лучи касаются каустик. При малых  $r$  (левая часть рисунка) лучевое представление, основанное на формулах (33)–(35), не работает и разброс лучевых траекторий существенно меньше ширины пучка. Как и в ситуации, показанной на рис. 1 для линейной синфазной антенны в свободном пространстве, лучевое представление, построенное для описания поля на длинных трассах, вблизи источника не применимо.

Аналогия с антенной в свободном пространстве имеет место и на малых дистанциях. Она заключается в том, что при  $r \ll r_p$  следует пользоваться другой системой лучей, которая определяется выражением (55), задающим эйконал поля. Несложный анализ показывает, что при выбранном нами  $\alpha_1$  волновой фронт (линия постоянной фазы) вблизи источника в центральной части пучка примерно совпадает с соответствующим участком фронта волны Бриллюэна центральной моды  $\varphi_{\bar{m}}^-(z)\exp(ik_{\bar{m}}r)$ . Это происходит потому, что в центральной части пучка все волны Бриллюэна вида  $\varphi_m^-(z)\exp(ik_m r)$  вначале складываются примерно в фазе. При этом волны  $\varphi_m^+(z)\exp(ik_m r)$  гасят друг друга и вклада в поле не дают. Более подробно этот вопрос обсуждается в работе [4]. Лу-



**Рис. 4.** Увеличенное изображение двух участков пучка с рисунка 3а. На эти изображения наложены траектории 5 лучей с переменными действия в интервале  $\bar{l} - \Delta_l < l < \bar{l} + \Delta_l$ , рассчитанных по формулам (33)–(35).

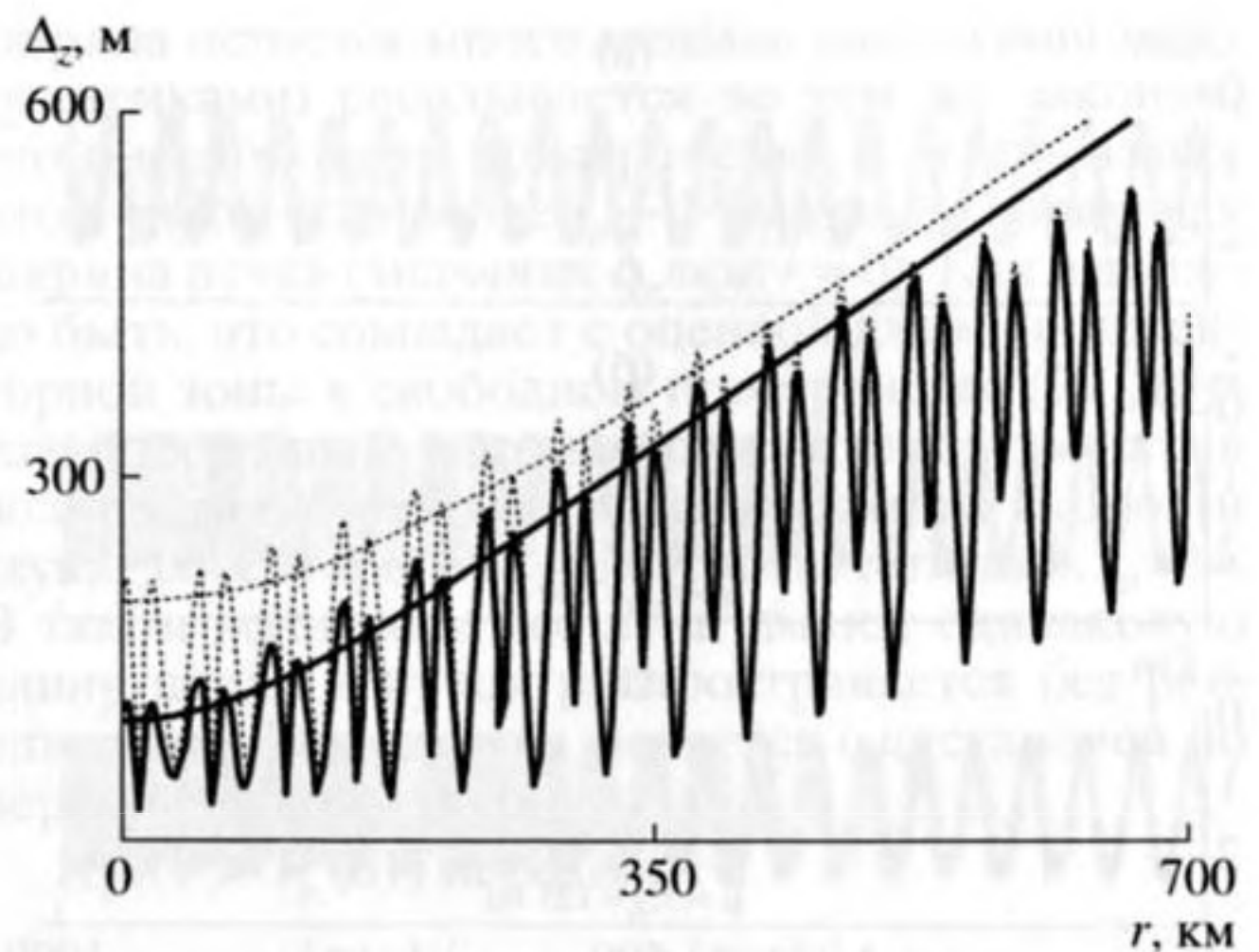




**Рис. 5.** Начальная часть пучка с рис. 3а. На изображение наложены 5 лучей, перпендикулярных линиям постоянной фазы волны Бриллюэна  $\Phi_{60}^-(z)$ , определяющей центральную часть пучка на малых расстояниях от источника.

чи, формирующие пучок на малых дистанциях, направлены перпендикулярно фазовому фронту волны Бриллюэна  $\Phi_m^-(z)\exp(ik_m r)$ . Точнее говоря, почти перпендикулярно, так как мы работаем в малоугловом приближении. Такие лучи – все они имеют одинаковые переменные действия  $I = I_m$  [6] – показаны на рис. 5. В точках поворота они касаются каустик. Около каустик пучок сужается, а амплитуда поля возрастает.

Пучки, представленные на рис. 3а и в, распространяются на разных частотах, 250 и 125 Гц, но имеют одинаковый параметр  $\Delta_r$ . На рис. 6 показаны зависимости от дистанции параметров  $\Delta_z$  этих пучков, рассчитанных по формулам (58) и (59). Каждый из пучков осциллирует, сужаясь около тех мест, где опорный луч касается каустик (это происходит недалеко от точек поворота), и уширяясь в местах пересечения оси волновода. Плавные линии на рис. 6, изображающие рассчитанные по формуле (61) зависимости  $\Delta_z$  от  $r$ , на малых дистанциях, как и должно быть, являются огибающими соответствующих осциллирующих кривых. Применимость формулы (61) нарушается, начиная с тех дистанций, на которых ширина пучка приближается к величине расстояния между точками поворота опорного луча. На расстояниях, существенно превышающих указанные выше значения  $r_p$ , размеры поперечных сечений пучков становятся примерно одинаковыми. Осциллирующие кривые при  $r > 500$  км почти совпадают. Этот результат вполне понятен. Ведь при  $r \gg r_p$  становится применимым лучевое описание и ширина пучка фактически определяется разбеганием лучевых траекторий. Но поведение траектории при заданных начальных условиях не зависит от частоты. Начальные условия задаются параметрами  $\alpha_1$  и  $\Delta_r$ , которые у сравниваемых пучков одинаковы. Поэтому и разбегание траек-



**Рис. 6.** Зависимость от дистанции эффективной ширины пучка  $\Delta_z$  на частотах 125 Гц (пунктир) и 250 Гц (сплошные линии). Осциллирующие кривые представляют результат расчета  $\Delta_z$  по формуле (58) для пучков, изображенных на рис. 3а и с. Плавные кривые представляют оценки по формуле (61).

торий на длинных трассах в обоих случаях происходит одинаковым образом.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основным результатом данной работы является построение лучевого описания поля распределенного источника в волноводе на длинных трассах. Вся необходимая информация об источнике задается комплексными амплитудами возбуждаемых им нормальных мод. Система (конгруэнция) лучей, отвечающих конкретному источнику, определяется функцией, связывающей начальные значения координаты ( $z_0$ ) и импульса ( $p_0$ ) луча. В нашей задаче эта функция в двух разных формах выражается соотношениями (35) и (40). Для расчета поля в точке наблюдения ( $r, z$ ) требуется решить стандартную для геометрической оптики задачу прицеливания, то есть найти все лучи, попадающие в данную точку. Затем следует просуммировать вклады этих лучей, заданные формулами (39) и (41). Полученный результат можно использовать для широкого класса источников, заданных функциями  $Q(I)$  и  $\alpha(I)$ , являющихся достаточно гладкими для применимости метода стационарной фазы.

Несмотря на то, что все траектории начинаются при  $r = 0$ , полученное описание применимо лишь на расстояниях  $r \gg r_p$ . Как и в случае свободного пространства, рассмотренном в разд. 1, условия применимости метода стационарной фазы, а значит и условия применимости лучевого описания, выполняются тем лучше, чем больше дистанция. Однако следует помнить, что все наши результаты



получены в приближении ВКБ, и с увеличением дистанции ошибки данного приближения накапливаются (в первую очередь это ошибки, связанные с погрешностью формулы (24)).

В частном случае, когда функции  $Q(I)$  и  $\alpha(I)$  имеют вид (49) и (50), соответственно, приближенное аналитическое выражение для комплексной амплитуды поля  $u(r, z)$  может быть получено и на малых расстояниях. Наиболее простой вид оно принимает в окрестностях точек дистанции, где пучок пересекает ось волновода. Интенсивность поля  $|u(r, z)|^2$  в этих местах задается формулой (56). Другим способом эта формула была получена в работе [4]. Для рассматриваемого источника, как и для линейной синфазной антенны в свободном пространстве, лучевое описание можно ввести не только при  $r \gg r_p$ , но и в противоположном предельном случае  $r \ll r_p$ . Следует, впрочем, отметить, что наиболее близким аналогом нашего источника в свободном пространстве является не линейная синфазная антенна, а антенная, возбуждающая гауссов пучок с  $u(0, z) = \exp[-(z - \bar{z})^2/b^2]$ .

Ширина пучка в волноводе осциллирует с дистанцией: она уменьшается около каустик, расположенных недалеко от точек поворота опорного луча, и увеличивается на оси волновода. Огибающая этих осцилляций монотонно растет с  $r$ , достигая насыщения на дистанциях, где ширина пучка становится сравнимой с расстоянием между точками поворота опорного луча. Монотонный рост огибающей является следствием нашего выбора функции  $\alpha(I)$ . В работе [4] показано, что добавление в (50) члена  $\alpha_2(I - \bar{I})^2$  делает зависимость огибающей от дистанции немонотонной. Специальным выбором  $\alpha_2$  можно сфокусировать пучок на заданном расстоянии от источника.

Согласно (61), с увеличением числа возбуждаемых мод, которое можно оценить как  $2\mu$ , начальная ширина пучка, а вместе с ней и размер апертуры антенны, необходимой для его излучения, уменьшается по закону  $\mu^{-1}$ . При этом, однако, длина прожекторной зоны антенны уменьшается пропорционально  $\mu^{-2}$ , а ширина пучка на дистанциях  $r > r_p$  растет пропорционально  $\mu$  (см. (62)).

Предложенную здесь процедуру построения лучевого описания можно использовать и при анализе поля распределенного источника в более реалистичной модели волновода со слабым возмущением скорости звука  $\delta c(r, z)$ . В предположении, что на дистанциях порядка  $r_p$  влияние флуктуаций еще не успевает заметно проявиться, при решении лучевых уравнений можно использовать те же начальные условия (точнее говоря, ту же функцию, связывающую  $z_0$  и  $p_0$ ), что и в невозмущенном волноводе. Это, в частности, позволит исследовать поле с помощью статистической те-

рии, развитой в работах [6, 10–12], для анализа хаотической динамики лучей в случайно-неоднородном волноводе. Данный подход мы планируем использовать в последующих работах.

Полученные здесь результаты можно использовать и при анализе вопроса о возбуждении слабо расходящихся звуковых пучков [13, 14] с помощью вертикальной антенны.

Статья написана при поддержке программы фундаментальных исследований Отделения физических наук РАН "Когерентные акустические поля и сигналы," грантов РФФИ 07-02-00255 и 05-05-64945, а также гранта НШ 5200.2006.2.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кравцов Ю.А., Орлов Ю.И. Геометрическая оптика неоднородных сред. М.: Наука, 1980. 304 с.
2. Бреховских Л.М., Лысанов Ю.П. Теоретические основы акустики океана. Ленинград: Гидрометеоиздат, 1982. 264 с.
3. Felsen L.B. Hybrid ray-mode fields in inhomogeneous waveguides and ducts // J. Acoust. Soc. Am. 1981. V. 69(2). P. 352–361.
4. Вировлянский А.Л., Кириллов С.А., Шерешевский И.А. О структуре поля группы мод в многомодовом волноводе // Изв. Вузov – Радиофизика. 1988. Т. 31(6). С. 725–732.
5. Абдуллаев С.С., Заславский Г.М. Классическая нелинейная динамика и хаос лучей в задачах о распространении волн в неоднородных средах // Усп. Физ. Наук. 1991. Т. 161. № 8. С. 1–43.
6. Вировлянский А.Л. Лучевая теория дальнего распространения звука в океане. Нижний Новгород: ИПФ РАН, 2006. 164 с.
7. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1973. 720 с.
8. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. М.: Наука, 1973. 208 с.
9. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М.: Наука, 1974. 752 с.
10. Вировлянский А.Л. Статистическое описание лучевого хаоса в подводном акустическом волноводе // Акуст. журн. 2005. Т. 51. № 1. С. 90–100.
11. Virovlyansky A.L., Kazarova A.Yu., Lyubavin L.Ya. Statistical description of chaotic rays in a deep water acoustic waveguide // J. Acoust. Soc. Am. 2007. V. 121. N5. P. 2542–2552.
12. Вировлянский А.Л. Времена пробега сигналов вдоль хаотических лучей при дальнем распространении звука в океане // Акуст. журн. 2005. Т. 51. № 3. С. 330–341.
13. Гончаров В.В., Куртенов В.М. О формировании и распространении слаборасходящихся пучков лучей в горизонтально неоднородном океане // Акуст. журн. 1994. Т. 40. № 5. С. 773–781.
14. Петухов Ю.В., Абросимов Д.И., Бородин Е.Л. Каустики и слаборасходящиеся пучки лучей в океанических волноводах // Акуст. журн. 2006. Т. 52. № 3. С. 367–374.



## Ray Description of the Field of a Distributed Source in a Waveguide

A. L. Virovlyansky, A. Yu. Kazarova, L. Ya. Lyubavin, and D. F. Nefedova

*Institute of Applied Physics, Russian Academy of Sciences,  
ul. Ul'yanova 46, Nizhni Novgorod, 603950 Russia  
e-mail: viro@hydro.appl.sci-nnov.ru*

**Abstract**—A procedure is proposed for constructing the ray description of the field of a distributed source on a long track. It consists in the generalization of the known transformation relating the mode and ray representations of the field of a point source in a waveguide. The result is used to study the structure of a wave beam emitted by a vertical array. An example of a beam for which a simple analytical description can be obtained not only on long tracks, but also near the source is considered. The spread of the beam with distance is analyzed.