АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2008, том 54, № 5, с. 807–815

АКУСТИКА СТРУКТУРНО НЕОДНОРОДНЫХ ТВЕРДЫХ СРЕД. ГЕОЛОГИЧЕСКАЯ АКУСТИКА

УДК 534.284:519.8

КОНСТРУКТИВНЫЕ МЕТОДЫ СИНТЕЗА СЛОИСТО-НЕОДНОРОДНЫХ СТРУКТУР ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ УПРУГИХ ВОЛН

© 2008 г. Е. Л. Гусев

Объединенный институт физико-технических проблем Севера СО РАН
677980 Якутск, ул. Октябрьская 1
E-mail: elgusev@mail.ru

Поступила в редакцию 27.03.07 г.

Изучена вариационная постановка задач оптимального синтеза слоисто-неоднородных структур с требуемым комплексом свойств при воздействии упругих волн. Исследуется проблема, связанная с изучением возможности направленного управления эффектом преобразования мод на границах раздела упругих слоев для эффективного расширения пределов в конструировании структурно-неоднородных конструкций с требуемым комплексом свойств. Приведены необходимые условия оптимальности для задач оптимального синтеза слоисто-неоднородных конструкций при воздействии упругих волн в вариационной постановке.

Построены аналитические соотношения, позволяющие осуществлять эффективное априорное сужение множества материалов допустимого набора, а следовательно, повысить эффективность методов поиска оптимальных решений и расширить пределы применимости различных подходов.

PACS: 43.20.Bi, 43.20.El, 43.20.Gp

Вариационная постановка задачи оптимального синтеза. В связи с широким применением в современном приборостроении композиционных материалов, конструкций, покрытий со слоисто-неоднородной структурой представляет существенный интерес как в теоретическом, так и в прикладном аспектах исследование возможности эффективного управления энергетическими характеристиками волновых процессов на основе направленного выбора геометрической и физической структуры композиционных систем [1, 2]. Изучению слоисто-неоднородных структур и исследованию закономерностей взаимодействия слоисто-неоднородных структур с волновыми процессами в последние годы посвящено значительное число публикаций [3–14].

Исследуется случай, когда в состав слоисто-неоднородной структуры могут входить системы упругих слоев. Возможность возникновения в системе упругих слоев волн двух типов, как продольных, так и поперечных, а также взаимного преобразования мод на границах раздела приводит к существенно более сложной интерференционной картине по сравнению со случаем, когда в композиционной конструкции могут существовать только волны одного типа [3, 4, 6, 8]. При этом значительное усложнение явления интерференции обусловлено прежде всего возможностью взаимного преобразования двух типов волновых движений на границах раздела. Рассматриваемая проблема связана с изучением возможности направленного управления преобразованием мод на границах раздела упругих слоев для эффективного расширения пределов в конструировании структурно-неоднородных конструкций с требуемым комплексом свойств.

Пусть заданы требуемые характеристики упругой волны на выходе из композиционной системы, т.е. задан критерий качества. Например, критерий качества может выражать требование сохранить тип движения, либо преобразовать один тип движения в другой для заданного спектрального интервала, либо погасить энергию упругой волны в достаточно широком спектральном диапазоне, либо преобразовать падающую волну в поверхностную. Необходимо так подобрать структуру композиционной конструкции, при которой характеристики волнового процесса на выходе из конструкции будут наиболее близки к требуемым. Рассматриваемые задачи относятся к числу обратных задач математической физики [15].

Будем рассматривать наклонное падение немонохроматической упругой волны на многослойную систему, состоящую из N плоскопараллельных слоев. Внешнюю поверхность конструкции считаем совмещенной с плоскостью xy. Плоскость падения упругой волны совпадает с плоскостью xz. Ограничимся рассмотрением случая, когда бесконечные полупространства, окаймляющие систему слоев, являются идеальными жидкостями. В этом случае в полупространствах, окаймляющих систему упругих слоев, будут отсутствовать волны сдвига.

Распространение упругой волны в системе упругих слоев описывается системой динамических уравнений упругости:

$$\mu_s \Delta \mathbf{u}_s + (\lambda_s + 2\mu_s)\operatorname{grad}\operatorname{div}(\mathbf{u}_s) = \rho_s \frac{\partial^2 \mathbf{u}_s}{\partial t^2}, \quad (s = 1, \ldots, N). \tag{1}$$

В этих обозначениях: $\mathbf{u}_s(x, y, z, t)$ – вектор смещения частиц в s-ой среде, ρ_s – плотность s-го слоя, λ_s, μ_s – параметры Ламэ s-го слоя. Векторное поле смещений допускает представление в виде суперпозиции двух полей [16]:

$$\mathbf{u}_s = \operatorname{grad}\Phi_s + \operatorname{rot}\mathbf{P}_s. \tag{2}$$

Здесь Φ_s, $\mathbf{P}_s$ – скалярный и векторный потенциалы волнового поля. Плоская волна общего вида может быть представлена в виде суперпозиции плоских гармонических волн, т.е. может быть представлена в виде интеграла Фурье:

$$\begin{gathered}\Phi_s(x, z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_s(z, \omega) \exp(i\Delta_0 x - i\omega t) d\omega, \\ \mathbf{P}_s(x, z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}_s(z, \omega) \exp(i\Delta_0 x - i\omega t) d\omega, \\ (s = 1, \ldots, N).\end{gathered} \tag{3}$$

Здесь $\Delta_0 = k_0 \sin\vartheta_0$, $k_0 = \omega/c_0$ – волновое число падающей волны, c_0 – скорость распространения волны в первом полупространстве, ϑ_0 – угол падения продольной волны на слоисто-неоднородную структуру. Функции $f_s(z, \omega)$ и $g_s(z, \omega)$ имеют смысл комплексных амплитуд скалярного и векторного потенциалов в s-ой среде и удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 f_s(z, \omega)}{\partial z^2} + (k_s^2(\omega) - \Delta_0^2(\omega)) f_s(z, \omega) = 0, \\ \frac{\partial^2 \mathbf{g}_s(z, \omega)}{\partial z^2} + (\gamma_s^2(\omega) - \Delta_0^2(\omega)) \mathbf{g}_s(z, \omega) = 0, \\ b_{s-1} \le z \le b_s, \quad s = 1, \ldots, N, \\ f_s(b_{s-1}, \omega) = \Phi_1^s f_{s-1}(b_{s-1}, \omega) + i\Phi_2^s \frac{\partial g_{s-1}(b_{s-1}, \omega)}{\partial z}, \\ g_s(b_{s-1}, \omega) = \Phi_3^s g_{s-1}(b_{s-1}, \omega) + i\Phi_4^s \frac{\partial f(b_{s-1}, \omega)}{\partial z}, \\ \frac{\partial f_s(b_{s-1}, \omega)}{\partial z} = Q_1^s \frac{\partial f_{s-1}(b_{s-1}, \omega)}{\partial z} + iQ_2^s g_{s-1}(b_{s-1}, \omega), \\ \frac{\partial g_s(b_{s-1}, \omega)}{\partial z} = Q_3^s \frac{\partial g(b_{s-1}, \omega)}{\partial z} + \\ + iQ_4^s f_{s-1}(b_{s-1}, \omega), \quad s = 2, \ldots, N, \\ \frac{\partial f_1(0, \omega)}{\partial z} = iL_1(\omega) + iL_2(\omega) f_1(0, \omega) + \\ + iL_3(\omega) g_1(0, \omega), \\ \frac{\partial g_1(0, \omega)}{\partial z} = iM_1(\omega) + iM_2(\omega) f_1(0, \omega) + \\ + iM_3(\omega) g_1(0, \omega), \\ \frac{\partial f_N(l, \omega)}{\partial z} = iC_1(\omega) f_N(l, \omega) + iC_2(\omega) g_N(l, \omega), \\ \frac{\partial g_N(l, \omega)}{\partial z} = iD_1(\omega) f_N(l, \omega) + iD_2(\omega) g_N(l, \omega).\end{gathered} \tag{4}$$

В этих обозначениях: k_s волновое число продольной волны в s-ом слое ($k_s = \omega/c_s$), c_s – скорость распространения продольной волны в s-ом слое; γ_s – волновое число сдвиговой волны в s-ом слое ($\gamma_s = \omega/d_s$), d_s скорость распространения сдвиговой волны в s-ом слое;

$$\begin{gathered}\Phi_1^s = \left[\frac{\rho_{s-1}}{\rho_s} + \frac{2\Delta_0^2(\mu_s - \mu_{s-1})}{\omega^2 \rho_s}\right], \\ \Phi_2^s = \left[\frac{2\Delta_0(\mu_s - \mu_{s-1})}{\omega^2 \rho_s}\right], \\ \Phi_3^s = \Phi_1^s, \quad \Phi_4^s = -\Phi_2^s, \\ Q_1^S = \left[1 - \frac{2\Delta_0^2(\mu_s - \mu_{s-1})}{\omega^2 \rho_s}\right], \\ Q_2^s = \Delta_0\left[1 - \frac{\rho_s}{\rho_{s-1}} - \frac{2\Delta_0^2(\mu_s - \mu_{s-1})}{\omega^2 \rho_s}\right], \\ Q_3^s = Q_1^s, \quad Q_4^s = -Q_2^s.\end{gathered} \tag{5}$$

Величины L_i, $M_i (i = 1, 2, 3)$, C_i, $D_i (i = 1, 2)$ зависят от физических характеристик соприкасающихся сред при $z = 0$ и $z = 1$. Условия сопряжения в краевой задаче (4) являются следствием непрерывности нормальных и тангенциальных составляющих напряжений и перемещений на границах раздела слоев с различными физическими свойствами.

В качестве критерия оптимизации в исследуемой вариационной постановке рассматривается мера близости энергетического коэффициента пропускания упругой волны $T(\omega)$ к требуемой зависимости $\tilde{T}(\omega)$ в заданном диапазоне частот $[\omega_{\min}, \omega_{\max}]$:

$$J = \int\limits_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} [T(\omega) - \tilde{T}(\omega)]^2 d\omega \Rightarrow \min. \qquad (6)$$

Здесь

$$T(\omega) = \frac{\Pi_z^{\text{пр}}}{\Pi_z^{\text{пад}}} = \frac{c_0\rho_0\cos\vartheta_{N+1}}{c_{N+1}\rho_{N+1}\cos\vartheta_0}\mathrm{mod}^2(f_{N+1}(l, \omega)).$$

В этих обозначениях:

$\Pi_z^{\text{пад}}$, $\Pi_z^{\text{пр}}$ – проекции вектора Пойнтига на ось z в падающей и прошедшей упругих волнах соответственно; ϑ_{N+1} – угол, под которым продольная волна выходит из конструкции.

Необходимые условия оптимальности. Сформулируем для рассматриваемой задачи оптимального синтеза в вариационной постановке (4)–(6) принцип максимума Л.С. Понтрягина [17, 18]. Будем рассматривать случай, когда в распоряжении имеется дискретный набор материалов, которые могут быть использованы при проектировании конструкции. На дискретном наборе материалов физические свойства материалов не являются независимыми друг от друга, а будут связаны между собой некоторыми функциональными зависимостями. Выберем в качестве независимого физического параметра материала плотность ρ. Тогда остальные физические параметры материала (скорости распространения продольных c и поперечных волн d в материале) будут являться некоторыми функциями от ρ: $c = c(\rho)$, $d = d(\rho)$. Множество плотностей материалов допустимого набора обозначим через Λ. Отличие управляемых систем вида (4) от управляемых систем, для которых был сформулирован классический вариант принципа максимума Л.С. Понтрягина [18], состоит в том, функции $f_s(z, \omega)$, $g_s(z, \omega)$, выполняющие роль фазовых переменных, претерпевают разрывы в точках, являющихся координатами границ раздела слоев с различными физическими свойствами. Используя общую методологию принципа максимума Л.С. Понтрягина [17, 18], можно обобщить классический вариант принципа максимума Л.С. Понтрягина на рассматриваемый случай управляемых систем с разрывными фазовыми координатами вида (4). Тогда для общего случая негармонического воздействия функция Гамильтона представима в виде:

$$H(;\rho)|_z = \sum_{m=1}^{5} l_m(\rho)A_m(z),$$
$$b_{s-1} \le z \le b_s, \quad s = 1, \ldots, N, \quad \rho \in \Lambda. \qquad (7)$$

В этих обозначениях функции $l_m(\rho)(m = 1, \ldots, 5)$ имеют вид:

$$l_1(\rho) = \frac{1}{\rho c^2(\rho)}, \quad l_2(\rho) = \frac{1}{\rho d^2(\rho)},$$
$$l_3(\rho) = 1 - 2\frac{d^2(\rho)}{c^2(\rho)}, \qquad (8)$$
$$l_4(\rho) = \rho, \quad l_5(\rho) = \rho d^2(\rho)\left(1 - \frac{d^2(\rho)}{c^2(\rho)}\right).$$

$$A_m(z) = \int\limits_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} \alpha_m(z, \omega)d\omega, \quad (m = 1, \ldots, 5),$$
$$0 \le z \le l. \qquad (9)$$

Функции $\alpha_m(z, \omega)$, $(m = 1, \ldots, 5)$ выражаются через решения исходной краевой задачи и сопряженной к ней, описывающих распространение упругих волн в слоистой среде [18]; l – общая толщина слоистой структуры.

Тогда необходимые условия оптимальности типа принципа максимума Л.С. Понтрягина для рассматриваемых задач синтеза в вариационной постановке могут быть сформулированы следующим образом. Пусть $\rho^*(z)$, $c^*(z)$, $d^*(z)(0 \le z \le l)$ – оптимальное распределение физических свойств по толщине неоднородной конструкции. Тогда выполнено условие

$$H(^*; \rho^*(z))|_z = \max_{\rho \in \Lambda} H(^*; \rho)|_z,$$
$$0 \le z \le l. \qquad (10)$$

(Пропущенные аргументы у функции Гамильтона подсчитываются на оптимальном решении).

Необходимые условия оптимальности, связанные с нелокальными вариациями управляющих параметров (10), могут быть применены для построения методов последовательных приближений, позволяющих находить решения, удовлетворяющие необходимым условия оптимальности. Тем не менее, получаемые решения, удовлетворяющие необходимым условия оптимальности (10), носят локальный характер вследствие существенной многоэкстремальности исследуемых волновых задач оптимального синтеза. Поэтому непосредственное применение вычислительных процедур оптимизации на основе принципа максимума Л.С. Понтрягина еще не позволяет оценить насколько существенно построенные локально-оптимальные решения отличаются от решений, реализующих предельные возможности.

Априорное сужение множества материалов допустимого набора. Существенно повысить эффективность методов последовательных приближений, основанных на необходимых условиях оптимальности (10), позволяет априорное сужение множества допустимых вариантов на основе качественного анализа структурных особенностей уравнений, описывающих распространении волн в слоисто-неоднородных композиционных структурах. Для априорного сужения множества материалов допустимого набора исследуем условия достижения функцией Гамильтона (7) своих экстремальных значений. Конструктивный анализ условий достижения функцией Гамильтона (7) своих экстремальных значений позволяет построить аналитические соотношения, которым удовлетворяют материалы допустимого набора, входящие в состав оптимальной конструкции.

Множеству материалов допустимого набора может быть поставлено в соответствие множество векторов:

$$l(\rho) = \langle l_1(\rho), l_2(\rho), l_3(\rho), l_4(\rho), l_5(\rho)\rangle,$$
$$\rho \in \Lambda.$$

Введем множество Q:

$$Q = \mathrm{conv}\{l(\rho), \rho \in \Lambda\} =$$
$$= \left\{l \in E_5 \colon l = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i l(\rho^i);\ \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1,\ \alpha_i \geq 0\right\}. \qquad (11)$$

Через $\mathrm{conv}A$ обозначена выпуклая оболочка множества A; m – число материалов допустимого набора; ρ^i, $(i = 1, \ldots, m)$ – множество плотностей материалов допустимого набора Λ.

Анализ структуры функции Гамильтона (7) позволяет установить справедливость утверждения.

Утверждение 1. Материалы, входящие в состав оптимальной слоисто-неоднородной конструкции, соответствуют вершинам выпуклого многогранника Q (11).

Структурные особенности функции Гамильтона (7), условия достижения функцией Гамильтона своих экстремальных значений позволяют построить аналитические соотношения, которым удовлетворяют материалы допустимого набора, входящие в оптимальную конструкцию, а также ранжировать материалы допустимого набора по степени перспективности для применения при оптимальном проектировании конструкций с требуемым комплексом свойств в качестве высокоэффективных материалов.

Введем функции

$$E_1(\rho) = \rho c^2(\rho);\quad E_2(\rho) = \rho d^2(\rho);$$
$$E_3(\rho) = d(\rho)/c(\rho);\quad E_4(\rho) = \rho; \qquad (12)$$
$$\rho \in \Lambda.$$

Определим множества

$$\Lambda_p^* = \{\rho^* \colon \rho^* = \operatorname*{argextr}_{\rho \in \Lambda} E_p(\rho)\},$$
$$(p = 1, 2, 3, 4); \qquad (13)$$

$$\Lambda^{**} = \bigcup_{p=1}^{4} \Lambda_p^*. \qquad (14)$$

В этих обозначениях: $x^* = \operatorname*{argextr}_x A(x)$, если $A(x^*) = \operatorname*{extr}_x A(x)$.

Утверждение 2. Наиболее перспективные материалы при оптимальном проектировании конструкций при воздействии упругих волн, входят в состав множества Λ^{**} (14).

Утверждение 3. Пусть материалы допустимого набора обладают следующими свойствами:

$$\min_{\rho \in \Lambda} c(\rho) = c(\rho_{\min}),\quad \min_{\rho \in \Lambda} d(\rho) = d(\rho_{\min}),$$

$$\max_{\rho \in \Lambda} c(\rho) = c(\rho_{\max}),\quad \max_{\rho \in \Lambda} d(\rho) = d(\rho_{\max}).$$

Тогда множество Λ^{**} состоит только из двух материалов, которыми являются материалы с максимальной и минимальной плотностью.

В соответствии с этим для улучшения качества слоисто-неоднородных упругих конструкций при воздействии упругих волн целесообразно расширение допустимого набора материалов за счет включения в допустимый набор материалов, обладающих вышеперечисленными свойствами. При этом не только улучшается качество композиционной конструкции в смысле увеличения эффективности гашения волн, но и улучшаются условия конструктивной реализуемости, поскольку в состав оптимальной конструкции будет входить меньшее число материалов.

Перспективные множества материалов допустимого набора. С учетом структуры функции Гамильтона (7) запишем ее в виде:

$$H(;\rho) = \sum_{i=1}^{5} \alpha_i l_i(\rho),$$
$$\alpha = \langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\rangle \in E_5. \qquad (15)$$

Введем второе по перспективности множество материалов допустимого набора, которые могут входить в оптимальную конструкцию. Обозначим через Λ_0^* подмножество материалов допустимого набора Λ, которые соответствуют вершинам выпуклого многогранника Q (11), когда вектор α меняется вдоль каждой из координатных плоскостей. При этом экстремальное значение функции Гамильтона H (7) будет достигаться на тех же элементах, что и экстремальное значение функций

$$H_{pk}(*;\rho)|_z = l_p(\rho)A_p^*(z) + l_k(\rho)A_k^*(z), \quad 0 \le z \le l, \quad (p, k = 1, \ldots, 5). \tag{16}$$

Введем функцию:

$$L_{pk}(\alpha, \beta) = -\frac{l_k(\beta) - l_k(\alpha)}{l_p(\beta) - l_p(\alpha)}, \quad \alpha, \beta \in \Lambda,$$
$$\Lambda = \{\rho_{\min} = \rho^1 < \rho^2 < \ldots < \rho^m = \rho_{\max}\}. \tag{17}$$

Конструктивный анализ условий достижения функциями H_{pk} (16) своих экстремальных значений позволяет доказать следующее утверждение.

Утверждение 4. Физические свойства материалов, входящих в состав множества Λ_0^*, удовлетворяют следующей системе рекуррентных соотношений:

$$L_{pk}(\rho^{j^+_{p,k,r-1}}, \rho^{j^+_{p,k,r}}) = \min_{\rho \in M^+_{p,r}} L_{pk}(\rho^{j^+_{p,k,r-1}}, \rho), \quad (r = 1, \ldots, n^+_{pk};\ p, k = 1, \ldots, 5,\ p < k); \tag{18}$$

$$\rho^{j^+_{p,k,0}} = \underset{\rho \in \Lambda}{\operatorname{argmin}}\, l_p(\rho); \quad \rho^{j^+_{p,k,n^+_{pk}}} = \underset{\rho \in \Lambda}{\operatorname{argmax}}\, l_p(\rho);$$

$$M^+_{p,r} = \left\{\rho \in \Lambda\colon l_p(\rho) > l_p(\rho^{j^+_{p,k,r-1}})\right\}, \quad r = 1, \ldots, n^+_{p,k,r-1}; \tag{19}$$

$$L_{pk}(\rho^{j^-_{p,k,r-1}}, \rho^{j^-_{p,k,r}}) = \max_{\rho \in M^-_{p,r}} L_{pk}(\rho^{j^-_{p,k,r-1}}, \rho), \quad (r = 1, \ldots, n^-_{pk};\ p, k = 1, \ldots, 5,\ p < k); \tag{20}$$

$$\rho^{j^-_{p,k,0}} = \underset{\rho \in \Lambda}{\operatorname{argmin}}\, l_p(\rho); \rho^{j^-_{p,k,n^-_{pk}}} = \underset{\rho \in \Lambda}{\operatorname{argmax}}\, l_p(\rho);$$

$$M^-_{p,r} = \left\{\rho \in \Lambda\colon l_p(\rho) > l_p(\rho^{j^-_{p,k,r-1}})\right\}, \quad r = 1, \ldots, n^-_{p,k,r-1}. \tag{21}$$

Основой для получения системы рекуррентных соотношений (18)–(21) является исследование условий достижения функциями Гамильтона своих экстремальных значений в координатах границ раздела слоев с различными физическими свойствами. В оптимальных координатах границ раздела слоев b_s^* $(s = 1, \ldots, N-1)$ экстремум функций Гамильтона должен достигаться одновременно на двух материалах, являющихся соседними в оптимальной конструкции. Поэтому с учетом вида функций Гамильтона (7) можно показать, что физические свойства материалов слоев, входящих в оптимальную конструкцию, удовлетворяют системе рекуррентных соотношений (18)–(21). В рекуррентном соотношении (18) минимум функции L_{pk} по аргументу ρ находится по множеству $M^+_{p,r}$ (19). В рекуррентном соотношении (20) максимум функции L_{pk} по аргументу ρ находится по множеству $M^-_{p,r}$ (21).

Введем множества

$$\Lambda^+_{pk} = \left\{\rho^{j^+_{p,k,0}}, \rho^{j^+_{p,k,1}}, \ldots, \rho^{j^+_{p,k,n^+_{p,k}}}\right\};$$
$$l_p(\rho^{j^+_{p,k,0}}) < l_p(\rho^{j^+_{p,k,1}}) < \ldots < l_p\left(\rho^{j^+_{p,k,n^+_{pk}}}\right); \tag{22}$$

$$\Lambda^-_{pk} = \left\{\rho^{j^-_{p,k,0}}, \rho^{j^-_{p,k,1}}, \ldots, \rho^{j^-_{p,k,n^-_{p,k}}}\right\};$$
$$l_p(\rho^{j^-_{p,k,0}}) < l_p(\rho^{j^-_{p,k,1}}) < \ldots < l_p\left(\rho^{j^-_{p,k,n^-_{pk}}}\right); \tag{23}$$

$$\Lambda^*_{pk} = \Lambda^+_{pk} \cup \Lambda^-_{pk}; \tag{24}$$

$$\Lambda^*_0 = \bigcup_{\substack{p,k = 1,\ldots,5 \\ p<k}} \Lambda^*_{pk}; \tag{25}$$

Таким образом, в состав множества Λ_0^* входят материалы допустимого набора, физические свойства которых удовлетворяют системе рекуррентных соотношений (18)–(21). При этом $\Lambda^{**} \subset \Lambda_0^*$.

В случае, когда в распоряжении проектировщика имеется достаточно большой набор материалов с различными физическими свойствами (множество Λ), из которых требуется спроектировать конструкцию с заранее заданными свойствами, например обеспечивающую наиболее эффективное гашение энергии упругой волны в широкой области спектра, то сразу возникает один из наиболее важных вопросов: все ли материалы необходимо использовать? Можно ли, не проводя компьютерных исследований на модели, априори выделить ограниченное число наиболее перспективных материалов, т.е. ранжировать материалы по степени перспективности. На основе аппарата теории необходимых условий оптимальности,

Таблица. Физические свойства допустимого набора материалов, применяемых при оптимальном проектировании слоисто-неоднородных конструкций при воздействии упругих волн

N пп	ρ, кг/м^3	c, м/с	d, м/с
1	300	598	245
2	917	2743	1433
3	930	1040	30
4	1050	2350	1120
5	1740	6440	3090
6	2200	5970	3780
7	2250	5100	2840
8	2300	5600	3300
9	2500	5800	3350
10	2700	6420	3110
11	4400	6110	3270
12	4550	8570	5030
13	6920	4170	2410
14	7180	3320	1670
15	7860	5890	3210
16	7870	5850	3230
17	8900	4560	2250
18	9000	6540	3500
19	10500	3600	1590
20	11340	2120	740
21	18700	5230	2860
22	19300	3140	1170
23	21400	3960	1670

связанных с нелокальными вариациями управляющих параметров [17, 18], в статье показано, что такое упорядочение материалов допустимого набора по степени перспективности возможно.

Первое наиболее перспективное множество (в нашем случае это множество Λ^{**} (14)) состоит из материалов, применение которых в конструкции даст наибольший эффект. Т.е. конструкция, спроектированная только из данных материалов уже может обладать свойствами достаточно близкими к требуемым. И именно из этих материалов и необходимо начинать процесс проектирования.

В случае, когда спроектированная конструкция, являющаяся оптимальной для априори выделенного набора наиболее перспективных материалов Λ^{**}, тем не менее в недостаточной степени удовлетворяет проектировщика по степени близости полученных свойств к требуемым (например по степени гашения энергии упругой волны на выходе из конструкции), то возникает необходимость расширения набора перспективных материалов. Т.е. возникает необходимость исследования возможности априорного выделения дополнительного набора хотя и менее перспективных материалов, но тем не менее позволяющего еще более расширить возможности улучшения характеристик проектируемой конструкции (в нашем случае, это множество Λ_0^* (25)). Такой подход позволяет существенно увеличить эффективность решения проблемы оптимального синтеза слоистых структур с требуемым комплексом свойств, при волновых воздействиях. Непосредственное же решение проблемы оптимального синтеза сразу для большого множества исходных материалов представляет чрезвычайно сложную задачу большой размерности, комбинаторного вида, поскольку такие варьируемые при синтезе параметры, как физические свойства материалов слоев, имеют дискретную область задания. В случае же, если в проектируемой конструкции окажутся неперспективные материалы, то эффективность конструкции может быть существенно снижена и при этом без предварительного конструктивного анализа, который был проведен в настоящей работе, сложно будет установить, какой из материалов существенно снижает качество проектируемой конструкции.

Таким образом, построенные аналитические соотношения позволяют осуществлять эффективное априорное сужение множества материалов допустимого набора и, следовательно, повысить эффективность методов поиска оптимальных решений и расширить пределы применимости различных подходов.

При этом открываются возможности направленного поиска физических свойств материалов, включение которых в конструкцию приводит к наибольшему эффекту. А именно, если исходный набор материалов Λ, тем не менее, не позволяет синтезировать конструкцию со свойствами, удовлетворяющими проектировщика, то расширение допустимого набора Λ необходимо производить за счет таких новых материалов, физические свойства которых будут обеспечивать их включение в множество наиболее перспективных материалов Λ^{**}.

Приведенные результаты являются обобщением полученных ранее результатов ([19–27]) для случая, когда слоисто-неоднородная структура состоит только из идеальных слоев (в которых могут распространяться только продольные волны), на существенно более сложный случай упругих слоев, в которых могут распространяться волны двух типов (продольные и сдвиговые), а также происходить преобразование различных типов волн на границах раздела упругих слоев с различными физическими свойствами.

Пример. Приведем пример на применение построенных аналитических соотношений для эффективного выделения наиболее перспективных материалов допустимого набора. Пусть допустимый набор включает в себя 23 материала, плотности, скорости распространения продольных (c) и поперечных волн (d) в которых приведены в таблице.

Для рассматриваемого набора из 23 материалов множество Λ^{**} (14) состоит из 5 материалов:

$$\Lambda^{**} = \{\rho^1, \rho^3, \rho^6, \rho^{21}, \rho^{23}\}. \tag{26}$$

Таким образом, набор наиболее перспективных материалов состоит из 5 материалов и включает в себя материалы, как правило, составляющие значительную долю оптимальной конструкции. Именно на данных материалах преимущественно будет достигаться экстремум функции Гамильтона (7).

Множество Λ_0^* (25) имеет вид

$$\begin{gathered}\Lambda_0^*/\Lambda^{**} = \{\rho^1, \rho^2, \rho^4, \rho^5, \rho^7, \rho^8, \rho^{10},\\ \rho^{11}, \rho^{12}, \rho^{13}, \rho^{16}, \rho^{18}, \rho^{20}, \rho^{22}\}.\end{gathered} \tag{27}$$

Набор менее перспективных материалов Λ_0^*/Λ^{**} состоит из 13 материалов, которые хотя и могут входить в оптимальную конструкцию, но как правило, составляют в ней меньшую долю. Достижение функцией Гамильтона экстремума на данных материалах, как правило, будет происходить в существенно меньшем числе случаев.

В соответствии с приведенными результатами, связанными с установлением возможности эффективного ранжирования материалов допустимого набора по степени перспективности, оптимальный синтез слоисто- неоднородных структур с требуемым комплексом свойств при воздействии упругих волн (например. обеспечивающих предельно возможное гашение энергии упругой волны в достаточно широком спектральном диапазоне) целесообразно проводить по следующей схеме.

Если имеется существенное ограничение на количество материалов, участвующих в проектировании конструкции, например не более двух, то учитывая предыдущие результаты, полученные автором (например [18]), целесообразно в качестве таковых выбрать материалы с максимально различающимися волновыми сопротивлениями. Такие материалы входят под номерами 1 и 23 в множество Λ^{**} (26). Если спроектированная оптимальная конструкция для данного набора из двух материалов не удовлетворяет проектировщика по своим свойствам, то следует расширить набор материалов до минимального набора наиболее перспективных материалов Λ^{**} (26). В данное множество, кроме материалов с максимально различающимися волновыми сопротивлениями, входят материал № 3, обладающий минимальной скоростью распространения сдвиговых волн, материал № 6, который обладает относительно небольшой плотностью, но тем не менее, имеет одновременно достаточно высокие скорости распространения продольных и сдвиговых волн в нем, а также материал № 21 в табл. 1, который обладает очень высокой плотностью, близкой к максимальной, и одновременно обладает высокими скоростями распространения продольных и поперечных волн в нем, существенно, превосходящие скорости распространения продольных и сдвиговых волн в наиболее тяжелом материале допустимого набора. В соответствии с полученными результатами оптимальная конструкция, спроектированная из наиболее перспективного набора материалов Λ^{**} (26), может обладать высокоэффективными свойствами при небольшом числе материалов, составляющих конструкцию. И только в том случае, когда синтезированная оптимальная конструкция для допустимого набора наиболее перспективных материалов Λ^{**} (26) не в полной мере удовлетворяет проектировщика по заданному комплексу свойств, является целесообразным провести дальнейшее расширение допустимого набора материалов до множества Λ_0^* (27).

В работе рассмотрен случай, когда полупространства, окаймляющие систему упругих слоев, являются идеальными, т.е. в них могут распространяться только продольные волны. Поэтому полученные результаты в общем случае применимы для случая, когда критерием качества является степень близости энергетического коэффициента пропускания продольной волны $T(\omega)$ к требуемой зависимости $\tilde{T}(\omega)$ в заданном диапазоне частот $[\omega_{min}, \omega_{max}]$ (6). Например, в рамках рассмотренной постановки может быть исследован важный класс задач оптимального синтеза, связанных с исследованием расширения возможностей наиболее эффективного гашения энергии упругой волны в широком диапазоне частот.

В аналогичной форме может быть рассмотрен и случай, когда полупространства, окаймляющие систему упругих слоев, являются упругими средами. В этом случае значительно возрастает число возможных постановок задач оптимального синтеза слоисто-неоднородных структур при воздействии упругих волн, ряд которых отмечен в п. 1.

Работа выполнена про поддержке Российского фонда фундаментальных исследований – гранты № 05-08-01176, № 06-01-96000.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гусев Е.Л.* Качественные закономерности взаимосвязи параметров в оптимальных структурах в задачах оптимального синтеза неоднородных структур из дискретного набора материалов при волновых воздействиях // Доклады РАН. 1996. Т. 346. № 3. С. 324–326.
2. *Гусев Е.Л.* Качественные закономерности структуры оптимальных решений в задачах оптимального синтеза многослойных конструкций при воздействии упругих волн//Доклады РАН. 1998. Т. 368. № 1. С. 53–56.
3. *Гусев Е.Л.* Качественные закономерности взаимосвязи параметров в слоистых структурах, реализующих предельные возможности // Акуст. журн. 1999. Т. 45. № 4. С. 502–506.
4. *Гусев Е.Л.* Свойство внутренней симметрии в структуре оптимальных слоистых конструкций// Акуст. журн. 2001 Т.47. № 1. С. 43–48.
5. *Бакулин В.Н., Гусев Е.Л., Марков В.Г.* Методы оптимального проектирования конструкций из традиционных и композиционных материалов при волновых и статических воздействиях//Инженерно-физический журн. 2001. № 6. С. 53–57.
6. *Гусев Е.Л.* Об оптимальном синтезе слоистых неоднородных структур// Акуст. журн. 2002. Т. 48. № 3. С. 325–330.
7. *Бакулин В.Н., Гусев Е.Л., Марков В.Г., Емельянов А.И.* Оптимальное проектирование и численный расчет конструкций с применением композиционных и традиционных материалов// Математическое моделирование.2002. Т. 14. № 9. С. 71–77.
8. *Гусев Е.Л.* Предельные возможности слоистых структур при воздействии акустических волн// Известия РАН. Механика твердого тела. 2003. № 2. С. 173–179.
9. *Гусев Е.Л., Кузнецов Г.Н.* Пассивные и активные методы гашения волновых полей, их взаимосвязь // Тр. VII Межд. конф. "Прикладные технологии гидроакустики и гидрофизики (ГА–2004)", С.-Петерб., 2004. С. 238–242.
10. *Hossain S. J., Sinha P. K., Sheikh A.* H . A finite element formulation for the analysis of laminated composite shells // Comput. and Struct. 2004. V. 82. № 20–21. P. 1623–1638.
11. *Chakraborty A., Gopalakrishnan S.* Wave propagation in inhomogeneous layered media: solution of forward and inverse problems// Acta mech. 2004. V. 169. № 1–4. P. 153–185.
12. *Филатов Г.В.* Об оптимальном проектировании оболочек при импульсном нагружении // Прикладная механика. 2005. Т. 41. № 8. С. 97–104.
13. *G. Sebastian, A. Noureddine, O. Haisam.* The transmission loss of curved laminates and sandwich composite panels // J. Acoust. Soc. Amer. 2005. V. 118. № 2. P. 774–790.
14. *Гусев Е.Л., Бакулин В.Н., Бакулин Д.В.* Методы численного расчета и оптимального проектирования слоисто-неоднородных конструкций при воздействии экстремальных факторов // Тр. IV Межд. конф. "Материалы и покрытия в экстремальных условиях: исследования, применение", Крым, Жуковка, 2006. С. 67–68.
15. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука. 1986. 286 с.
16. *Гринченко В.Т., Мелешко В.В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наукова Думка. 1981. 284 с.
17. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука. 1983. 393 с.
18. *Гусев Е.Л.* Математические методы синтеза слоистых структур. Новосибирск: Наука. 1993. 262 с.
19. *Гусев Е.Л.* Априорные оценки в задачах оптимального синтеза акустических фильтров//Акуст. журн. 1994. № 5. С. 782–786.
20. *Гусев Е.Л.* О сужении области поиска в задачах оптимального синтеза слоистых структур с заданным комплексом свойств//Прикл. механика и техн. физика.1997. Т. 38. № 5. С. 129–135.
21. *Гусев Е.Л.* Об оптимальных конструкциях в задачах синтеза акустических структур // Акуст. журн. 1997. Т. 43. № 2. С. 248–251.
22. *Гусев Е.Л.* Качественные закономерности оптимальной структуры конструкций в задачах оптимального синтеза акустических систем // Акуст. журн. 1997. Т. 43. № 5. С. 705–708.
23. *Гусев Е.Л.* Качественные свойства оптимальных акустических структур // Инженерно-физический журн. 1998. Т. 71. № 5. С. 902–905.
24. *Гусев Е.Л.* Качественные закономерности взаимосвязи параметров в слоистых структурах, реализующих предельные возможности // Акуст. журн. 1999. Т. 45. № 4. С. 502–506.
25. *Гусев Е.Л.* Качественные свойства оптимальных решений в задачах оптимального синтеза неоднородных структур при воздействии акустических волн // МТТ. 1999. № 3. С. 171–175.
26. *Гусев Е.Л.* Априорное сужение области поиска в волновых задачах синтеза неоднородных структур // Математическое моделирование. 2000. Т. 12. № 4. С. 117–127.
27. *Гусев Е.Л.* Качественные закономерности структуры оптимальных композиционных конструкций при волновых воздействиях// Математическое моделирование. 2000. Т. 12. № 7. С. 7–10.

Constructive Methods for Synthesizing Inhomogeneous Layered Structures under the Effect of Elastic Waves

E. L. Gusev

Joint Institute of Physicotechnical Problems of the North, Siberian Division, Russian Academy of Sciences, ul. Oktyabr'skaya 1, Yakutsk, 677980 Russia

e-mail: elgusev@mail.ru

Abstract—A variational statement of the problem of optimal synthesis aimed at obtaining inhomogeneous layered structures that exhibit a required set of properties under the effect of elastic waves is studied. The possibility of a purposeful control of mode conversion at the boundaries between elastic layers is investigated with a view to extending the limits in designing structurally inhomogeneous systems with preset properties. The optimum conditions are presented for the problems of optimal synthesis of inhomogeneous layered structures under the effect of elastic waves in terms of the aforementioned variational statement. Analytical relations are derived for an effective a priori contraction of the allowable set of materials, which makes it possible to increase the efficiency of the search for optimal solutions and to extend the limits of applicability of different approaches
.