АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2009, том 55, № 2, с. 160–170

НЕЛИНЕЙНАЯ АКУСТИКА

УДК 534.21

ОТНОСИТЕЛЬНО НЕИСКАЖАЮЩИЕСЯ ВОЛНЫ И ПРОФИЛИ В НЕЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКЕ. ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ

© 2009 г. Ю. Н. Маков

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет, кафедра акустики
119992 Москва, Ленинские горы
Тел.: (495) 939-29-43
E-mail: yuri_makov@mail.ru

Поступила в редакцию 14.05.08 г.

Показана физическая обусловленность и эффективность использования анзаца относительно неискажающихся волн для нахождения точных решений уравнений нелинейной акустики.

PACS: 43.25.Cb, 02.30.Jr, 11.10.Lm, 47.35.Rs

ВВЕДЕНИЕ

Нелинейная акустика вместе с другими традиционно "нелинейными дисциплинами" такими как гидродинамика, физика плазмы, нелинейная оптика и т.п. вносит существенный вклад в формирование и развитие "интегрирующего" научного направления, которое чаще всего определяется как "теория нелинейных волн", "нелинейная динамика", "Nonlinear Science" (за рубежом). Вместе с тем, нелинейная акустика со своими характерными особенностями (отсутствие дисперсии, формирование волновых профилей с ударными фронтами и т.п.) и соответствующими математическими моделями, методами, отличительными полевыми структурами находится до некоторой степени "в стороне" от более общей для других дисциплин математической теории нелинейных волн. Формально это демонстрируется тем, что, как правило, в обобщающих (обзорных) монографиях по нелинейным волнам и их математическому анализу (см., например, [1–4]) уравнения нелинейной акустики или совсем не рассматриваются, или все ограничивается простейшими одномерными уравнениями. К тому же, если говорить о научных интересах сегодняшнего дня по исследованию нелинейных неодномерных полевых структур, то в силу уже отмеченной специфики и соответственно больших математических трудностей нелинейная акустика заметно отстает по обеспеченности точными "эталонными" решениями от других разделов нелинейной науки, например, нелинейной оптики (см. [5, 6]).

В данной работе показано, что для нахождения точных аналитических решений всех основных типов уравнений нелинейной акустики большими возможностями обладает использование анзаца так называемых "относительно неискажающихся волн", которые под таким названием были введены в классических монографиях [7, 8] как особый класс решений линейных волновых уравнений. В последние годы наблюдается активная и результативная деятельность по нахождению новых (нестандартных) решений [9–12] линейного волнового уравнения на основе указанного анзаца, к которым, в частности, относятся известные решения для "бездифракционных" пучков [13, 14].

Эффективное применение такого же анзаца в нелинейной акустике обусловлено его "физической содержательностью" для данной области, что дает определенную универсальность в поиске решений различных уравнений нелинейной акустики и, вместе с тем, еще до процедуры решения определяет физический смысл и осуществимость этих решений.

Структурно статья состоит из четырех разделов: 1-й – данное введение, во втором разделе показаны отличительные особенности применения анзаца относительно неискажающихся волн для линейного волнового уравнения и для уравнений нелинейной акустики. В третьем разделе, состоящем из соответствующих подразделов, находятся точные "физически обоснованные" решения основных уравнений нелинейной акустики. В Заключении кратко обсуждаются возможности и значение результатов данной работы.

2. ОТНОСИТЕЛЬНО НЕИСКАЖАЮЩИЕСЯ ВОЛНЫ КАК РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ И МЕТОДИКА ИСПОЛЬЗОВАНИЯ АНЗАЦА ЭТОГО КЛАССА ВОЛН В НЕЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКЕ

Для классического волнового уравнения

$$u''_{tt} - c^2 \Delta u = 0 \qquad (1)$$

его известное решение в виде неизменяемой по форме бегущей плоской волны (т.е. волны с конкретным видом фазовой функции) является единственным представителем класса "неискажающихся" решений [7, 8], который определяется как

$$u = W(S(x_1, x_2, x_3, t)), \tag{2}$$

где S – фазовая функция, а функция одной переменной $W(.)$ описывает форму волны, причем решение (2) уравнения (1) предполагает произвольность функции W. Это дает основание также называть такие решения волнами без дисперсии [7, 8].

Для расширения класса возможных решений волнового уравнения (1), сохраняющих при распространении в той или иной мере свою форму, в [7, 8] вводится более общее понятие "относительно неискажающихся волн", определяемых следующим анзацем:

$$u = g(x_1, x_2, x_3, t)W(S(x_1, x_2, x_3, t)), \tag{3}$$

в котором кроме определенных выше элементов присутствует "амплитудная" функция g, описывающая масштабные изменения формы волны при сохранении характерного вида этой формы. Этот анзац, также как и (2), предполагает решение уравнения (1) при произвольном виде функции (формы волны) W, но при конкретной и взаимосвязанной паре функций g и S. Отметим, что остающаяся произвольной в процессе нахождения решения функция $W(.)$ позволяет удовлетворить заданным краевым условиям.

Если подставить решение в виде (3) в уравнение (1), то в силу произвольности функции W, а значит и ее производных W' и W'', группы собранных при них слагаемых должны быть приравнены к нулю для удовлетворения в целом решения уравнения (1). Это дает следующие три уравнения:

$$g''_{tt} - c^2\Delta g = 0, \tag{4а}$$

$$(S'_t)^2 - c^2(\nabla S)^2 = 0, \tag{4б}$$

$$2(g'_t S'_t - c^2\nabla g\nabla S) + g(S''_{tt} - c^2\Delta S) = 0 \tag{4в}$$

или в более компактном виде $(g^2 S'_t)'_t - c^2\mathrm{div}(g^2\nabla S) = 0$.

Полученные уравнения (4) обобщают приведенные в [15] соотношения для более привычного, но более частного вида фазовой функции бегущих волн

$$S = t - c^{-1}\psi(x_1, x_2, x_3) \tag{5}$$

и при независимой от времени функции g, когда из (4) получается следующая система уравнений для функций ψ и g, зависящих только от пространственных координат,

$$\Delta g = 0, \ (\nabla\psi)^2 = 1, \ \nabla(g^2\nabla\psi) = 0. \tag{6}$$

Уравнения (4) дают основание для следующих интересных выводов. Во-первых, поиск относительно неискажающихся решений (3) волнового уравнения (1) через решение системы (4) сводит задачу в классе линейных уравнений к нелинейным уравнениям, что нетипично для общей тенденции в методах поиска решений путем перехода от более сложного к более простому*). Во-вторых, эти же уравнения (4) показывают, что более простой по структуре класс решений состоит из меньшего числа "представителей" в силу более жестких ограничений, накладываемых соответствующими "усеченными" уравнениями (4). Действительно, например, для истинно неискажающихся решений (2) с $g \equiv 1$ фазовая функция S должна одновременно удовлетворять волновому уравнению (см. второе уравнение (4б)) и уравнению характеристической поверхности (4в). Известная комбинация переменных $S = t - \mathbf{a}\cdot\mathbf{r}/c$ ($\mathbf{a}$ – заданный единичный вектор) является единственным совместным решением этих двух различных уравнений, т.е. действительно класс неискажающихся решений с анзацем (2) представляют только плоские бегущие волны произвольной формы W, что уже отмечалось выше.

Подкласс относительно неискажающихся волн с "классической" фазовой функцией (5) и стационарной амплитудной функцией g представлен точными решениями системы уравнений (6), а значит, и волнового уравнения (1), обобщающими известные плоские, сферические и цилиндрические волны:

$$u_1 = g_0(x, y)W(t \pm z/c) \tag{7}$$

(функция g_0 – гармоническая, удовлетворяющая уравнению $\Delta g_0(x, y) = 0$; x, y, z – декартова система координат),

$$u_2 = \frac{Y_0(\theta, \varphi)}{r}W(t \pm r/c) \tag{8}$$

($Y_0(\theta, \varphi)$ – сферическая поверхностная гармоника нулевого порядка, т.е. функция, удовлетворяющая "угловой части" уравнения Лапласа в сферических координатах; r, θ, φ – сферические координаты),

$$u_3 = \frac{A\sin(\varphi/2) + B\cos(\varphi/2)}{\sqrt{\rho}}W(t \pm \rho/c) \tag{9}$$

(ρ, φ, z – полярные координаты, A, B – произвольные постоянные).

В работе [17] для фазовой функции вида (5) была рассмотрена общая математическая задача в следующей постановке: какие геометрические поверхности в качестве волновых фронтов будут

*) "Нетипичные" методы нахождения решений уравнений путем усложнения исходных условий можно найти и в других работах (например, см. [16]).

обеспечивать решения волнового уравнения в виде относительно неискажающихся бегущих волн? Ответ состоит в том, что изоповерхности функции ψ (см. (5)) являются поверхностями, известными как циклиды Дюпена [18, 19], которые включают в себя как частные (вырожденные) случаи плоскости, сферы и цилиндры с соответствующим видом (7)–(9) для относительно неискажающихся волн.

Самый общий случай анзаца (2) для относительно неискажающихся волн без ограничения (5) и с нестационарной "амплитудной функцией" g приводит к более сложной системе нелинейных уравнений (4), но при этом значительно расширяет рамки возможных решений, причем с интересным физическим содержанием. В последние годы наблюдается активная деятельность по нахождению и исследованию таких решений волнового уравнения [9–14]. Заметим, что используются различные методики нахождения решений этого класса, не обязательно требующие рассмотрения системы (4). Из всего многообразия известных к настоящему времени точных решений из класса относительно неискажающихся волн (в том числе, так называемых "бездифракционных" полевых структур) приведем лишь один пример локализованного решения, являющегося аналогом получаемому в рамках параболического приближения решению в виде гауссова пучка, широко используемого в акустике и оптике. Еще в начале прошлого века соавтор известного справочника по высшим трансцендентным функциям Г. Бейтмен (H. Bateman) с помощью подходящего инвариантного преобразования координат нашел [20] следующее точное относительно неискажающееся решение волнового уравнения:

$$u = (z \pm ct)^{-1} W\left(z \mp ct + \frac{x^2 + y^2}{z \pm ct}\right), \tag{10}$$

т.е. $g = (z \pm ct)^{-1}$, $S = z \mp ct + \dfrac{x^2 + y^2}{z \pm ct} \equiv \dfrac{r^2 - (ct)^2}{z \pm ct}$, где $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, причем функции g и S естественно удовлетворяют системе уравнений (4). Позднее этот результат был приведен в книге [21] того же автора. Однако любая конкретизация функции W (даже традиционной экспонентой) не дает физически "интересных" распространяющихся волновых структур, поэтому решение (10) долгое время оставалось "в тени". Ситуация изменилась, когда в работе [22] была предложена процедура "комплексификации" функций g и S в решении (10) путем изменения их знаменателей на мнимую постоянную величину $z \pm ct \longrightarrow z \pm ct - ih$, отчего модифицированная функция (10) не перестает быть решением волнового уравнения. С учетом этого преобразования простейший и физически значимый вариант решения (10) волнового уравнения с конкретизацией функции W может быть записан следующим образом:

$$u = \frac{-iu_0}{z - ct - ih} \exp\left[ik\left(z + ct + \frac{\rho^2}{z - ct - ih}\right)\right] =$$
$$= \frac{u_0 \exp\left(-k\rho^2 \dfrac{h}{Z_-^2}\right)}{\sqrt{Z_-^2}} \times \tag{11}$$
$$\times \exp\left[ik\left(\rho^2 \frac{z - ct}{Z_-^2} + \Phi + (z + ct)\right)\right] =$$
$$= U_-(z - ct) U_+(z + ct),$$

где

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad Z_-^2 = (z - ct)^2 + h^2,$$

$$\Phi = k^{-1} \operatorname{arctg}\left(\frac{z - ct}{h}\right),$$

$$U_-(z - ct) = \frac{u_0 \exp\left(-k\rho^2 \dfrac{h}{Z_-^2}\right)}{\sqrt{Z_-^2}} \times$$
$$\times \exp\left[ik\left(\rho^2 \frac{z - ct}{Z^2} + \Phi\right)\right],$$

$$U_+ = \exp[ik(z + ct)].$$

Явный вид решения и его структурирование в виде произведения $U_- U_+$ дает возможность интерпретировать решение как распространяющееся вдоль положительного направления оси z локализованное по поперечным координатам с гауссовой структурой волновое поле в виде фокусированного пучка с несинусоидальным волновым профилем и фазовым фронтом, отличным от стандартного сферического (или параболического), причем вся эта пучковая структура модулируется проходящей в отрицательном по z направлении плоской гармонической волной. Напомним, что исходя из анзаца (3), который лежит в основе структуры данного решения (11) волнового уравнения (1), волновые профили (в данном случае несинусоидальные) сохраняют с точностью до некоторых масштабных изменений свою форму при переходе с одного пространственного положения фазового фронта на другое.

Как следует из вышеприведенного материала, начиная со времени появления классических монографий [7, 8, 15], активная последовательная и результативная "эксплуатация" анзаца относительно неискажающихся волн проводилась в отношении линейного волнового уравнения. Типичные нелинейные уравнения, включающие в себя дисперсионные слагаемые, допускают пол-

ностью неискажающиеся решения в виде кноидальных волн и солитонов, на поиск и анализ которых были направлены основные усилия [1–6]. Вместе с тем, нами отмечено, что для уравнений нелинейной акустики относительно неискажающиеся решения с очевидностью являются "физически обусловленными", чего заранее не скажешь о рассмотренных решениях этого типа для классического волнового уравнения. Действительно, в нелинейной акустике при отсутствии дисперсии распространение пространственно-одномерной волны либо пространственно-локализованной волновой структуры (например, пучка) сопровождается деформацией волнового (временнóго) профиля. В общем случае эта деформация имеет сложный характер (например, "превращение" синусоиды в пилообразный профиль), однако могут иметься определенные виды профилей, которые трансформируются по более простому закону, отражающему только их масштабные изменения при сохранении их специфической формы, что и будет описывать искомое решение в виде относительно неискажающейся волны. Простейшим и широко известным примером такой ситуации является периодическое пилообразное решение уравнения простой волны, вид профиля которого сохраняется при распространении, однако при этом уменьшается пиковое значение, т.е. этот профиль является относительно неискажающимся.

Отметим характерные (по сравнению с линейным случаем) особенности использования анзаца (3) для нахождения решений в виде относительно неискажающихся профилей уравнений нелинейной акустики. Прежде всего, примем во внимание, что из-за наличия в уравнениях нелинейной акустики квадратичного слагаемого эти уравнения несимметричны относительно изменения знака искомой функции, а значит и само решение при использовании анзаца (3) может получиться со значительным сдвигом относительно нулевого уровня (с ненулевым временным средним по периоду). Поэтому для компенсации этого сдвига в случае уравнений с квадратичной нелинейностью необходимо в анзаце (3) предусмотреть аддитивное слагаемое. Для уравнений с кубичной нелинейностью сам анзац (3) будет давать симметричные относительно временнóй оси решения. Следующая специфика использования анзаца (3) в нелинейных уравнениях состоит в том, что наличие дополнительных нелинейных членов в этих уравнениях исключает условие произвольности функции W (формы волны) и ее производных, поскольку иначе необходимость приравнивания нулю отдельных групп сомножителей при этих производных функциях (как ранее получалась система (4)) приводит к переопределенности функций g и S вплоть до их тривиальности (равенство нулю или другой константе). В отсутствие специальной системы уравнений типа (4) все функции, входящие в анзац (3), должны находиться из одного уравнения, которое получается после подстановки анзаца в исходное уравнение и из которого должным образом нужно выделить отдельные уравнения (или условия) для определения всех требуемых функций. Именно на этом этапе появляется довольно много "степеней свободы" в виде различных возможных "компоновок" отдельных уравнений для каждой функции и в виде произвольных параметров (констант), что может давать несколько разных окончательных решений при использовании одного анзаца. Важным обстоятельством является то, что "обусловленный" самой нелинейной акустикой вид анзаца (3) дает определенный класс решений с наперед известной структурой в виде бегущей волны с относительно неискажающимся профилем. При использовании более общих и более мощных с точки зрения математики методов (например, группового анализа) часто затруднительно дать не только прогноз о структуре будущего решения, но трактовку уже полученного решения. Возможности и специфические особенности применения анзаца (3) для нахождения решений уравнений нелинейной акустики (в том числе – новых решений) будут продемонстрированы далее на конкретных примерах, где будут использоваться уравнения в безразмерной форме записи относительно безразмерных зависимых и независимых переменных.

3. РЕШЕНИЯ С ОТНОСИТЕЛЬНО НЕИСКАЖАЮЩИМИСЯ ПРОФИЛЯМИ УРАВНЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ

3.1 Уравнение простых волн

Имея для "элементарного" нелинейного уравнения

$$u_z - uu_\tau = 0 \tag{12}$$

общее решение $u = F(\tau + zu)$ с произвольной функцией F, необходимо, прежде всего, пояснить целесообразность особой процедуры нахождения какого-либо специального класса решений. Дело в том, что из общего, но неявного решения трудно вычленить решения с определенными свойствами. Если позволяет методика, легче заново найти решения требуемого класса.

Ищем решение в виде

$$u = g(z)W(\tau + \psi(z)) + q(z), \tag{13}$$

что после подстановки в (12) и деления на g^2 (отметим важность этого шага в нахождении решения) дает

$$\frac{g_z}{g^2}W + \frac{q_z}{g^2} + \frac{\psi_z - q}{g}W_S - WW_S = 0 \tag{14}$$
$$(S = \tau + \psi).$$

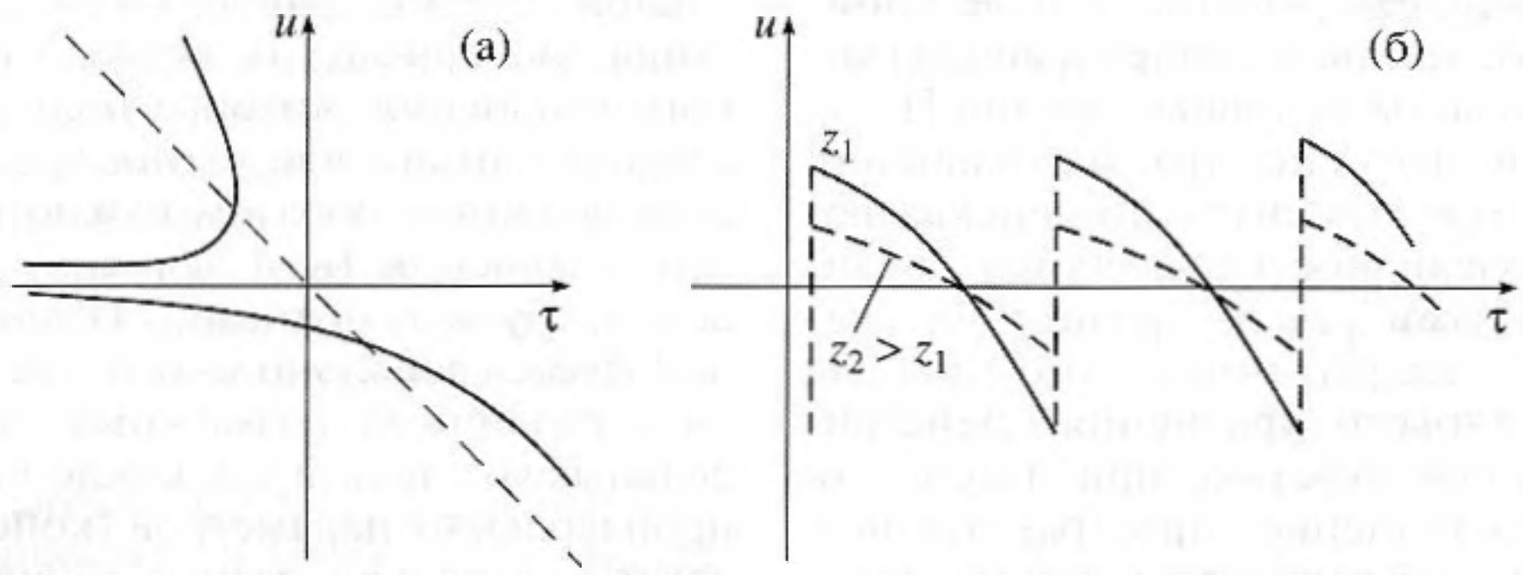

Рис. 1. а) графическое представление решения (16), б) сформированное на основе (16) и Рис. 1а периодическое решение с разрывными фронтами и относительно неискаженным профилем.

Специально отметим, что здесь и везде далее производные по тем или иным переменным обозначаются соответствующими индексами.

Полагая дробные коэффициенты в (14) постоянными, последовательно находим функции g, q, ψ, а также получаем дифференциальное уравнение относительно W

$$C_1 W + C_2 + C_3 W_S - W W_S = 0, \qquad (15)$$

решение которого завершает задачу. Если из (13) выразить W через u и вместе с найденными выражениями для g, q, ψ подставить в решение для W, то окончательно получаем:

$$\tau + \tau_0 + az = b\ln|u - a| - (z + z_0)(u - a) \qquad (16)$$

(a, b, τ_0, z_0 – произвольные постоянные).

Заметим, что (16) при $a = b = 0$ включает в себя известное решение уравнения простых волн $u = -(z + z_0)/(\tau + \tau_0)$, являющееся основой для построения профиля пилообразной волны. Строя без труда на основе (16) зависимость $\tau(u)$, рассматривая при этом z как параметр, затем, отражая кривую относительно биссектрисы 1-го и 3-го координатных углов, получаем нужный результат (см. рис. 1а, на котором изображена результирующая кривая для нулевых значений постоянных a, τ_0, z_0). Отметим, что с ростом z пунктирная кривая меняет наклон, поворачиваясь против часовой стрелки, а ветви кривой будут приближаться к ней. Связывая с параметром τ_0 периодическое повторение кривой через нужный период вдоль временнóй оси, а с параметром a вертикальное смещение всей кривой, можно из "однозначной" части нижней ветви кривой на рис. 1а, вырезав эту часть с помощью "функции окна" и сдвигая ее на целое число периодов вдоль временной оси, сформировать периодический профиль, показанный на рис. 1б для двух значений z. Таким образом, мы получили для уравнения простых волн решение с относительно неискажающимся профилем и показали, как он в процессе распространения волны трансформируется, стремясь в пределе к пилообразному, но с бесконечно малой амплитудой.

Для демонстрации разнообразия класса относительно неискажающихся профилей приведем решение уравнения (12), основанное на анзаце

$$u = g(z)W(\omega(z)\tau + \psi(z)) + q(z), \qquad (17)$$

который обобщает анзац (13) введением изменяемого вдоль направления распространения временнóго масштаба (периода). После подстановки (17) в (12) и деления на g удобно записать результат в следующем виде

$$\frac{g_z}{g}W + \frac{q}{g} + \left(\frac{\omega_z}{\omega}\omega\tau + \frac{\psi_z}{\psi}\psi\right)W_S - g\omega W W_S - q\omega W_S = 0.$$

Опять, полагая дробные коэффициенты и произведения функций $g(z)\omega(z)$, $q(z)\omega(z)$ постоянными и попутно находя отсюда эти функциональные зависимости, приходим к следующему, принципиально отличному от (15) уравнению для W:

$$W + C_1 - SW_S - C_2 W W_S - C_1 C_2 W_S = 0.$$

Объединяя все найденные функции с помощью (17), получаем еще одно решение рассматриваемого класса для уравнения простых волн

$$\tau + \tau_0 = \\ = A[(u - a - be^{-cz})(\ln|u - a - be^{-cz}| - cz - z_0)] \qquad (18)$$

(a, b, τ_0, z_0 – произвольные константы).

Заметим, что, несмотря на формальное получение анзаца (13) из (17) при условии $\omega(z) \equiv 1$, полученные два решения (16) и (18) принципиально разные и первое не является частным случаем второго (заметим, что при получении второго решения принципиальными являлись условия постоянства произведений $g(z)\omega(z)$ и $q(z)\omega(z)$, которые в общем случае функциональных зависимостей $g(z)$ и $q(z)$ исключают сведение к предыдущему случаю с $\omega(z) \equiv 1$).

Значение указанной процедуры нахождения частных решений нужного свойства определяется

тем, что даже зная вид найденных частных решений, трудно определить, как некоторые из них выделяются из общего решения, т.е. проблематично подобрать соответствующую функцию F в общем решении (например, для решения (18)). Но самое главное состоит в том, что в результате процедуры нахождения решений на основе данного анзаца получаются волновые профили с заданными "нелинейно-трансформационными" свойствами (относительно неискажающиеся профили), а эти свойства также трудно обнаружить в общем решении.

3.2 Уравнение Бюргерса

Рассматривается уравнение Бюргерса

$$\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{nu}{2z}-u\frac{\partial u}{\partial \tau}=\Gamma\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2},$$

где Γ – постоянный параметр (число Гольдберга), характеризующий отношение нелинейного и диссипативного эффекта в виде "характерных длин" проявления этих эффектов; $n = 0, 1, 2$ соответственно для плоских, цилиндрических и сферических волн, причем в двух последних случаях вариант с положительной правой частью уравнения соответствует расходящимся волнам (для сходящихся волн правая часть будет отрицательной).

Традиционно для цилиндрических и сферических волн путем соответствующей замены координатной переменной и самой функции переходят к обобщенному уравнению Бюргерса с эффективным зависящим от координаты коэффициентом в правой части [23]. Мы используем другую общую для всех трех геометрий форму записи уравнений Бюргерса:

$$\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r^\beta}\frac{\partial v}{\partial \tau}=\Gamma\frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2}, \tag{19}$$

где $v = r^\beta u$, $\beta = 0, 1/2, 1$ соответственно для плоских ($r \equiv z$), цилиндрических и сферических волн.

Для поиска отдельных типов решений этого уравнения удобно пользоваться анзацем с явно выделенным слагаемым, линейным относительно временно́й переменной. Будем использовать следующий общий вид этого анзаца:

$$v = h(r)\tau + g(r)W(\omega(r)\tau + \psi(r)) + q(r) \tag{20}$$

(в плоском случае $r \equiv z$).

Заметим, что этот вид анзаца также относится к классу относительно неискажающихся волн, поскольку здесь сохраняется исходная структура анзаца этого класса при некоторой конкретизации функции волнового профиля: $W(S(r,\tau)) = S + \tilde{W}(S)$. Структура (20) явно отражает тот факт, что определенные решения уравнения Бюргерса "расшифровывают" структуру ударного фронта в волнах, имеющих такие фронты (структуру, аналогичную (20), имеет первое аналитическое решение уравнения Бюргерса с ясным нелинейно-волновым содержанием [24], которое сегодня известно как решение Хохлова).

Подставив (20) в уравнение (19) и поделив полученное выражение на $g\omega^2$, получим:

$$\Gamma W_{SS}+\frac{g}{r^\beta\omega}W_S W-\frac{(\omega_r-r^{-\beta}h\omega)\tau+\psi_r-r^{-\beta}\omega q}{\omega^2}W_S-$$
$$-\frac{g_r-r^{-\beta}hg}{g\omega^2}W-\frac{h_r-r^{-\beta}h^2}{g\omega^2}\tau-\frac{q_r-r^{-\beta}hq}{g\omega^2}=0. \tag{21}$$

В качестве значимого примера покажем возможность существования единого для всех трех геометрий параметризованного по β нелинейного уравнения в обыкновенных производных с соответствующей структурой решения; попутно будут найдены все элементы (функции), образующие анзац, а значит, искомое решение. В данном случае положим $h = 0$; далее будет видно, что решение даже при этом условии будет включать аналогичное слагаемое, т.е. накладываемое нами условие избавляет от переопределенности этого структурного элемента в решении. Далее будем поступать, как в предыдущем подразделе, а именно, будем приравнивать константам коэффициенты при функции W, ее производных и степенях; при этом, однако, коэффициент перед W_S попробуем представить как аргумент S, что не помешает считать уравнение для $W(S)$ замкнутым. Имеем:

$$g = Ar^\beta\omega;\quad \frac{\omega_r}{\omega^3}\omega\tau \longrightarrow \frac{\omega_r}{\omega^3}=\frac{-B}{2}\longrightarrow \omega(r)=$$
$$=(Br+C)^{-1/2}\longrightarrow g=Ar^\beta(Br+C)^{-1/2}. \tag{22}$$

Если полученное решение для g подставить в коэффициент при W (напомним, что $h = 0$) и потребовать равенства результата очередной константе D, то видно, что это выполнимо только при $C = 0$ и при этом определяется связь между двумя константами:

$$D = (\beta - 1/2)B.$$

Зная решение (22) для g и ω (эти решения были конкретизированы условием $C = 0$) из условия равенства последнего слагаемого в (21) произвольной константе E (напомним, что $h = 0$), получаем решение для q:

$$q = \tilde{E}\tilde{A}r^\beta\left(\frac{B^{1/2}r^{-1/2}}{\beta-1/2}+E_0\right) \tag{23}$$
$$(\tilde{E}=E/B,\quad \tilde{A}=A/B).$$

Для вычисления последней оставшейся функции ψ вспомним, что поскольку коэффициент

при W_S в (21) мы хотим "сделать" пропорциональным $S = \omega\tau + \psi$ и для этого множитель при τ в этом коэффициенте уже представлен в виде $-0.5B\omega$, то оставшиеся слагаемые в этом коэффициенте надо приравнять $-0.5B\psi$, что даст возможность представить весь коэффициент в виде $-0.5BS$. С учетом уже известных выражений для ψ и q получаем следующее уравнение для ψ и его решение:

$$\psi_r + 0.5r^{-1}\psi - \tilde{A}\tilde{E}\left(\frac{r^{-1}}{\beta - 1/2} + B^{-1/2}E_0 r^{-\beta-1/2}\right) = 0,$$

$$\psi = (Kr)^{-1/2} + \tilde{A}\tilde{E}\left(\frac{2}{\beta - 1/2} + B^{-1/2}E_0\frac{r^{1/2-\beta}}{1-\beta}\right).$$

После определения всех функций, на основании (20) записываем искомое решение, учтя сделанную вначале данного подраздела замену $u = r^{-\beta}v$,

$$u = \tilde{A}\sqrt{B/r}W(S) + \tilde{A}\tilde{E}\left(\frac{\sqrt{B/r}}{\beta - 1/2} + E_0\right), \quad (24)$$

$$S = \frac{\tau + \tau_0}{\sqrt{Br}} + \tilde{A}\tilde{E}\left(\frac{2}{\beta - 1/2} + B^{-1/2}E_0\frac{r^{1/2-\beta}}{1-\beta}\right), \quad (25)$$

а уравнение для W получаем из (21):

$$\frac{\Gamma}{B}W_{SS} + \tilde{A}WW_S + 0.5SW_S + (0.5 - \beta)W - \tilde{E} = 0 \quad (26)$$

(A, $\tilde{A}$, B, C, D, E, $\tilde{E}$, E_0, K, τ_0 – произвольные константы).

Из (24), (25) в силу имеющихся особенностей видна минимально необходимая разница между тремя геометриями, а именно: для $\beta = 1$ (сферические волны) с необходимостью $E_0 = 0$, а для $\beta = 0.5$ (цилиндрические волны) необходимо $\tilde{E} = 0$. Для плоских волн ($\beta = 0$) такие же условия на произвольные постоянные $\tilde{E}$ и E_0 также можно поставить, однако они не будут необходимыми.

Решения (24)–(26) обобщают рассматриваемые ранее частные случаи решений этого класса, например, автомодельные решения для плоского и цилиндрического случая в [25].

Интересно отметить, что полученные нами решения позволяют записать их явный вид для важного, но "неудобного" для аналитики случая сферических нелинейных волн ($\beta = 1$). При $\tilde{A} = -1$ путем введения новой искомой функции $f = W + \frac{S}{2\tilde{A}} \equiv W - \frac{S}{2}$ уравнение (26) один раз интегрируется, в результате чего получается уравнение Риккати:

$$f_S = \frac{B}{2\Gamma}\left(f^2 + \frac{S^2}{4} - 2\tilde{E}S + M\right). \quad (27)$$

Уравнение (27) с той или иной степенью общности (в зависимости от значений свободных констант) имеет много различных схем решений (см. [26]). В частности, если $\tilde{E} = M = 0$, то имеем специальное уравнение Риккати, решение которого:

$$F(S) = \sqrt{S}[C_1 J_{1/4}(0.25aS^2) + C_2 Y_{1/4}(0.25aS^2)], \quad (28)$$

где J_α и Y_α – обычная и модифицированная функции Бесселя, $a = \frac{B}{2\Gamma}$, $f = -\frac{1}{a}\frac{F_S}{F}$.

В заключение применительно ко всему этому подразделу относительно уравнения Бюргерса в его различных модификациях следует отметить, что, используя различные условия на функциональные коэффициенты в уравнении (21) и придавая "подходящие" значения (нулевые или ненулевые) произвольным константам, можно без труда получить уже известные к настоящему времени решения с относительно неискажающимися профилями, а также абсолютно новые (см. (28)).

3.3. Уравнение Хохлова–Заболотской

Для решения одного из основных уравнений пучковой акустики:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - u\frac{\partial u}{\partial\tau}\right) = \frac{N}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \text{ – для "щелевого" пучка,}$$
$$= \frac{N}{4}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right) \text{ – для цилиндрического пучка} \quad (29)$$

(N – параметр – число Хохлова, характеризующее соотношение нелинейных и дифракционных эффектов, z – направление распространения пучка, y или r координаты поперечного направления по отношению к направлению распространения).

Процедуру нахождения решения продемонстрируем на примере уравнения для "щелевого" пучка; для цилиндрического пучка решение будет аналогичным (волновой профиль будет аналитически идентичным "щелевому пучку"), однако "амплитудную" функцию для цилиндрического пучка нельзя записать в явном аналитическом виде.

Для нахождения решения используем анзац, аналогичный (17), но с обобщением на двумерный пространственный случай:

$$u(\tau, z, y) = g(\tau, z, y)W(\tau + \psi(z, y)) + q(\tau, z, y). \quad (30)$$

В дальнейшем будем использовать уже применявшееся обозначение для фазовой функции:

$$S = \tau + \psi(z, y).$$

После подстановки (30) в (29) и соответствующей группировки слагаемых, имеем:

$$0.5g^2(W^2)_{SS} - I_2 W_{SS} - I_1 W_S + \\ + 0.25Ng_{yy}W + 0.25Nq_{yy} = 0, \tag{31}$$

где

$$I_2 = g\psi_z - gq - 0.25Ng(\psi_y)^2,$$

$$I_1 = g_z - 0.25N(2g_y\psi_y + g\psi_{yy}).$$

Здесь еще раз стоит напомнить, что кроме исходной структуры анзаца "степени свободы" при получении разных решений заключаются в выборе того или иного способа разделения общего уравнения (31) на отдельные уравнения, из которых будут определяться все функции, входящие в анзац, а также в конкретизации появляющихся свободных параметров (нулевое или ненулевое значение). В данном случае выберем следующий вариант такого разделения (38) на отдельные уравнения: после деления (31) на $g^2(z, y)$ потребуем, чтобы все функциональные коэффициенты при W и ее производных принимали бы постоянные значения (некоторые из них положим равными нулю). Прежде всего, это даст замкнутое нелинейное дифференциальное уравнение (но в обыкновенных производных!) для нахождения W, а сами условия на указанные коэффициенты будут являться системой дифференциальных уравнений для определения других функций.

Итак, имеем:

$$\frac{I_2}{g^2} = A, \quad \frac{I_1}{g^2} = 0 \quad (I_1 = 0), \\ \frac{g_{yy}}{g^2} = 0 \quad (g_{yy} = 0), \quad \frac{q_{yy}}{g^2} = -2B. \tag{32}$$

Третье условие в (32) определяет линейную по y функцию g; однако накладываемое нами требование симметрии "щелевого" пучка в поперечном направлении относительно его центральной оси $y = 0$ оставляет только вариант $g = g(z)$, т.е. независимость функции g от y. После этого второе условие из (32), принимающее вид $g_z(z) - 0.24Ng(z)\psi_{yy} = 0$, во-первых, дает необходимую структуру второй функции: $\psi = \psi_2(z)y^2 + \psi_0(z)$, а во-вторых, показывает связь $g(z) = D\exp(0.5N\int\psi_2(z)dz)$. Аналогично, из четвертого простого условия в (32) следует два соотношения: $q(z, y) = q_2(z)y^2 + q_0(z)$ и $q_2(z) = -Bg^2(z)$. Подстановка всех полученных соотношений в первое условие из (39) приводит к уравнениям:

$$(\psi_2)_z + BD^2\exp(N\int\psi_2 dz) - N\psi_2^2 = 0, \tag{33а}$$

$$(\psi_0)_z - q_0 = Ag. \tag{33б}$$

Уравнение (33а) является довольно сложным нелинейным и до некоторой степени интегро-дифференциальным уравнением; замена $\psi_2 = \Phi_z$ позволяет избавиться от интегрального оператора, но повышает его порядок:

$$\Phi_{zz} - N(\Phi_z)^2 + BD^2\exp(N\Phi) = 0. \tag{34}$$

Это также сложное для нахождения решения уравнение. Однако в двух частных случаях, когда коэффициенты в показателе экспоненты и перед квадратом первой производной равны по величине, но различаются знаком (наш случай) и когда первый коэффициент в четыре раза больше второго при том же соотношении знаков, находится аналитическое решение [26], причем отвечающее физическому содержанию задачи. Решение имеет вид:

$$\Phi = -N^{-1}\ln\left|0.5NBD^2(z^2 + Z_1 z + Z_0)\right|,$$

$$\psi_2 = \Phi_z = -2N^{-1}\frac{z + Z_1}{z^2 + 2Z_1 z + 2Z_0}$$

(Z_1, Z_0 – произвольные постоянные) .

Теперь "по цепочке" находим все остальные функции:

$$g = D\exp(0.5N\int\psi_2 dz) = D\left|z^2 + 2Z_1 z + 2Z_0\right|^{-1/2},$$

$$q_2 = -Bg^2 = -BD\left|z^2 + 2Z_1 z + 2Z_0\right|^{-1}.$$

Простая связь (33б) оставляет одну произвольную функцию, например $q_0(z)$, которая будет "регулировать" смещение волнового профиля по вертикали относительно временной оси, т.е. временнóе среднее по периоду.

Последним шагом в нашей процедуре нахождения решения является обращение при введенных условиях к уравнению для W (31), что определит временнóй профиль. При условиях (32) оно становится легким для интегрирования:

$$0.5(w^2)_{SS} = BN, \tag{35}$$

где $w = W - A$.

Отсюда $W(S) = A \pm \sqrt{BNS^2 + 2E_1 S + E_0} = A \pm \pm (BN)^{1/2}\sqrt{(S + S_0)^2 + K}$, где $S_0 = E_1/(BN)$, $K = E_0/(BN) - (E_1/BN)^2$ – очередные произвольные постоянные.

Подставляя в анзац (30) все найденные функции, получаем окончательное аналитическое

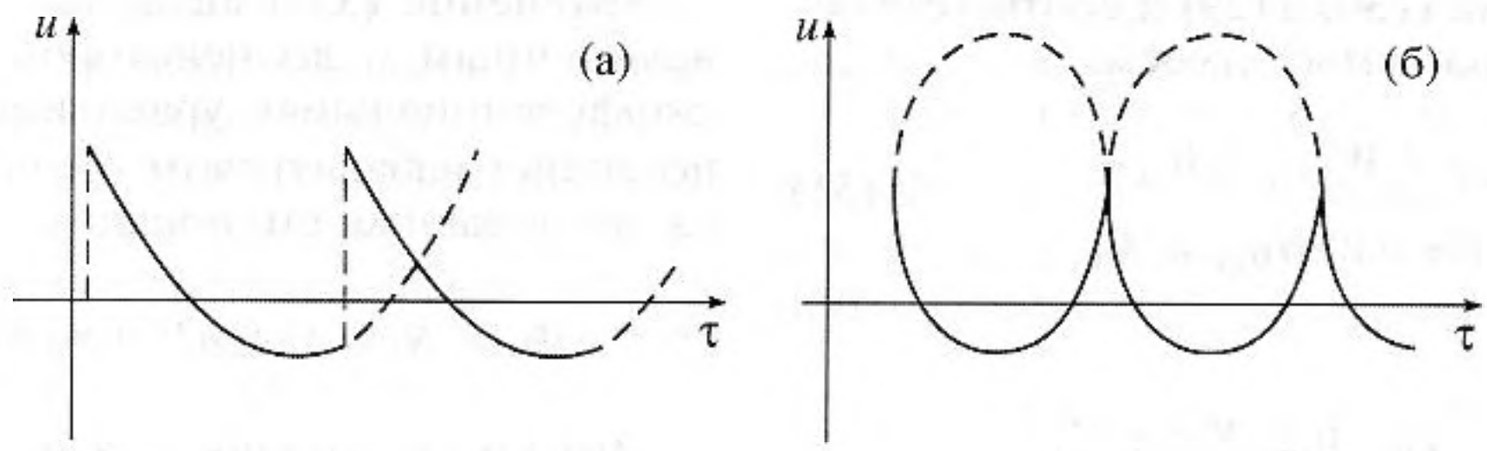

Рис. 2. Графическое представление решения (45) с гиперболообразным волновым профилем (а), имеющим ударные фронты, и с элипсообразным безразрывным профилем (б).

решение уравнения Хохлова-Заболотской:

$$u(\tau, z, y) = Z^{-1/2}[\pm(D^2BN)^{1/2} \times$$
$$\times \sqrt{(\tau - 2N^{-1}y^2(z+Z_1)Z^{-1} + \psi_0(z) + S_0)^2 + K} - \quad (36)$$
$$- BDy^2Z^{-1/2} + (\psi_0)_z Z^{1/2}].$$

Здесь $Z \equiv Z(z) = z^2 + 2Z_1z + 2Z_0$, $\psi_0(z)$ – произвольная функция, которая может быть определена из условия на временное среднее профиля по периоду волны; B, D, K, S_0, Z_1, Z_0 – произвольные постоянные. Заметим, что в (36) использовано соотношение (33б), в силу этого из выражения исчезла постоянная А (см. выше решение для W), но взамен в конце (27) вместо $q_0(z)$ появилась функция $(\psi_0)_z$.

Для цилиндрических аксисимметричных пучков (см. (29)) при сохранении условий (32) на функциональные коэффициенты (сами эти коэффициенты – функциональные выражения – будут отличаться от случая "щелевого" пучка) мы придем к тому же уравнению для волнового профиля (35), а значит, сам профиль будет таким же. Изменятся функциональные зависимости от z, r, т.е. будут другими функции $g(z, r)$, $\psi(z, r)$, $q(z, r)$, более того, их не удастся записать в явном виде (например, в уравнении, аналогичном (34), коэффициент в показателе экспоненты будет в два раза большим, что препятствует записи решения в явном виде); однако характер всех зависимостей останется прежним.

Найденное аналитическое решение (36) уравнения Хохлова–Заболотской примечательно по нескольким причинам. Во-первых, среди представленных в справочнике [27] довольно многочисленных на сегодняшний день точных аналитических решений (в свою очередь собранных из разных источников) наше решение (36) отсутствует, хотя впервые оно было получено нами менее регулярным способом в работе десятилетней давности [28]. Во-вторых (и это главное), именно наше решение в отличие от других [27] имеет ясное физическое содержание в описании нелинейных акустических пучков – основного объекта, для которого уравнение Хохлова-Заболотской предназначено. Прежде всего отметим, что решение (36) дает гиперболообразный профиль (при B > 0). Это хорошо видно, если возвести обе части (36) в квадрат, что дает явное уравнение гиперболы в координатах (u, τ). Вырезая периодом волны "нужный" кусок гиперболы (из ее верхней ветви), так чтобы при вертикальном сдвиге за счет внекоренных слагаемых в (36) получалось бы нулевое временное среднее (площадь положительной части должна равняться площади "отрицательной" части вырезанного куска гиперболы) и повторяя этот результат с данным периодом по оси τ, мы получим типичный для нелинейного акустического пучка профиль [29] с развитыми ударными фронтами (см. рис. 2а). Решение (36) показывает динамику изменения этого профиля, прежде всего, в части изменения "амплитудного" значения и изменение фазового сдвига профиля при продвижении вдоль оси z (вдоль оси пучка) и в поперечном направлении y, при этом профили остаются относительно самоподобными (относительно неискажающимися).

Решение (36) описывает также более "тонкий" эффект, а именно, при B < 0 получаются эллипсообразные профили, характерной особенностью которых является отсутствие ударных фронтов при их нелинейной трансформации (рис. 2б). Такие профили характерны для фокусированных пучков при умеренной нелинейности [30].

В заключение этого раздела стоит еще раз подчеркнуть, что сама методика нахождения решения на основе рассматриваемого анзаца показывает возможность нахождения таким же регулярным способом и других решений (например, при изменении набора условий (23)); при этом для физика представляют интерес не любые возможные решения (это удел математических справочников, например [27]), а только имеющие соответствующее физическое содержание (в дополнение к решению (27) укажем на результат работы [31]).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе реализованы две основные цели: 1) на конкретных примерах рассмотрена методика нахождения решений уравнений нелинейной акустики на основе анзаца (в нескольких его вариантах) относительно неискажающихся волновых профилей, при этом обращалось внимание на множественность вариантов получаемых решений (за счет самого вида анзаца, за счет различных способов разделения единого нелинейного уравнения на несколько уравнений для нахождения всех функций, входящих в анзац, за счет конкретизации значений появляющихся в достаточно большом количестве свободных постоянных); 2) в результате рассмотрения каждого примера получены новые аналитические решения (имеющие физический смысл) уравнений нелинейной акустики. Ограниченные рамки журнальной публикации не позволили нам привести результаты, полученные данным методом для более специальных, но не менее важных уравнений нелинейной акустики (уравнений для сред с релаксацией, для сред с кубичной нелинейностью).

Следует отметить появившиеся недавно работы [16, 32], в которых также рассматриваются различные методы нахождения решений уравнений нелинейной акустики. Однако излагаемый в первой работе регулярный метод, основанный на свойствах групповых симметрий уравнений, не обладает свойством "предсказуемости" типа и физического содержания возможного решения; в нашем случае сам вид анзаца и его составляющих дает такую информацию (особенно для нелинейной акустики, см. обсуждение во 2-ом разделе работы). В работе [32], наоборот, отсутствует элемент регулярности, поскольку ее целью является демонстрация многообразия приемов и методов решения нелинейных уравнений. Таким образом, можно говорить о взаимодополняемости указанных работ и данной в формировании набора эффективных приемов и методов в решении нелинейных уравнений математической физики и более конкретно – нелинейной акустики.

Работа частично поддержана грантом РФФИ (№ 08-02-00811а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 624 с.
2. *Инфельд Э., Роуландс Дж.* Нелинейные волны, солитоны и хаос. М.: Физматлит, 2005. 480 с.
3. *Shen S.S.* A Course on Nonlinear Waves. Cluwer Academic, 1993. 348 p.
4. *Toda M.* Nonlinear Waves and Solitons. Cluwer Academic Publishers, 1989. 388 p.
5. *Ахмедиев Н.Н., Анкевич А. Солитоны* (нелинейные импульсы и пучки). М.: Физматлит, 2003. 304 с.
6. *Кившарь Ю.С., Агравал Г.П.* Оптические солитоны. М.: Физматлит, 2005. 648 с.
7. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. Том 2. М.-Л.: ГТТИ, 1945. 620 с.
8. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 830 с.
9. *Hillion P.* Distortion-free progressing waves // Europhys. Lett. 1996. V. 33(1). P. 7–10.
10. *Киселев А.П.* Относительно неискажающиеся волны. Новые примеры // Записки научных семинаров ПОМИ. 2001. Т. 275. С. 100–103.
11. *Киселев А.П., Перель М.В.* Относительно неискажающиеся волны для m-мерного волнового уравнения // Диф. ур-ния. 2002. Т. 38. № 8. С. 1128–1129.
12. *Киселев А.П.* Относительно неискаженные цилиндрические волны, зависящие от трех пространственных переменных // Математ. заметки. 2006. Т. 79. № 4. С. 635–636.
13. *Lu J., Greenleaf J. F.* Nondiffracting X waves – exact solution to free-space scalar wave equation and their finite aprtture realizations // IEEE Trans. Ultrason. Ferroelec., Freq. Contr. 1992. V. 39. No. 1. P. 19–31.
14. *Fagerholm J., Friberg A.T., Huttunen J. et al.* Angular-spectrum representation of nondiffracting X waves // Phys. Rev. E. 1996. V. 54. Number 4. P. 4347–4352.
15. *Морс Ф.М., Фешбах Г.* Методы теоретической физики. Том 1. М.: ИЛ, 1958. 931 с.
16. *Ибрагимов Н.Х., Руденко О.В.* Принцип априорного использования симметрий в теории нелинейных волн // Акуст. журн. 2004. Т. 50. № 4. С. 1–15.
17. *Friedlander F.G.* Simple progressing solutions of the wave equation // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1946. V. 43. P. 360–373.
18. *Клейн Ф.* Высшая геометрия. М.–Л.: ГОНТИ, 1939. 400 с.
19. *Гильберт Д., Кон-Фоссен С.* Наглядная геометрия. М.-Л.: ОНТИ, 1936. 304 с.
20. *Bateman H.* The conformal transformation of a space of four dimensions and their applications to geometrical optics // Proc. London Math. Soc. 1909. V. s2–7. P. 70–89.
21. *Бейтмен Г.* Математическая теория распространения электромагнитных волн. М.: ФМЛ, 1958. 180 с.
22. *Hillion P.* Generalized phases and nondispersive waves // Acta Appl. Math. 1993. V. 30. P. 35–45.
23. *Наугольных К.С., Солуян С.И., Хохлов Р.В.* Сферические волны конечной амплитуды в вязкой теплопроводящей среде // Акуст. журн. 1963. Т. 9. № 1. С. 54–60.
24. *Khokhlov R.V., Soluyan S.I.* Propagation of acoustic waves of moderate amplitude through dissipative and relaxing media // Acoustica. 1964. V. 14. № 5. P. 242–247.
25. *Руденко О.В., Солуян С.И.* Некоторые нестационарные задачи теории волн конечной амплитуды в диссипативных средах // ДАН СССР. 1970. Т. 190. № 4. С. 815–818.
26. *Зайцев В.Ф., Полянин А.Д.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука. Физматлит, 1995. 558 с.

27. *Полянин А.Д., Зайцев В.Ф.* Нелинейные уравнения математической физики. Справочник. М.: Физматлит, 2002. 464 с.

28. *Маков Ю.Н.* Об универсальном автомодельном решении уравнения Хохлова-Заболотской для волн с ударными фронтами // Акуст. журн. 1997. Т. 43. № 6. С. 828–833.

29. *Бахвалов Н.С., Жилейкин Я.М., Заболотская Е.А.* Нелинейная теория звуковых пучков. М.: Наука. 1982. 176 с.

30. *Маков Ю.Н.* Реализация и критерии двух типов "асимптотически универсальных" волновых профилей в нелинейных фокусированных пучках // Труды 19-й сессии РАО. Москва, 2007. Т. 1. С. 166–170.

31. *Маков Ю.Н.* Волноводное распространение звуковых пучков в нелинейной среде // Акуст. журн. 2000. Т. 46. № 5. С. 680–684.

32. *Руденко О.В.* Математические модели, точные решения, методы анализа. // Сб. Нелинейные волны 2006. Н. Новгород. Институт прикладной физики РАН. 2007. С. 139–150.