АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2009, том 55, № 2, с. 226–231

АКУСТИКА СТРУКТУРНО НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД. ГЕОЛОГИЧЕСКАЯ АКУСТИКА

УДК 534.232-550.834

МОЩНОСТЬ ИЗЛУЧЕНИЯ УПРУГИХ ВОЛН, ВОЗБУЖДАЕМЫХ В ТВЕРДОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ ПОДПОВЕРХНОСТНЫМ ГАРМОНИЧЕСКИМ ИСТОЧНИКОМ

© 2009 г. А. В. Разин

Федеральное государственное научное учреждение Научно-исследовательский радиофизический институт
603950 Нижний Новгород, ул. Большая Печерская 25
E-mail: razav@inbox.ru

Поступила в редакцию 22.06.07 г.

Методом преобразований Фурье решена задача о возбуждении продольных, поперечных и поверхностных рэлеевских волн точечным гармоническим источником, расположенным в однородном изотропном идеально упругом полупространстве и действующим вдоль нормали к его поверхности. Методом реакции излучения без применения каких-либо приближений получены выражения для средних за период мощностей излучения перечисленных волн. Подробно исследованы особенности распределения излучаемой мощности по различным типам волн в зависимости от соотношения между их скоростями и глубины расположения источника.

PACS 43.20.Gp, 43.20.Rz, 62.30.+d, 91.30.Cd, 91.30.Fn, 91.30.Bi

Задачи, связанные с возбуждением упругих волн в твердых средах, представляют интерес как для изучения природы естественных сейсмических явлений, так и для разработки методов сейсмического зондирования грунта и неразрушающего контроля материалов. Важные для практики вопросы генерации и распространения упругих волн возникают уже в рамках наиболее простой модели, когда твердое тело представляет собой однородное изотропное идеально упругое полупространство. Здесь, в первую очередь, следует отметить проблему создания сейсмических источников с заданными характеристиками направленности излучения и с требуемым распределением излучаемой мощности по типам упругих волн.

Очевидно, что находящиеся на поверхности твердого тела и расположенные на некоторой глубине под ней сейсмические источники будут значительно отличаться по характеристикам создаваемого ими излучения. Главным образом, это касается возбуждения поверхностных волн Рэлея.

Энергетические характеристики упругих волн, возбуждаемых в однородном твердом полупространстве поверхностными источниками, изучены в настоящее время достаточно полно [1–5]. В качестве подповерхностного источника обычно рассматривается центр расширения (центр давления). Распределение мощности излучения по типам упругих волн в твердом полупространстве для случая гармонического центра расширения рассмотрено в [6]. В [7] вычислены энергии излучения продольных, поперечных и рэлеевских волн для случая импульсного монопольного источника в полуограниченной упругой среде. Случай точечного импульсного источника, обладающего произвольной диаграммой направленности, рассмотрен в [8].

Сейсмические поля, создаваемые в упругих средах импульсными поверхностными и подповерхностными источниками, исследовались методами контурного интегрирования в многочисленных работах (см., например, [9–13] и цитированную там литературу). Однако энергетические характеристики сейсмоизлучения при этом не вычислялись. Задача о распространении волн в жидком слое, лежащем на упругом полупространстве, для случаев гармонических монопольного (типа пульсирующей сферы) и дипольного (две близко расположенные пульсирующие в противофазе сферы) звуковых источников решалась соответственно в [14] и [15]. В указанных работах рассмотрена ситуация, когда толщина слоя очень мала по сравнению с длинами излучаемых волн. Для данного предельного случая вычислены мощности излучения продольной и поперечной волн в твердой среде, а также поверхностной волны Рэлея, в которую при малой толщине слоя переходит фундаментальная мода. Различные типы гармонических источников, действующих в упругом полупространстве, рассматривались в монографии [16]. Однако детальный численный анализ мощности излучения гармонического подповерхностного источника ранее, по-видимому, не проводился. Это распределение важно при разработке систем сейсмического зондирования грунта и неразрушающего контроля материалов, а

также при рассмотрении рассеяния упругих волн в полупространстве на точечном подповерхностном включении. Настоящая работа восполняет этот пробел.

Пусть плоскость $z = 0$ цилиндрической системы координат r, φ, z совпадает с поверхностью однородного изотропного твердого тела, занимающего полупространство $z > 0$ и характеризуемого плотностью ρ и скоростями продольной c_l и поперечной c_t волн. На глубине $z = h$ под началом координат действует точечная гармоническая сила циклической частоты ω, направленная вдоль оси z. Таким источником может быть сейсмовибратор, установленный внутри полости с размерами, малыми по сравнению с длинами излучаемых упругих волн, или сила, действующая вдоль стенок узкой вертикальной скважины.

Смещения $\mathbf{u}$ в твердом теле описываются неоднородным уравнением Ламэ:

$$\rho\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2} - (\lambda+\mu)\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\mathbf{u} - \mu\Delta\mathbf{u} = \\ = f_0\mathbf{e}_z\frac{\delta(r)}{2\pi r}\delta(z-h)e^{-i\omega t}, \tag{1}$$

где λ и μ – параметры Ламэ, f_0 – амплитуда приложенной силы, δ – символ дельта-функции Дирака и $\mathbf{e}_z$ – орт оси z. Нетрудно показать (см., например, [17, с. 391]), что интегрируя уравнение (1) по z в пределах от $h - \zeta$ до $h + \zeta$ и переходя к пределу $\zeta \to 0$, можно получить граничное условие для вертикальных компонент тензора напряжений на горизонте приложения силы $z = h$:

$$\sigma_{zz}^{(0)} - \sigma_{zz} = f_0\frac{\delta(r)}{2\pi r}, \quad z = h.$$

Здесь индекс "0" соответствует слою $0 < z < h$, а величина без индекса – полупространству $z > h$. При этом смещения в твердой среде будут описываться однородным уравнением Ламэ. Кроме того, при $z = h$ должны выполняться условия равенства вертикальных и горизонтальных компонент вектора смещений, а также касательных компонент тензора напряжений. На свободной поверхности твердого тела выполняются условия равенства нулю касательных и вертикальных компонент тензора напряжений. Для описания полей упругих волн удобно стандартным способом ввести скалярный и векторный потенциалы. Для потенциалов справедливы волновые уравнения, которые следует решать методом преобразований Фурье.

Нас будут интересовать мощности излучения продольных, поперечных и рэлеевских волн. Для гармонического осесимметричного источника среднее за период волны значение полной излучаемой мощности дается выражением:

$$W = -\pi\,\mathrm{Re}\left[i\omega\int_0^\infty f^*(r)u_z(r,h)rdr\right], \tag{2}$$

где $f(r)$ – давление, создаваемое источником на плоскости $z = h$, звездочка означает комплексное сопряжение. Подставляя в (2) выражения для $f^*(r)$ и $u_z(r, h)$ в виде интегралов Фурье, приходим к виду:

$$W = \frac{f_0^2}{8\pi\rho\omega}\mathrm{Re}\int_0^\infty\{(k^2+\kappa_l\kappa_t)R_0(k) - 8k^2\kappa_l\kappa_t(2k^2-k_t^2)\times \\ \times e^{i(\kappa_l+\kappa_t)} + [(2k^2-k_t^2)^2 - 4k^2\kappa_l\kappa_t]\times \\ \times(\kappa_l\kappa_t e^{2i\kappa_l h} - k^2e^{2i\kappa_t h})\}\frac{kdk}{\kappa_t R_0(k)}, \tag{3}$$

где

$$\kappa_{l,t} = \sqrt{k_{l,t}^2 - k^2}, \quad k_{l,t} = \frac{\omega}{c_{l,t}},$$

$$R_0(k) = (2k^2 - k_t^2)^2 + 4k^2\kappa_l\kappa_t.$$

Вклад в реальную часть интеграла (3) дают те участки пути интегрирования, где подынтегральная функция действительна, а также полувычет в лежащем на действительной оси полюсе подынтегрального выражения. Этот полюс определяется из решения уравнения $R_0(k) = 0$ и соответствует поверхностной волне Рэлея.

Нетрудно видеть, что при $k > k_t$ подынтегральная функция в (3) чисто мнимая, причем в этой области лежит рэлеевский полюс $k = k_R$. Интегрирование в (3) дает суммарную мощность излучения продольной и поперечной волн. Мощность поверхностной волны Рэлея W_R пропорциональна полувычету в полюсе $k = k_R$:

$$W_R = W_R(0)\zeta_R(h), \tag{4}$$

где

$$W_R(0) = -\frac{f_0^2\omega^3k_R\sqrt{k_R^2-k_l^2}}{4\rho c_t^4R_0'(k_R)} \tag{5}$$

– мощность волны Рэлея, возбуждаемой поверхностным источником [18, 19], функция

$$\zeta_R(h) = \left[\left(2\frac{k_R^2}{k_t^2} - 1\right)e^{-\sqrt{k_R^2-k_l^2}h} - 2\frac{k_R^2}{k_t^2}e^{-\sqrt{k_R^2-k_t^2}h}\right]^2 \tag{6}$$

определяет зависимость мощности от глубины, на которой находится источник. В (5) введено обозначение

$$R_0'(k_R) = \left.\frac{dR_0(k)}{dk}\right|_{k=k_R} = \\ = 2\frac{k_t^6(4k_R^2-k_t^2) - 8k_R^6(k_t^2-k_l^2)}{k_R(2k_R^2-k_t^2)^2}.$$

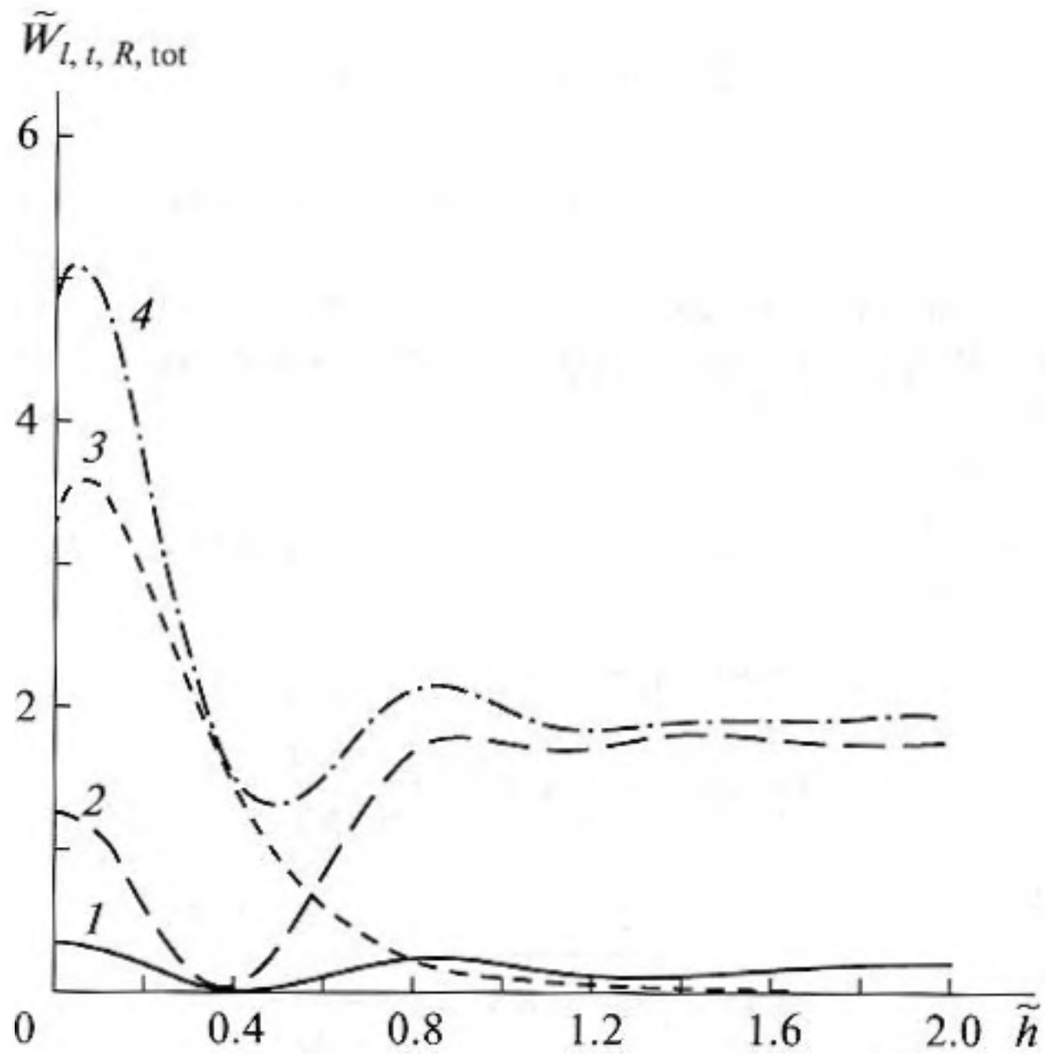

Рис. 1. Зависимости мощностей излучения продольной (*1*), поперечной (*2*), рэлеевской (*3*) волн и полной излучаемой мощности (*4*) от глубины расположения источника при $n = c_t/c_l = 1/\sqrt{(3)}$.

Отметим, что выражение (5) для мощности излучения рэлеевской волны, возбуждаемой поверхностным силовым источником, значительно короче и проще, чем соответствующие выражения, полученные в [1, 3] путем подсчета потока мощности через поверхность полубесконечного цилиндра, содержащего источники внутри себя.

Перейдем к вычислению мощности излучения объемных волн. Поскольку $k_l < k_t$, то, очевидно, интегрирование в (3) по k от k_l до k_t не может описывать мощность излучения продольной волны. Интегрирование по данному интервалу дает часть мощности излучения поперечной волны. Выделяя в интеграле (3) реальную часть для интервала $k_l < k < k_t$, имеем:

$$W_t^{(2)} = \frac{f_0^2}{4\pi\rho\omega}\int_{k_l}^{k_t}\frac{k^3}{\kappa_t|R_0(k)|^2}\{(2k^2-k_t^2)^4\sin^2\kappa_t h + \\ +16k^4q_l^2\kappa_t^2\cos^2\kappa_t h + 4q_l\kappa_t(2k^2-k_t^2)^2\times \\ \times(q_l\kappa_t e^{-2q_l h} - k^2\sin 2\kappa_t h) + 4q_l\kappa_t(2k^2-k_t^2)e^{-q_l h}\times \\ \times[(2k^2-k_t^2)^2\sin\kappa_l h - 4k^2q_l\kappa_t\cos\kappa_t h]\}dk. \quad (7)$$

где $|R_0(k)|^2 = (2k^2 - k_t^2)^4 + 16k^4q_l^2\kappa_t^2$, $q_l = \sqrt{k^2 - k_l^2}$. Аналогичный (7) вид должно иметь выражение для мощности излучения поперечной волны на участке интегрирования $0 < k < k_l$. Выделяя в (3) конструкцию, соответствующую (7), получаем:

$$W_t^{(1)} = \frac{f_0^2}{4\pi\rho\omega}\int_0^{k_l}\frac{k^3}{\kappa_t R_0^2(k)}\{(2k^2-k_t^2)^4\sin^2\kappa_t h + \\ +16k^4\kappa_l^2\kappa_t^2\cos^2\kappa_t h + 4(2k^2-k_t^2)^2\kappa_l^2\kappa_t^2 + \\ +4(2k^2-k_t^2)^3\kappa_l\kappa_t\sin\kappa_l h\sin\kappa_t h - \\ -16(2k^2-k_t^2)k^2\kappa_l^2\kappa_t^2\cos\kappa_l h\cos\kappa_t h\}dk. \quad (8)$$

Оставшаяся часть мощности на участке интегрирования $0<k<k_l$ относится к продольной волне:

$$W_l = \frac{f_0}{4\pi\rho\omega}\int_0^{k_l}\frac{k\kappa_l}{R_0^2(k)}\{(2k^2-k_t^2)^4\cos^2\kappa_l h + \\ +16k^4\kappa_l^2\kappa_t^2\sin^2\kappa_l h + 4(2k^2-k_t^2)^2k^4 + \\ +4(k_t^2-2k^2)k^2[(2k^2-k_t^2)^2\cos\kappa_l h\cos\kappa_t h - \\ -4k^2\kappa_l\kappa_t\sin\kappa_l h\sin\kappa_t h]\}dk. \quad (9)$$

Выражения (9), (8) и (7) для мощностей излучения продольной и поперечной волн были получены без использования каких-либо приближений. Эти же выражения можно получить путем вычисления потока мощности через поверхность полусферы радиуса, большого по сравнению с длиной волны, содержащей источник внутри себя.

При нулевой глубине источника, $h \to 0$, формулы (7)–(9) переходят в известные [1] выражения.

Перейдем к количественным оценкам. При проведении численных расчетов удобно представить выражения для мощностей излучения волн различных типов в виде [1]

$$W_i = \frac{f_0^2\omega^2}{4\pi\rho c_l^3}\tilde{W}_i,$$

где $\tilde{W}_i$ – безразмерные численные коэффициенты (индекс "i" принимает значения l, t, R и обозначает тип волны). Зависимости численных коэффициентов $\tilde{W}_l$, $\tilde{W}_t$, $\tilde{W}_R$ и

$$\tilde{W}_{\mathrm{tot}} = \tilde{W}_l + \tilde{W}_t + \tilde{W}_R,$$

относящихся соответственно к продольной, поперечной, рэлеевской волнам и к полной излучаемой мощности, от приведенной глубины источника $\tilde{h} = h/\lambda_t$ (λ_t – длина поперечной волны) представлены на рис. 1. Расчеты выполнены для случая $n = c_t/c_l = 1/\sqrt{3}$ (при этом в твердой среде равны параметры Ламэ λ и μ). Для поверхностного источника имеем

$$\tilde{W}_l(0) = 0.333; \quad \tilde{W}_t(0) = 1.2455;$$
$$\tilde{W}_R(0) = 3.2578; \quad \tilde{W}_{\mathrm{tot}}(0) = 4.8363,$$

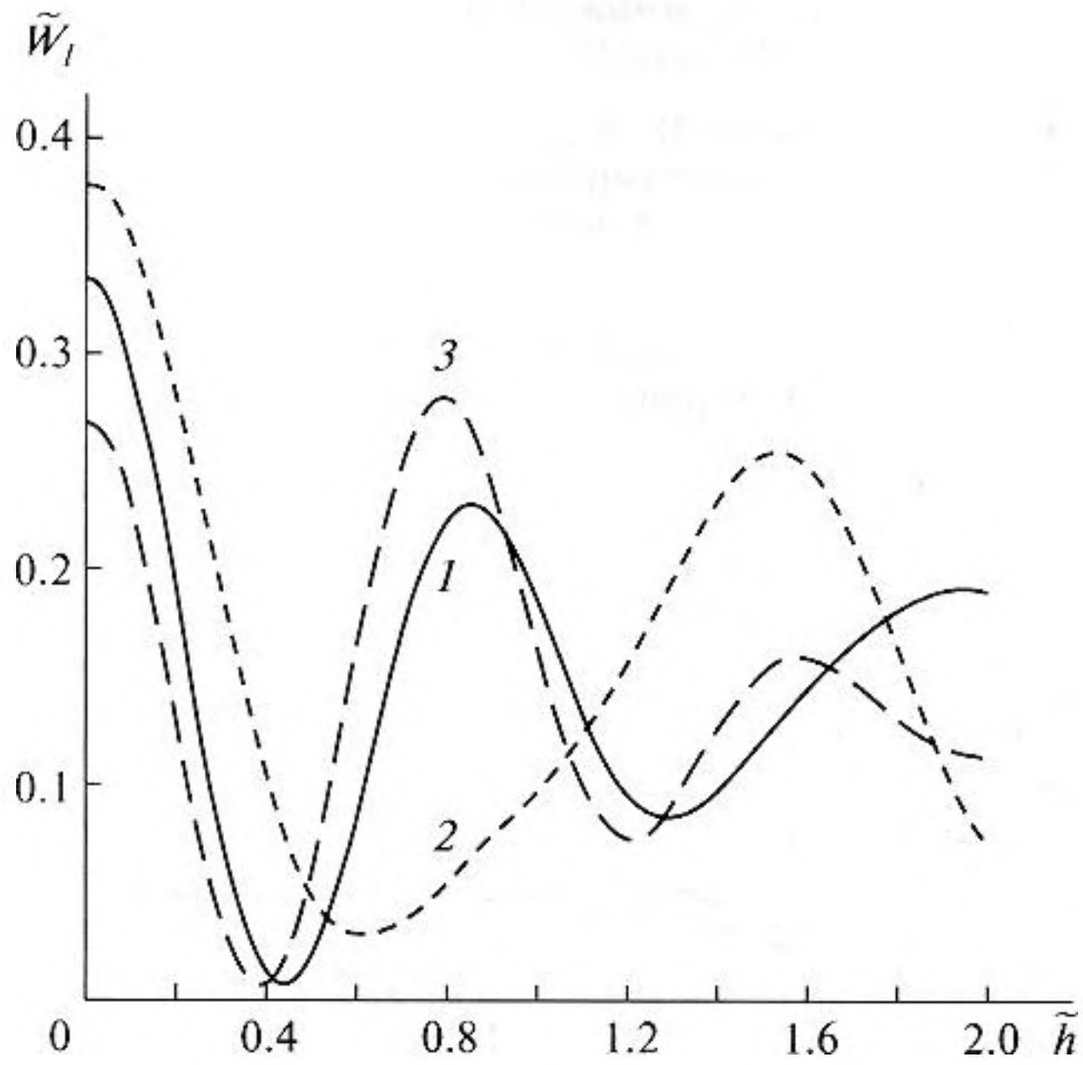

Рис. 2. Зависимости мощностей излучения продольной волны от глубины расположения источника при различных значениях параметра $n = c_t/c_l$. *1* – $n = 1/\sqrt{3}$; *2* – $n = 0.4$; *3* – $n = 0.65$.

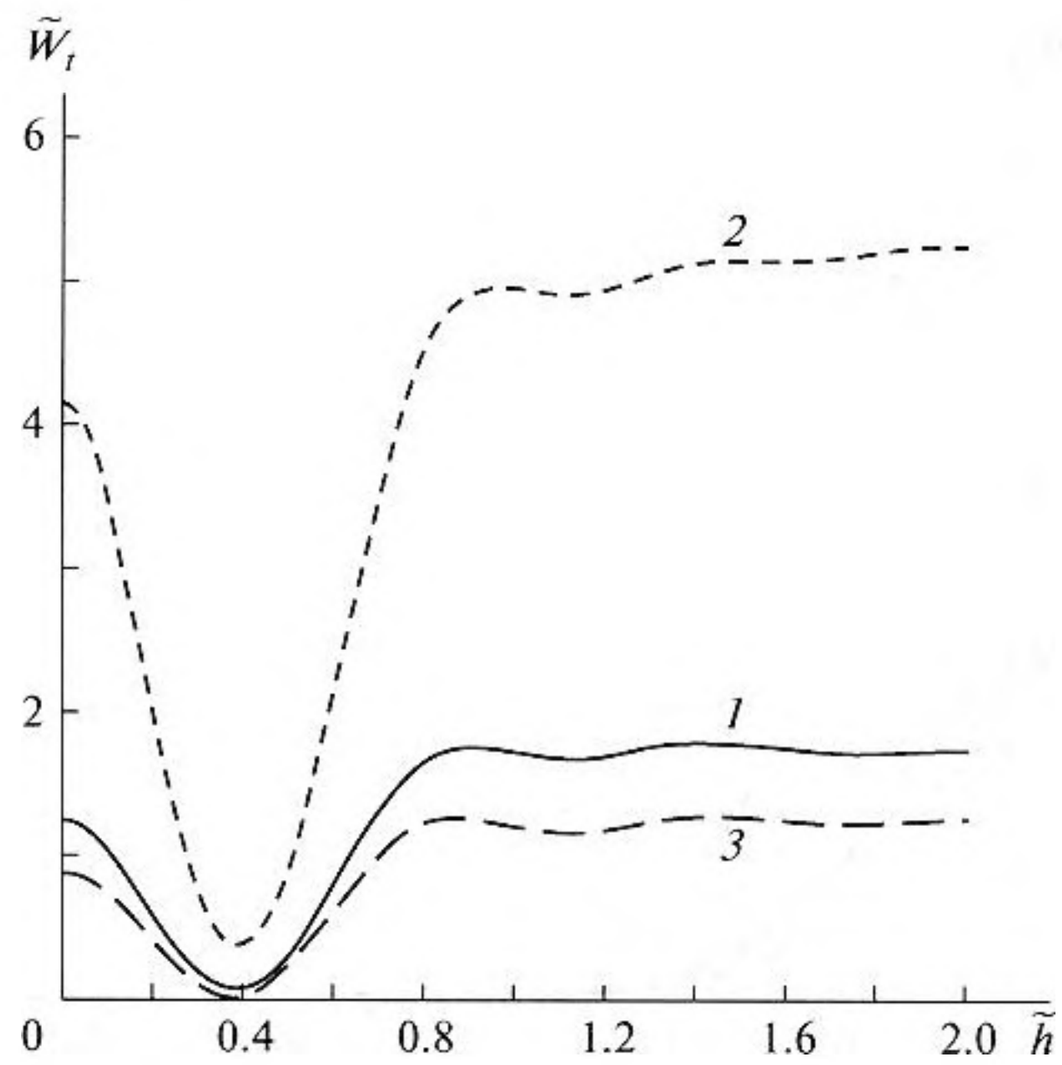

Рис. 3. Зависимости мощностей излучения поперечной волны от глубины расположения источника при различных значениях параметра $n = c_t/c_l$. *1* – $n = 1\sqrt{3}$; *2* – $n = 0.4$; *3* – $n = 0.65$.

что совпадает с известными результатами [1]. При этом на долю волны Рэлея приходится $\eta_R \approx 67.4\%$ всей излучаемой мощности, а на доли продольной и поперечной волн – соответственно $\eta_l \approx 6.9\%$ и $\eta_t \approx 25.7\%$. Зависимости мощностей излучения упругих волн от глубины расположения источника являются немонотонными. Мощность излучения волны Рэлея при удалении источника от поверхности нарастает, достигает максимума, а затем экспоненциально убывает, что определяется видом функции $\zeta_R(h)$ (см. (4), (6)). Мощности излучения продольной и поперечной волн сначала уменьшаются с ростом глубины источника и достигают минимумов на глубинах, равных приблизительно половине длины поперечной волны. Затем после нескольких осцилляций их значения приближаются к численным величинам

$$\tilde{W}_l^* = \frac{1}{6}, \qquad \tilde{W}_t^* = \frac{c_l^3}{3c_t^3},$$

определяемым формулами

$$W_l^* = \frac{f_0^2\omega^2}{24\pi\rho c_l^3}, \qquad W_t^* = \frac{f_0^2\omega^2}{12\pi\rho c_t^3}$$

для мощности излучения продольных и поперечных волн в безграничной упругой среде. При этом величина $\tilde{W}_l$ в полупространстве осциллирует вблизи уровня, который чуть ниже, чем значение $\tilde{W}_l^*$ в безграничной среде. Величина $\tilde{W}_t$ при $h \gg \lambda_t$ всегда превышает $\tilde{W}_t^*$.

Отметим, что для данной модели источника численное значение мощности излучения продольной волны, возбуждаемой поверхностным источником в упругом полупространстве, всегда больше значения мощности излучения в безграничной среде. Для поперечной волны имеет место обратное соотношение.

Аналогичный вид имеют зависимости приведенных мощностей излучения $\tilde{W}_l$, $\tilde{W}_t$ и $\tilde{W}_R$ при других значениях отношения скоростей продольных и поперечных волн. При этом $\tilde{W}_l(\tilde{h})$ имеют довольно сложный осциллирующий характер (рис. 2). Значения величин $\tilde{W}_t$, $\tilde{W}_R$ и полной приведенной мощности $\tilde{W}_{\text{tot}}$ всюду возрастают при уменьшении параметра n (рис. 3–5).

Как отмечалось выше, зависимость мощности излучения рэлеевской волны от глубины источника всегда имеет максимум (обозначим его $\tilde{W}_R^{(\max)}$). Этот максимум соответствует приведенной глубине источника $\tilde{h}_{\max} \approx 0.125$ для сред, у которых между параметрами Ламэ имеет место условие $\lambda \gg \mu$ (это характерно для некоторых видов резины), и глубине $\tilde{h}_{\max} \approx 0.01$, если $\lambda \ll \mu$.

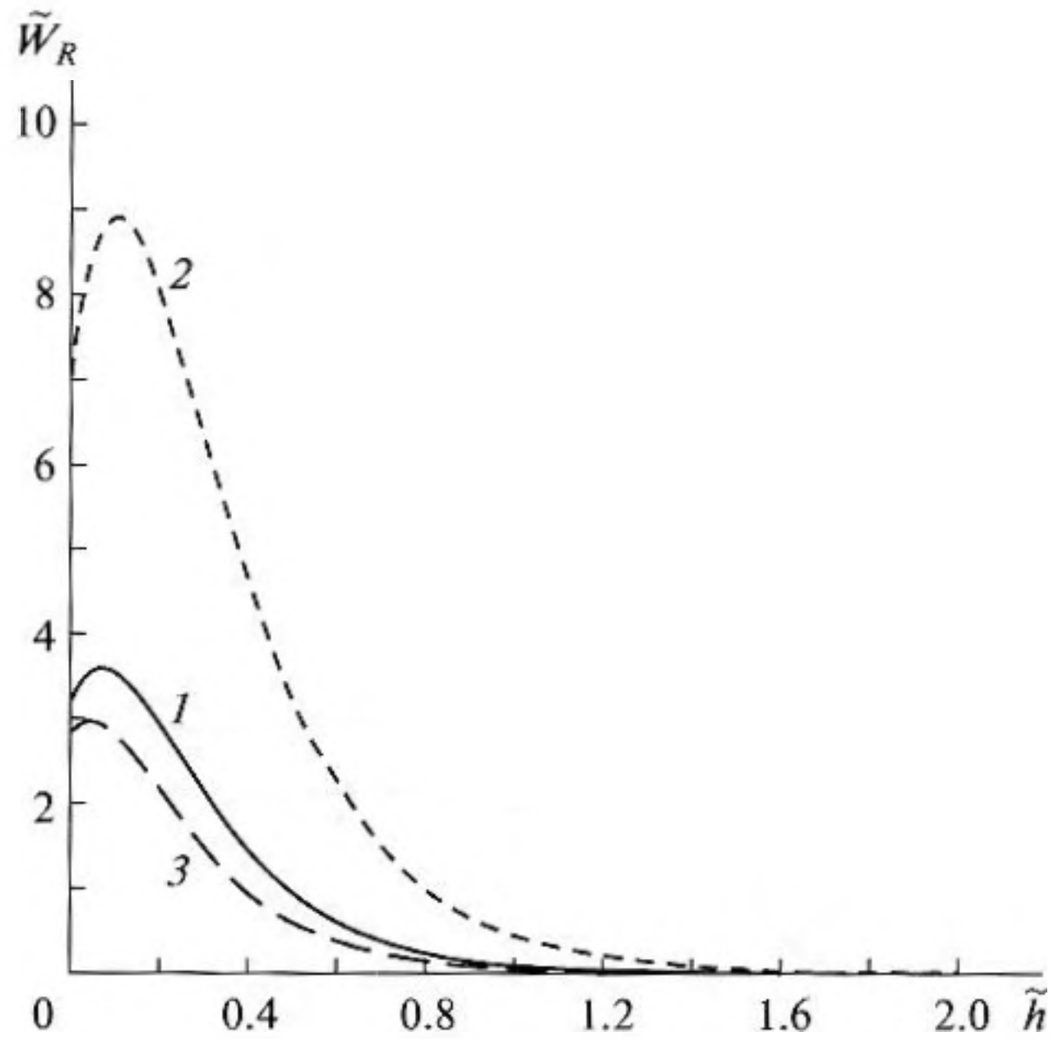

Рис. 4. Зависимости мощностей излучения поверхностной волны Рэлея от глубины расположения источника при различных значениях параметра $n = c_t/c_l$. *1* – $n = 1/\sqrt{3}$; *2* – $n = 0.4$; *3* – $n = 0.65$.

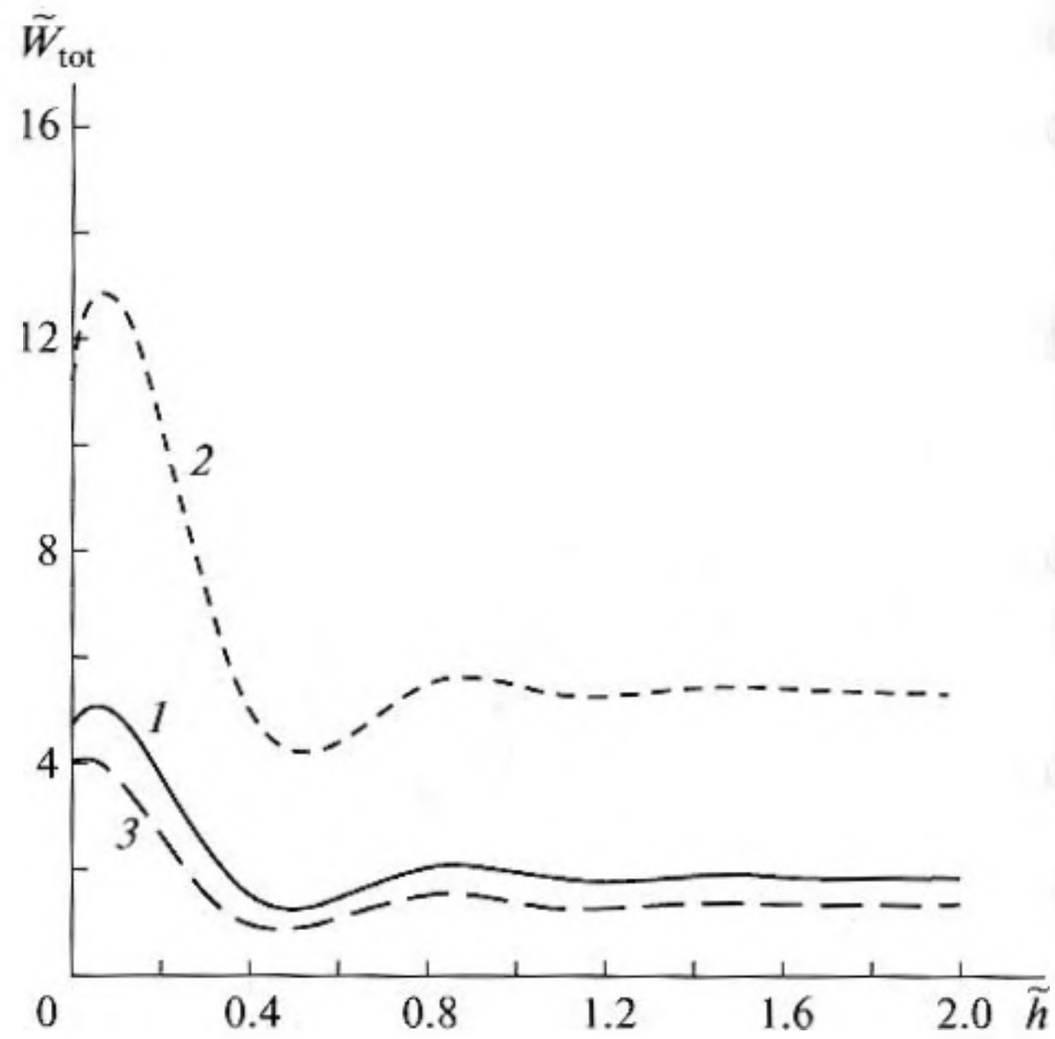

Рис. 5. Зависимости полной излучаемой мощности от глубины расположения источника при различных значениях параметра $n = c_t/c_l$. *1* – $n = 1/\sqrt{3}$; *2* – $n = 0.4$; *3* – $n = 0.65$.

В случае $\lambda \gg \mu$ значение $\tilde{W}_R^{(\max)}$ превышает величину $\tilde{W}_R(0)$ приблизительно на 40%. Если $\lambda \ll \mu$, то относительная высота максимума составляет несколько процентов. Для большинства твердых тел параметры Ламэ имеют одинаковый порядок величины, и значение величины n лежит приблизительно в пределах от 0.4 до 0.6. При этом превышение $W_R^{(\max)}$ над $W_R(0)$ составляет около 10–25%. Данное обстоятельство следует учитывать, в частности, при разработке устройств для сейсмического зондирования грунта и неразрушающего контроля материалов, когда необходимо излучить максимальную мощность в рэлеевскую волну.

Другой важной особенностью распределения мощности излучения по типам волн является то, что при глубине источника $\tilde{h}^* \approx 0.38$, из-за немонотонности зависимостей $\tilde{W}_l(\tilde{h})$, $\tilde{W}_t(\tilde{h})$ и $\tilde{W}_R(\tilde{h})$, в рэлеевскую волну уходит более 90% всей излучаемой мощности. При этом доля мощности излучения рэлеевской волны возрастает с увеличением отношения $n = c_t/c_l$ от $\eta_R = 91.3\%$ при $n = 0.4$ до $\eta_R = 98\%$ при $n = 0.65$. При $n = 1/\sqrt{3}$ имеем $\eta_R = 95.7\%$. Абсолютное значение приведенной мощности $\tilde{W}_R(\tilde{h}^*)$ меньше, чем для поверхностного источника, причем отношение $\tilde{W}_R(\tilde{h}^*)/\tilde{W}_R(0)$ убывает с ростом параметра n от 0.71 при $n = 0.4$ до 0.38 при $n = 0.65$.

Таким образом, в работе без применения каких-либо приближений получены выражения для средних за период волны мощностей излучения продольной и поперечной сферических волн и поверхностной волны Рэлея, возбуждаемых в полупространстве гармоническим источником. Данная задача представляет интерес также для исследования рассеяния упругих волн на подповерхностных включениях в твердой среде, поскольку в борновском приближении метода возмущений задача рассеяния волн может быть решена путем введения эффективных источников рассеянных волн (вторичных источников). Конфигурация вторичных источников и характеристики их излучения определяются формой и внутренней структурой исследуемой неоднородности и параметрами зондирующего волнового поля.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Miller G.F., Pursey H.* On the partition of energy between elastic waves in a semi-infinite solid // Proc. Roy. Soc. Ser. A. 1955. V. 233. N. 1192. P. 55–69.
2. *Коган С.Я.* О сейсмической энергии, возбуждаемой источником, находящимся на поверхности // Изв. АН СССР. Сер. геофиз. 1963. № 7. С. 1000–1013.
3. *Гущин В.В., Докучаев В.П., Заславский Ю.М., Конюхова И.Д.* О распределении мощности между различными типами излучаемых волн в полубезграничной упругой среде. В кн.: Исследование Земли

невзрывными сейсмическими источниками / Под ред. Николаева А.В. М.: Наука, 1981. С. 113–118.

4. *Докучаев В.П., Разин А.В.* Возбуждение упругих волн в однородном полупространстве поверхностными источниками // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1990. № 10. С. 81–87.

5. *Орлов А.Л., Разин А.В.* Возбуждение упругих волн в полупространстве нестационарными поверхностными источниками // Изв. РАН. Физика Земли. 1993. № 2. С. 78–82.

6. *Авербах В.С., Заславский Ю.М.* Пространственно-угловые характеристики и энергетический баланс упругих волн, генерируемых заглубленным источником типа центр расширения // Физика Земли. 1998. № 1. С. 49–53.

7. *Максимов Г.А.* Распределение энергии между различными типами сейсмических волн, излучаемых при подземном взрыве в однородном полупространстве // Физика Земли. 1996. № 11. С. 31–48.

8. *Максимов Г.А., Меркулов М.Е., Кудрявцев В.Ю.* Распределение энергии между различными типами сейсмических волн, излучаемых источником с произвольной диаграммой направленности в упругом полупространстве // Акуст. журн. 2003. Т. 49. № 3. С. 389–399.

9. *Петрашень Г.И., Молотков Л.А., Крауклис П.В.* Волны в слоисто-однородных изотропных упругих средах (метод контурных интегралов в нестационарных задачах динамики). М.: Наука (ленинград. отд-ние), 1982. 288 с.

10. *Аки К., Ричардс П.* Количественная сейсмология. Т. 1 / Пер. с англ. Левшина А.Л. М.: Мир, 1983. 520 с.

11. *Поручиков В.Б.* Методы динамической теории упругости. М.: Наука, 1986. 328 с.

12. *Разин А.В.* Возбуждение упругих волн нормальным к границе раздела газ – твердое тело импульсным силовым воздействием // Изв. РАН. Физика Земли. 1992. № 4. С. 32–40.

13. *Разин А.В.* Возбуждение упругих волн импульсным звуковым источником, действующим на границе раздела газ–твердое тело. // Акуст. журн. 1993. Т. 39, № 3. С. 530–536.

14. *Лапин А.Д.* Волны в твердом полупространстве, покрытом жидким слоем // Акуст. журн. 1992. Т. 38. № 2. С. 364–367.

15. *Лапин А.Д.* Возбуждение волн в упругом полупространстве дипольным источником, расположенным в покрывающем слое жидкости // Акуст. журн. 1992. Т. 38. № 3. С. 559–562.

16. *Чичинин И.С.* Вибрационное излучение сейсмических волн. М.: Недра, 1984. 224 с.

17. *Ландау Л.Д., Лившиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.

18. *Разин А.В.* Об излучении волн Стонели нормальным к границе газ–твердое тело гармоническим силовым источником // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1991. № 12. С. 100–104.

19. *Разин А.В.* Излучение поверхностной и вытекающей волн на границе раздела твердое тело–газ // Изв. вузов. Радиофизика. 2002. Т. 45. № 4. С. 354–360.