АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2009, том 55, № 6, с. 691–697

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК 534.23

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ДИФРАКЦИИ ВОЛН МЕТОДОМ НУЛЕВОГО ПОЛЯ

© 2009 г. А. Г. Кюркчан, Н. И. Смирнова

Московский технический университет связи и информатики

111024 Москва, Авиамоторная ул. 8а

E-mail: kyurkchan@yandex.ru

Поступила в редакцию 24.07.08 г.

Выполнены исследования, посвященные численной реализации метода нулевого поля решения задач дифракции волн. Показано, что корректные и устойчивые алгоритмы в рамках этого метода получаются лишь при условии, что поверхность, на которой ставится условие нулевого поля охватывает множество особенностей аналитического продолжения волнового поля внутрь рассеивателя. На примере решения конкретных задач дифракции продемонстрировано, что наилучшим способом построения поверхности нулевого поля является аналитическая деформация границы рассеивателя.

PACS: 43.20.+g, 42.25.Fx

ВВЕДЕНИЕ

Идея разнесения поверхностей – носителя токов или источников, порождающих дифракционное поле, и поверхности, на которой выполняется некоторое условие (например, граничное), позволяющее получить решение задачи дифракции, оказалась весьма плодотворной. Дело в том, что такое разнесение позволяет свести граничную задачу дифракции к интегральным уравнениям Фредгольма I-го или II-го рода с гладким ядром, решение которых значительно проще технически и требует существенно меньших затрат ресурсов ЭВМ, чем, например, классический метод токовых интегральных уравнений, в котором обе упомянутые поверхности совпадают, что приводит к появлению особенностей в ядрах этих уравнений [1].

Эта идея (разнесения поверхностей) может быть реализована двумя способами – смещением носителя токов или источников, как это делается в методах вспомогательных токов (МВТ) или (дискретных) источников (см., например, работы [2–5]), либо смещением границы, на которой выполняется определенное условие, как предлагается поступать в методе продолженных граничных условий (см., например, работу [6]) и в методе нулевого поля (методе Уотермена [7, 8]).

В настоящей работе мы остановимся на последнем из перечисленных методов – методе нулевого поля (МНП), называемого в ряде источников также (что, по нашему мнению, неверно) методом продвинутых граничных условий. МНП чрезвычайно популярен, о чем можно судить, в частности по публикациям [9–11]. Однако при решении на основе МНП конкретных задач дифракции часто получаются результаты невысокой точности [12]. При попытке повышения точности путем увеличения размера N соответствующей алгебраической системы алгоритм часто вообще разрушается. Это связано с некорректным, по нашему мнению, использованием идеи МНП. Ниже мы приведем алгоритм корректного и эффективного применения МНП.

ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ И ЕЕ РЕШЕНИЕ

Рассмотрим для определенности акустическую задачу дифракции волн на импедансном осесимметричном рассеивателе, ограниченном замкнутой поверхностью S. Иными словами, требуется найти функцию $u^1(\vec{r})$ – волновое поле, удовлетворяющую всюду в $\mathbb{R}^3\backslash\bar{D}$, где D – область внутри S, $\bar{D} = D \cup S$, однородному уравнению Гельмгольца

$$\Delta u^1(\vec{r}) + k^2 u^1(\vec{r}) = 0, \tag{1}$$

краевому условию

$$\left[u(\vec{r}) - \frac{W}{k}\frac{\partial u(\vec{r})}{\partial n}\right]_S = 0 \tag{2}$$

на границе S, а также условию излучения Зоммерфельда на бесконечности. В соотношении (2) $u(\vec{r}) = u^0(\vec{r}) + u^1(\vec{r})$, где $u^0(\vec{r})$ – падающая волна (первичное волновое поле), $W = \dfrac{Z}{ic\rho}$, c – скорость звука, ρ – плотность среды, Z – локальный акустический импеданс [1].

Будем рассматривать случай, когда поверхность S – аналитическая, т.е. может быть задана при помощи уравнения, аналитически зависящего от переменных.

Имеет место следующее соотношение [8]

$$\int_S \left\{ u(\vec{r}\,')\frac{\partial G_0}{\partial n'} - \frac{\partial u(\vec{r}\,')}{\partial n'} G_0(\vec{r}, \vec{r}\,') \right\} ds' = \begin{cases} u^1(\vec{r}), & M(\vec{r}) \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}, \\ -u^0(\vec{r}), & M(\vec{r}) \in D, \end{cases} \quad (3)$$

в котором $G_0(\vec{r}, \vec{r}\,') = \dfrac{\exp(-ik|\vec{r} - \vec{r}\,'|)}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$ – фундаментальное решение уравнения Гельмгольца.

С использованием краевого условия (2) из (3) может быть получено следующее интегральное уравнение нулевого поля

$$u^0(\vec{r}) + \int_S \frac{\partial u(\vec{r}\,')}{\partial n'} \left\{ \frac{W}{k} \frac{\partial G_0(\vec{r}, \vec{r}\,')}{\partial n'} - G_0(\vec{r}, \vec{r}\,') \right\} ds' = 0, \quad (4)$$

$$M(\vec{r}) \in \Sigma,$$

в котором Σ – некоторая замкнутая поверхность внутри S.

Традиционно считается, что единственным требованием для разрешимости уравнения (4) является условие нерезонансности (см. ниже) поверхности Σ. Покажем, что это не так.

Обратимся к интегральному уравнению МВТ [3] для случая, когда на S выполняется условие Дирихле (т.е. в (2) $W = 0$)

$$\int_\Sigma \nu(\vec{r}\,') G_0(\vec{r}, \vec{r}\,') ds' \Big|_S = u^0(\vec{r}) \Big|_S. \quad (5)$$

В уравнении (5) Σ – носитель вспомогательного тока внутри S.

Имеет место следующая теорема [3, 13, 14]:

Пусть Σ – произвольная замкнутая нерезонансная (т.е. внутренняя однородная задача Дирихле для области внутри Σ имеет только тривиальное решение) поверхность Ляпунова. Уравнение (5) разрешимо в том и только в том случае, если Σ охватывает множество $\bar{A}$ особенностей аналитического продолжения волнового поля $u^1(\vec{r})$ в область внутри S. При выполнении условий теоремы уравнение (5) разрешимо единственным образом.

Если в (4) положить $W = 0$, а в качестве Σ в (4) и в (5) выбрать одну и ту же поверхность, то ядра этих уравнений будут союзными, поэтому, очевидно, что уравнение (4) будет иметь решение также лишь при условии, что Σ охватывает множество $\bar{A}$.

Заметим также, что при численном решении интегрального уравнения МНП всегда используются какие-либо аналитические представления дифракционного поля. Все такие представления существуют лишь в области вне множества особенностей аналитического продолжения волнового поля, что еще раз подтверждает сформулированное выше условие разрешимости уравнения (4). Очевидно, что и при решении МНП других задач дифракции, скажем с условиями сопряжения на границе S сформулированное требование к поверхности Σ (для задачи с условиями сопряжения таких поверхностей будет две – одна внутри S, другая – охватывает S) остается в силе.

Таким образом, в отличие от первоначальной работы Уотермена и всех последующих работ, использующих технику нулевого поля, поверхность Σ в предлагаемом подходе – это не любая поверхность внутри S, а лишь такая, которая охватывает множество $\bar{A}$ особенностей аналитического продолжения волнового поля $u^1(\vec{r})$ внутрь S. Это чрезвычайно важное обстоятельство, так как его неучет приводит, как будет ниже показано, к построению некорректных алгоритмов, не позволяющих, вообще говоря, получать достоверные результаты.

Ниже мы также покажем, что "правильную" поверхность Σ (т.е. охватывающую множество особенностей) целесообразно выбирать не произвольным образом, а при помощи аналитической деформации поверхности S. Такой способ был впервые предложен в работе [5] для построения носителя дискретных источников в одноименном методе (МДИ).

Подробный алгоритм решения уравнений типа (4), основанный на замене интеграла суммой дискретных источников, распределенных на S, приведен в работах авторов, например, в работе [6]. Здесь мы лишь напомним технику построения поверхности Σ [5]. Как уже было сказано, поверхность Σ мы будем строить путем аналитической деформации поверхности S. Введем комплексную переменную

$$\zeta = r(\theta')e^{i\theta'}, \quad (6)$$

где теперь θ' – комплексная величина, равная $\theta' = \theta_m + i\delta$, где

$$\theta_m = \frac{\pi}{N}(m - 0.5), \quad m = \overline{1, N}, \quad (7)$$

а δ – параметр. Если $\delta = 0$, то переменная $\zeta \in C$, где C – контур на комплексной плоскости $z = x + iy$, соответствующий контуру осевого сечения рассеивателя и конгруэнтный ему. Если начать увеличивать δ, то C будет сжиматься, и мы получим новый контур, который может быть выбран в качестве контура осевого сечения поверхности Σ. Такого рода деформация возможна до тех пор, пока отображение $\zeta(\theta')$ остается взаимно однозначным. Таким образом, вначале необходимо определить максимальную величину параметра деформации δ_{max}, а после того как она определена, полагаем

$$\rho = |\zeta(\theta')|, \quad \theta = \arg\zeta(\theta').$$

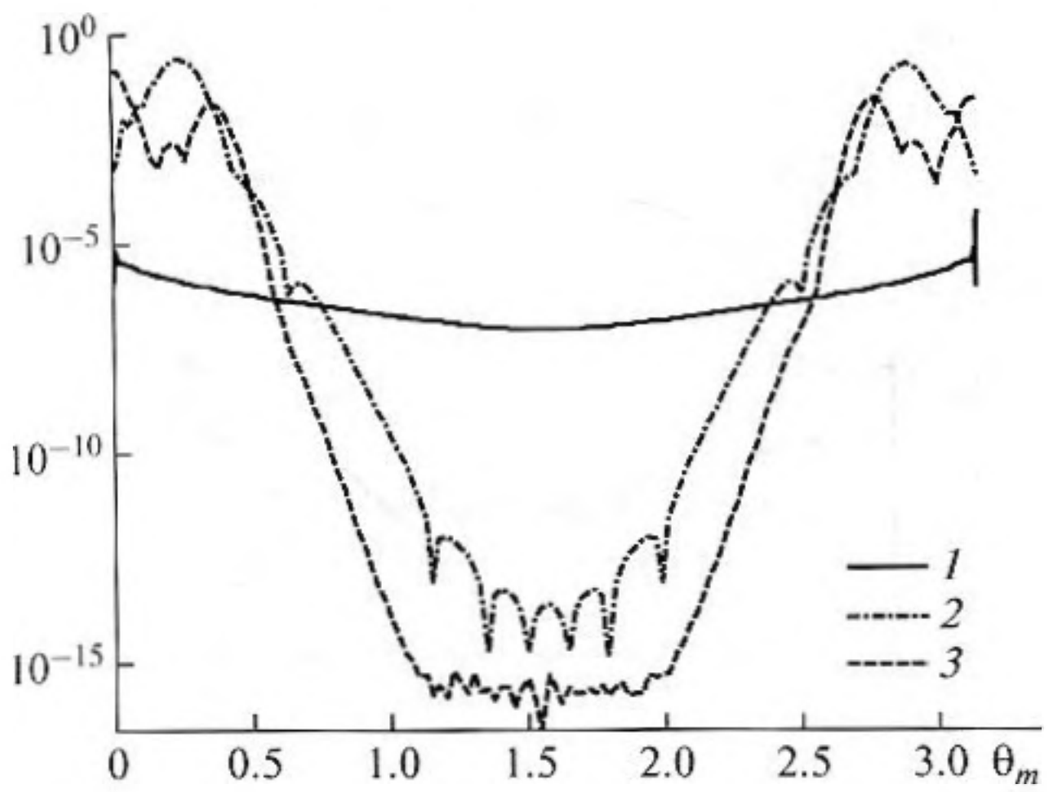

Рис. 1. Невязки нулевого поля на поверхности Σ для сфероида при $ka = 1$, $kc = 5$, $N = N_1 = 128$, $W = 0$, *1* – Σ получена при аналитической деформации S, *2* – Σ получена при неаналитической деформации S с охватом особенностей, *3* – Σ получена при неаналитической деформации S без охвата особенностей.

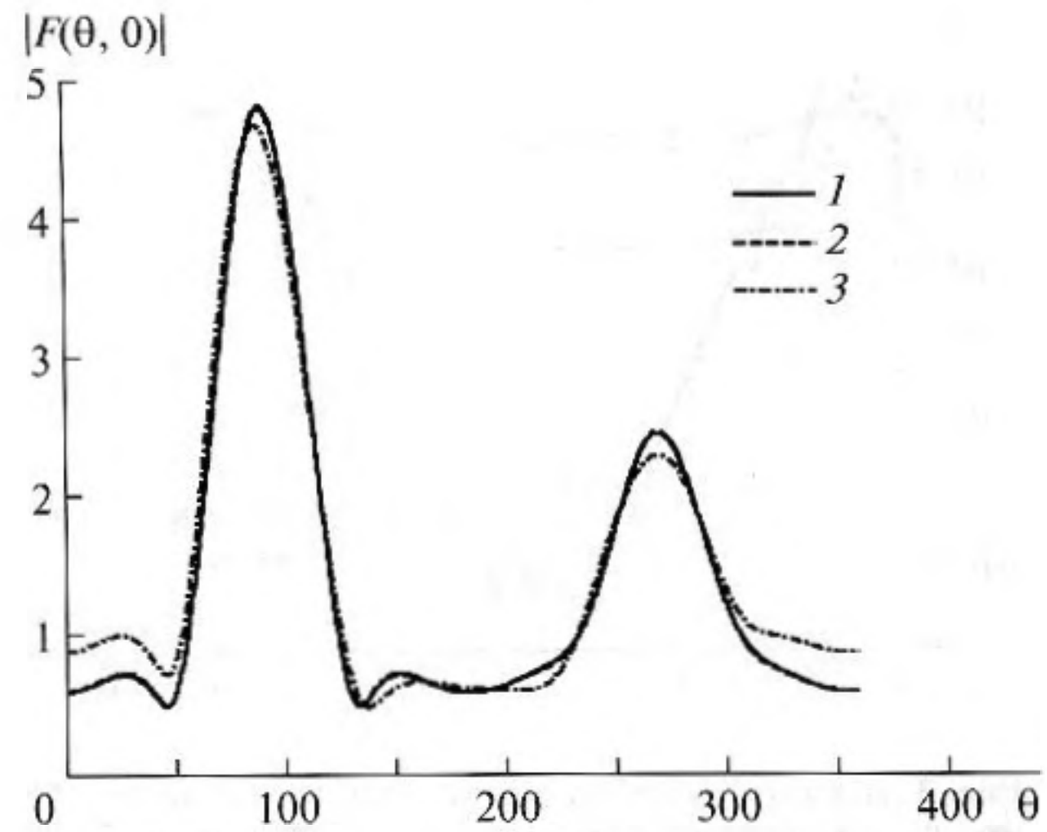

Рис. 2. Диаграммы для сфероида при $ka = 1$, $kc = 5$, $N = N_1 = 128$, $W = 0$, *1* – Σ получена при аналитической деформации S, *2* – Σ получена при неаналитической деформации S с охватом особенностей, *3* – Σ получена при неаналитической деформации S без охвата особенностей.

Точки, в которых нарушается эта взаимная однозначность, удовлетворяют соотношению

$$(r'(\theta) + ir(\theta)) = 0 \tag{8}$$

причем учитываются лишь те корни, которые лежат на комплексной плоскости z внутри контура C. Этот факт позволяет определять для разных тел критические значения параметра δ, т.е. такие значения, при которых контур в процессе деформации доходит до особых точек отображения (6). Так, например, для эллипсоида вращения [5, 13]

$$\delta_{\max} = \ln\left(\sqrt{2-\varepsilon^2}/\varepsilon\right),$$

где ε – эксцентриситет эллипса в сечении тела, для тела вращения с сечением в виде многолистника с q лепестками, то есть при $r(\theta) = c + a\cos(q\theta)$,

$$\delta_{\max} = -\frac{1}{q}\ln\left(\frac{\sqrt{1+\tau^2(q^2-1)}-1}{\tau(q+1)}\right), \quad \tau = a/c.$$

В общем случае критическое значение параметра δ определяется численно с помощью решения уравнения (8).

РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Рассмотрим вначале задачу дифракции плоской волны

$$u^0 = \exp\{-ikr[\sin\theta\sin\theta_0\cos(\varphi-\varphi_0) + \cos\theta\cos\theta_0]\}, \tag{9}$$

падающей под углами $\varphi_0 = 0$, $\theta_0 = \pi/2$ на сфероид с полуосями $ka = 1$, $kc = 5$ (большая полуось – вдоль оси z), на котором выполнено краевое условие (2) при $W = 0$.

На рис. 1 и 2 изображены соответственно невязки и диаграммы рассеяния, полученные с помощью МНП при $N = N_1 = 128$, где N – уровень аппроксимации неизвестной функции, N_1 – количество узлов, используемых при вычислении обратного преобразования Фурье функции Грина. На этих рисунках введены следующие обозначения: *1* – поверхность Σ получена при аналитической деформации границы рассеивателя, *2* – поверхность Σ получена при неаналитической деформации S с охватом особенностей путем уменьшения радиуса $r(\theta)$, задающего уравнение поверхности S, на одну и ту же величину Δr (расстояние $k\Delta$ от поверхности Σ до множества особенностей составляет величину, равную 10^{-3}), *3* – поверхность Σ получена при неаналитической деформации S без охвата особенностей (расстояние $k\Delta$ от поверхности Σ до множества особенностей составляет величину, равную 0.1).

Видно, что при условии охвата поверхностью Σ множества $\bar{A}$ особенностей получается верный результат. При неохвате же особенностей, несмотря на то, что невязка получилась, в среднем, не хуже, чем при охвате, расчет диаграммы рассеяния дает неверный результат. Этот результат свидетельствует, в частности, о "коварстве" оценки величины невязки не в равномерной метрике, а "в среднем". Рис. 1, 2 подтверждают, что для гарантии правильности результатов поверхность Σ обязательно должна охватывать особенности.

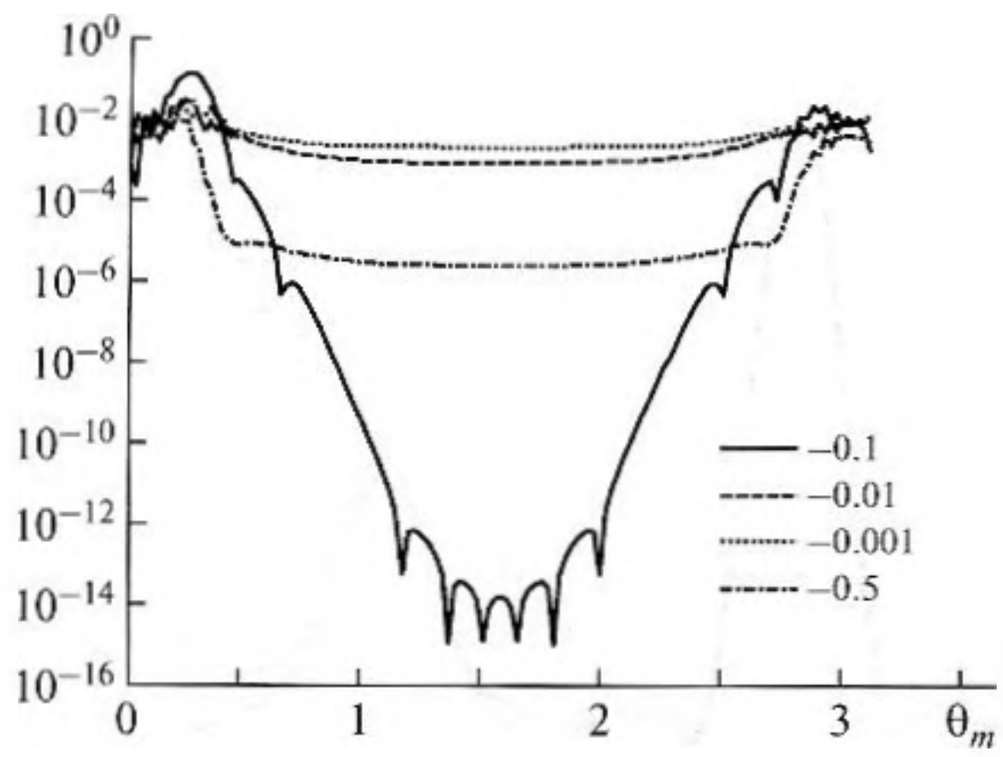

Рис. 3. Невязки нулевого поля на различных поверхностях для сфероида при $ka = 1$, $kc = 5$, $N = N_1 = 128$, $W = 0$ (Σ получена при неаналитической деформации S с охватом особенностей), точечная кривая – $k\Delta r = 0.001$, пунктирная – $k\Delta r = 0.01$, штрихпунктирная – $k\Delta r = 0.5$ (т.е. поверхность, проведена глубоко внутри Σ), сплошная – $k\Delta r = 0.1$ (невязка на самой поверхности Σ).

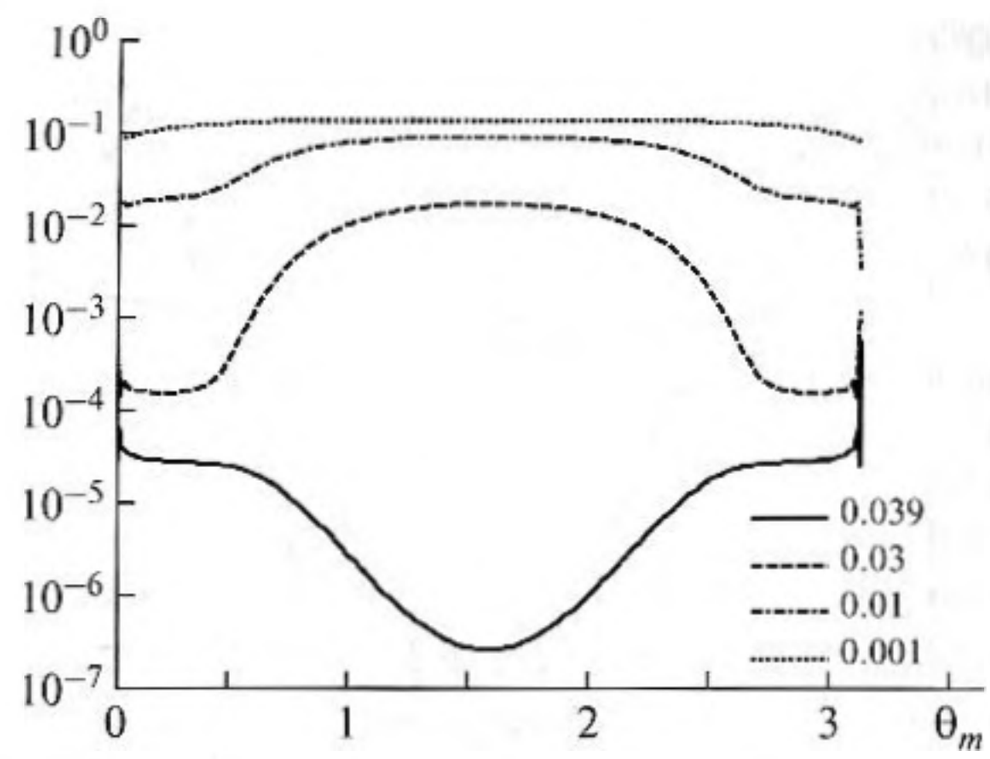

Рис. 4. Невязки нулевого поля на различных поверхностях для сфероида при $ka = 1$, $kc = 5$, $N = N_1 = 128$, $W = 1000$ (Σ получена при аналитической деформации S), точечная кривая – $\delta = 0.001$, штрихпунктирная – $\delta = 0.01$, пунктирная $\delta = 0.03$, сплошная $\delta = 0.039$ (невязка на самой поверхности Σ).

Однако можно возразить, что использование МНП без какого-либо учета особенностей часто дает вполне правдоподобные результаты, о чем можно судить по популярности этого метода во всем мире в течение многих лет. Дело в том, что, во-первых, если особенности находятся достаточно глубоко внутри S, например, как у не сильно вытянутого сфероида, они могли быть невольно охвачены при проведении расчетов; во-вторых, при неохвате особенностей за пределами поверхности Σ часто оказывается лишь небольшая часть множества особенностей, поэтому различие в диаграммах может оказаться не очень заметным "на глаз". Но чем ближе особенности к границе рассеивателя, тем большая часть множества особенностей будет выходить за пределы неправильно построенной Σ и тем заметнее будет ошибка в диаграмме.

Представляет интерес следующий вопрос: насколько хорошо выполняется условие нулевого поля на поверхностях, не совпадающих с Σ? На рис. 3 приведены результаты расчетов при $N = N_1 = 128$ величины невязки нулевого поля на различных поверхностях для рассмотренной выше задачи в случае, когда поверхность Σ охватывала множество особенностей волнового поля, но строилась путем неаналитической деформации S с охватом особенностей. Это было сделано по той причине, что построение "промежуточных" поверхностей (на которых проверяется выполнение условия нулевого поля) осуществляется по той же схеме, что и построение поверхности Σ, т.е., например, при аналитической деформации – путем увеличения параметра δ, что делает невозможным построение поверхности внутри Σ. Для рассматриваемой фигуры величина $k\Delta r$, при которой поверхность Σ охватывает множество особенностей и находится от него на таком же минимальном расстоянии, как и при аналитической деформации, равна 0.1.

На рис. 3 цифрами около обозначений кривых показаны величины $k\Delta r$ расстояния соответствующей поверхности от границы рассеивателя S. При этом штрих-пунктирная кривая соответствует поверхности, проведенной глубоко внутри Σ, а точечная (самая верхняя) – поверхности, почти примыкающей к S. Видно, что условие нулевого поля выполняется на всех поверхностях с достаточно высокой точностью.

Представляет также интерес проверка выполнения условия нулевого поля на поверхностях, не совпадающих с Σ, когда импеданс на границе рассеивателя не равен нулю. На рис. 4 приведены результаты расчета при $N = N_1 = 128$ величины невязки на различных поверхностях, проведенных внутри рассматриваемого сфероида с полуосями $ka = 1$, $kc = 5$ для случая, когда в краевом условии (2) $W = 1000$, что приближенно соответствует акустически жесткому рассеивателю, а поверхность Σ строилась при помощи аналитической деформации S. Здесь цифрами около обозначений кривых показаны величины параметра δ аналитической деформации. Самая нижняя кривая – невязка на поверхности Σ, рассчитанная в точках, находящихся между точками коллокации, самая верхняя – на поверхности, почти примыкающей к S. Видно, что и здесь условие нулевого поля выполняется везде с хорошей точностью, несмотря на то, что на самой поверхности S волновое по-

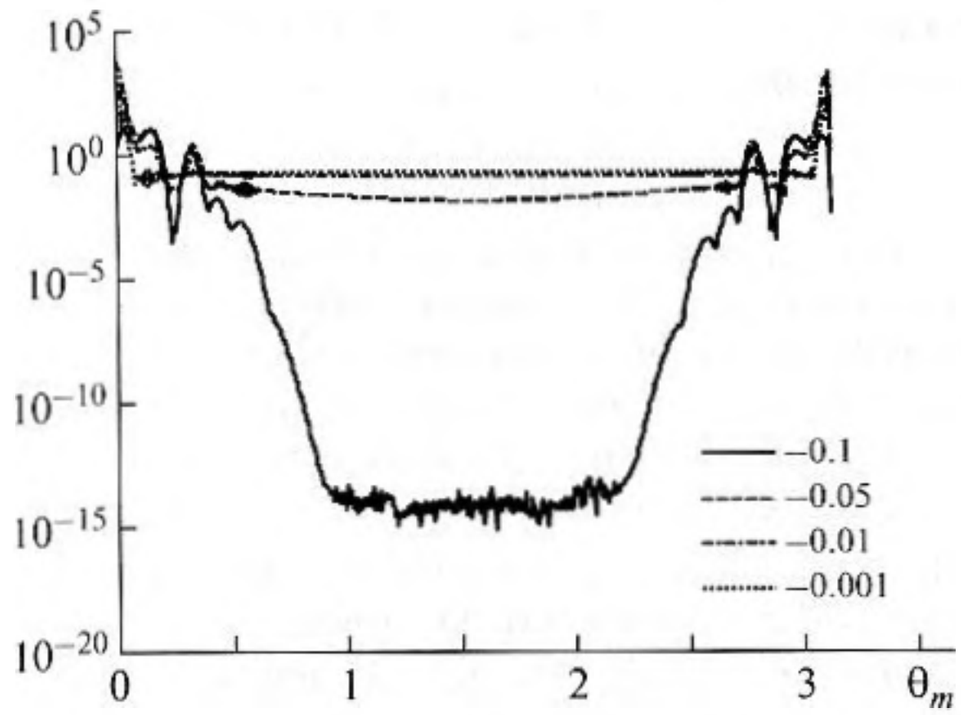

Рис. 5. Невязки нулевого поля на различных поверхностях для сфероида при $ka = 1$, $kc = 5$, $N = N_1 = 512$, $W = 1000$ (Σ получена при неаналитической деформации S с охватом особенностей), точечная кривая – $k\Delta r = 0.001$, штрихпунктирная – $k\Delta r = 0.01$, пунктирная – $k\Delta r = 0.05$, сплошная – $k\Delta r = 0.1$.

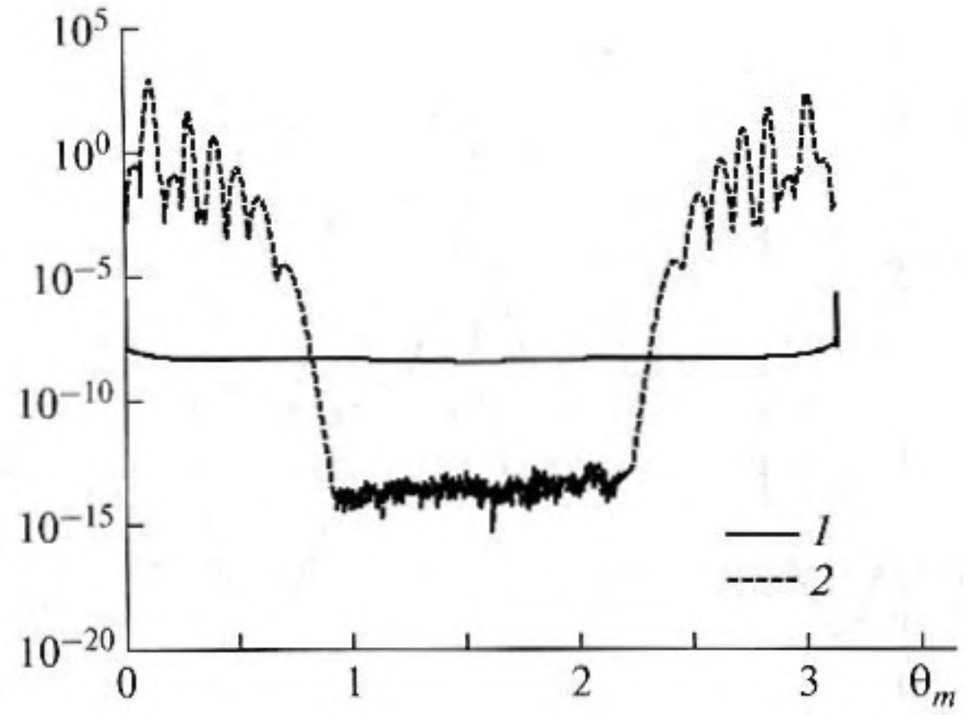

Рис. 6. Невязки нулевого поля на поверхности Σ для сфероида при $ka = 3{,}004$; $kc = 30{,}15$, $N = N_1 = 512$, $W = 1000$, 1 – Σ получена при аналитической деформации S, 2 – Σ получена при неаналитической деформации S с охватом особенностей.

ле, в отличие от предыдущего примера, не равно нулю.

На рис. 5 приведены результаты аналогичных расчетов для случая, когда поверхность Σ строилась путем неаналитической деформации S с охватом особенностей при $N = N_1 = 512$.

Видно, что невязка в целом достаточно хорошая, но при этом потребовалось в 4 раза больше дискретных источников, чем при использовании аналитической деформации.

В случае же, когда поверхность Σ не охватывает множество $\bar{A}$ особенностей, вычислительный алгоритм не дает верных результатов ни при каких значениях N.

Рассмотрим теперь задачу дифракции на сильно вытянутом рассеивателе. В работах, в которых обсуждаются условия применимости МНП (см., например, [1, 11]), указывается, что этот метод не применим к сильно вытянутым рассеивателям. В частности, в работе [11] отмечается, что стандартный МНП позволяет рассчитывать характеристики рассеяния частиц с отношением максимального размера к минимальному не более, чем 4:1. На рис. 6 и 7 изображены соответственно невязки и диаграммы рассеяния, полученные при решении задачи дифракции плоской волны (9), падающей под углами $\varphi_0 = 0$, $\theta_0 = 0$ на жесткий ($W = 1000$) сфероид с полуосями $ka = 3.004$; $kc = 30.15$ [15] при $N = N_1 = 512$. Обозначения на этих рисунках те же, что и на рис. 1, 2, за исключением того, что здесь не приведены результаты, полученные при неохвате поверхностью Σ множества $\bar{A}$ особенностей, так как даже в случае охвата этого множества здесь получился неверный результат. Заметим, что кривая 1 для диаграммы рассеяния графически совпала с приведенной в [15]. Верный же результат при неаналитической деформации границы с охватом особенностей достигается лишь при $N = N_1 = 1024$. Таким образом, можно сделать вывод о том, что корректная реализация МНП, при которой поверхность Σ охватывает множество $\bar{A}$ особенностей, позволяет решать задачи дифракции и на сильно вытянутых рассеивателях.

С другой стороны, принципиальным обстоятельством при численной реализации МНП является не отношение максимального размера рассеивателя к минимальному, а то, насколько близко отстоят от границы рассеивателя точки множества $\bar{A}$, так как, чем меньше расстояние точек это-

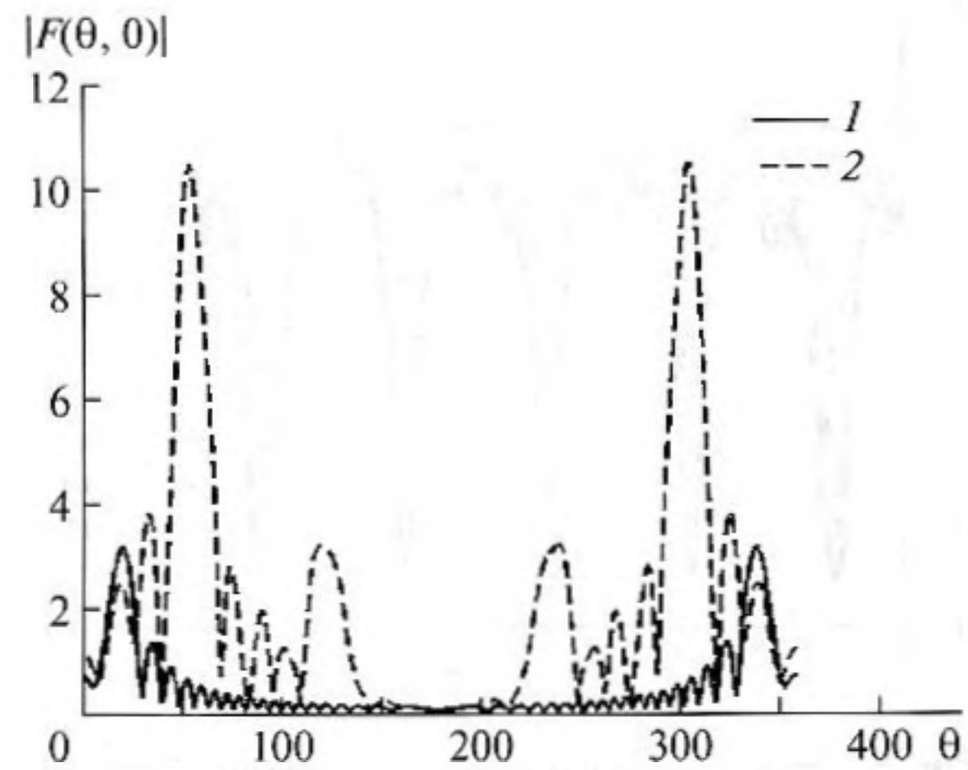

Рис. 7. Диаграммы для сфероида при $ka = 3{,}004$; $kc = 30{,}15$, $N = N_1 = 512$, $W = 1000$, 1 – Σ получена при аналитической деформации S, 2 – Σ получена при неаналитической деформации S с охватом особенностей.

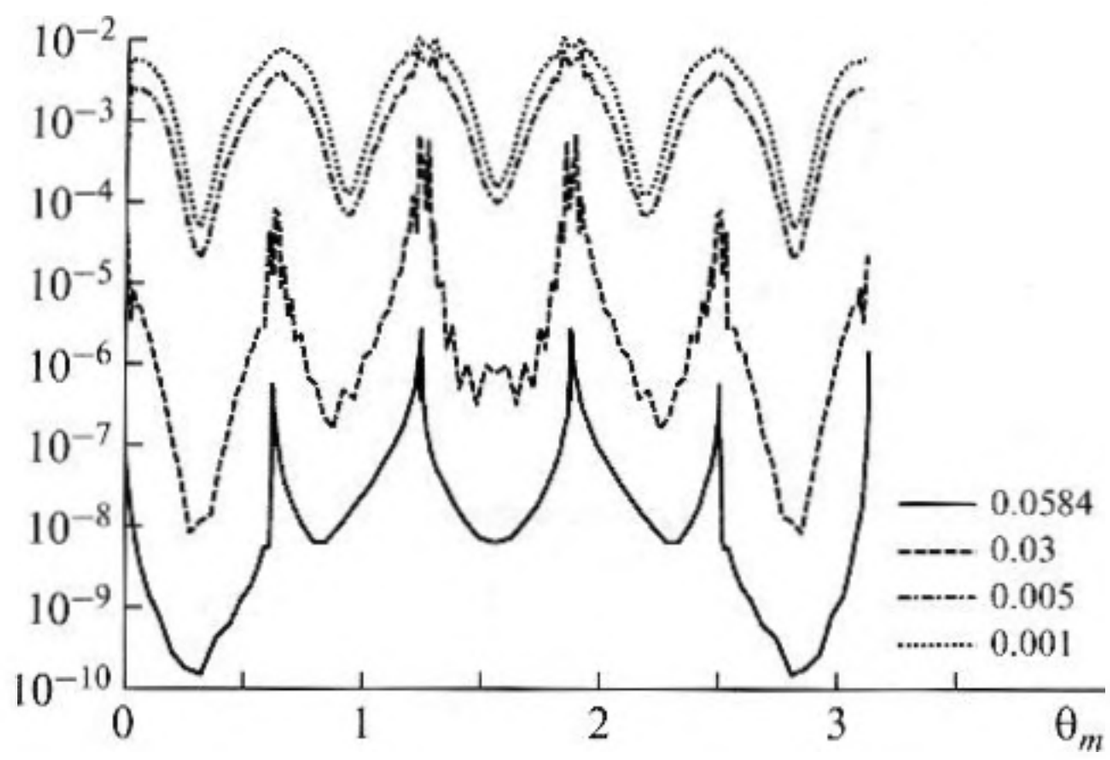

Рис. 8. Невязки нулевого поля на различных поверхностях для десятилистника при $ka = 1$, $kc = 5$, $N = N_1 = 128$, $W = 0$ (Σ получена при аналитической деформации S), точечная кривая – $\delta = 0.001$, штрихпунктирная – $\delta = 0.005$, пунктирная $\delta = 0.03$, сплошная $\delta = 0.0584$ (невязка на самой поверхности Σ).

го множества от границы S рассеивателя, тем тщательнее следует подходить к выбору поверхности Σ.

Рассмотрим задачу дифракции плоской волны на десятилистнике вращения, для которого отношение максимального размера к минимальному не велико. На рис. 8 приведены результаты расчетов при $N = N_1 = 128$, $W = 0$ величины невязки на различных поверхностях, проведенных внутри десятилистника вращения с параметрами $ka = 1$, $kc = 5$, (здесь отношение максимального размера к минимальному равно 1.5:1) для случая, когда поверхность Σ строилась при помощи аналитической деформации S. Рассматривался случай падения плоской волны (9) под углами $\varphi_0 = 0$, $\theta_0 = \pi/2$. Обозначения на рисунке те же, что на рис. 4. Самая нижняя кривая – невязка на поверхности Σ, рассчитанная в точках, находящихся между точками коллокации, самая верхняя – на поверхности, почти примыкающей к S. Видно, что при правильном выборе поверхности Σ и для этой фигуры условие нулевого поля выполняется везде с хорошей точностью.

На рис. 9 приведены результаты аналогичных расчетов для случая, когда поверхность Σ строилась путем неаналитической деформации S с охватом особенностей при $N = N_1 = 128$. Обозначения на рисунке те же, что на рис. 3. Видно, что невязка, хотя и хуже, чем при аналитической деформации, но вполне приемлема.

Но если поверхность Σ выбрана неправильно, то даже для такого не слишком вытянутого тела будут получаться неверные результаты. В качестве подтверждения на рис. 10 приведены результаты расчета диаграммы рассеяния для рассматриваемого тела. Сплошной линией показана диаграмма, полученная для случая, когда поверхность Σ охватывала множество особенностей, штриховой – результат расчета при не охвате поверхностью Σ множества особенностей (расстояние $k\Delta$ от поверхности Σ до множества особенностей составляет величину, равную 0.1). Видно, что в случае не охвата поверхностью Σ множества особенностей получился совершенно неверный результат.

Таким образом, проведенные исследования позволяют сделать вывод о том, что численная реализация МНП будет корректной лишь при усло-

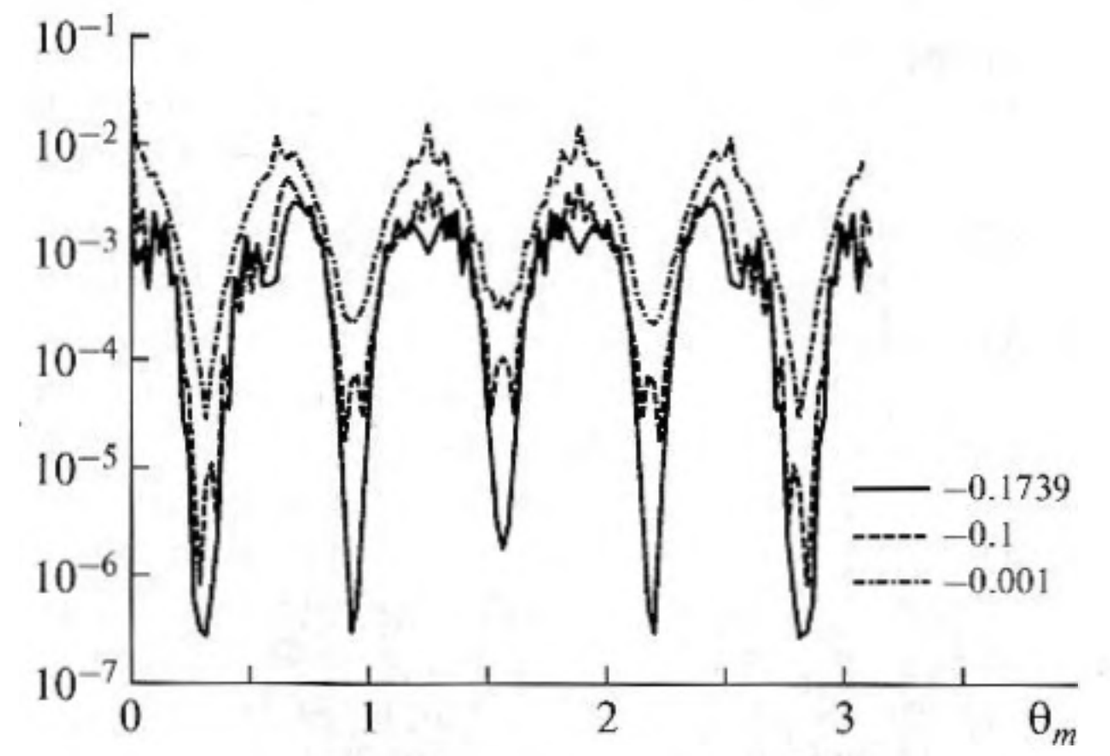

Рис. 9. Невязки нулевого поля на различных поверхностях для десятилистника при $ka = 1$, $kc = 5$, $N = N_1 = 128$, $W = 0$ (Σ получена при неаналитической деформации S с охватом особенностей), штрихпунктирная кривая – $k\Delta r = 0.001$, пунктирная – $k\Delta r = 0.1$, сплошная – $k\Delta r = 0.1739$ (невязка на самой поверхности Σ).

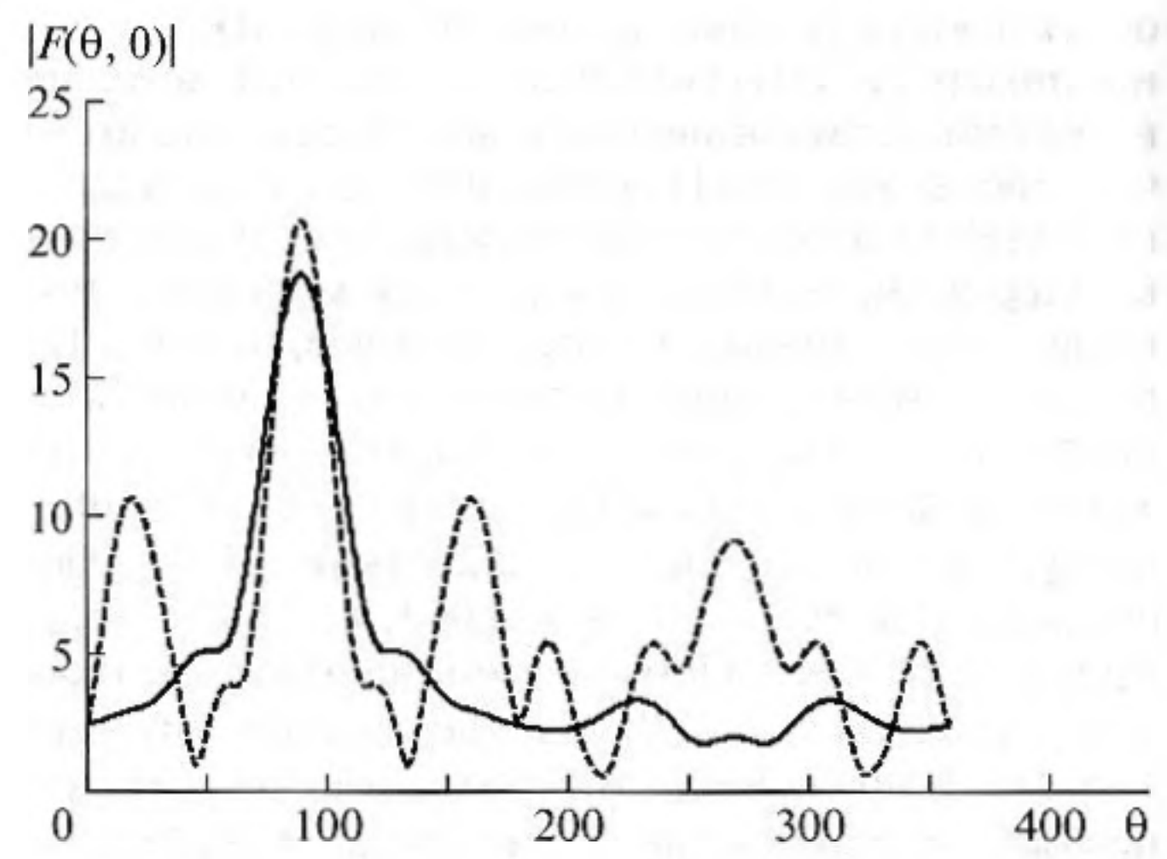

Рис. 10. Диаграммы для десятилистника при $ka = 1$, $kc = 5$, $N = N_1 = 128$, $W = 0$, сплошная кривая – Σ охватывает множество особенностей, пунктирная – Σ не охватывает множество особенностей.

вии, что поверхность, на которой ставится условие нулевого поля, охватывает множество особенностей аналитического продолжения волнового поля. Оптимальным способом построения такой поверхности является аналитическая деформация границы рассеивателя. Кроме того, выполненные исследования дают основания также заключить, что метод Т-матриц [1, 9–11], в котором условие нулевого поля ставится на сфере внутри рассеивателя, применим только при решении задач дифракции на рэлеевских рассеивателях [13, 14].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 06-02-16483).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шендеров Е.Л.* Излучение и рассеяние звука. Ленинград: Судостроение. 1989, 304 с.
2. *Купрадзе В.Д., Алексидзе М.А.* Метод функциональных уравнений для приближенного решения некоторых граничных проблем // ЖВММФ. 1963. Т. 4. № 4. С. 683–715.
3. *Кюркчан А.Г.* О методе вспомогательных токов и источников в задачах дифракции волн // РЭ. 1984. Т. 29. № 11. С. 2129–2139.
4. *Бобровницкий Ю.И., Томилина Т.Т.* Общие свойства и принципиальные погрешности метода эквивалентных источников // Акуст. журн. 1995. Т. 41. №5. С. 737–750.
5. *Кюркчан А.Г., Минаев С.А., Соловейчик А.Л.* Модификация метода дискретных источников на основе априорной информации об особенностях дифракционного поля // РЭ. 2001. Т. 46. № 6. С. 666–672.
6. *Кюркчан А.Г., Смирнова Н.И.* Решение задач дифракции волн методом продолженных граничных условий // Акуст. журн. 2007. Т. 53. № 4. С. 490–499.
7. *Waterman P.C.* New formulation of acoustic scattering // J. Acoust. Soc. Amer. 1969. V. 45. P. 1417–1429.
8. *Колтон Д., Кресс Р.* Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М.: Мир, 1987. 312 с.
9. Generalized multipole techniques for electromagnetic and light scattering. Edited by T. Wriedt. Elsevier, 1999. 264 p.
10. *Mishchenko M.I., Travis L.D., Lacis A.A.* Scattering, absorption and emission of light by small particles. Cambridge: Cambridge University Press. 2002.
11. *Wriedt T.* Review of the null-field method with discrete sources // Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer. 2007. V. 106. P. 535–545.
12. *Фарафонов В.Г., Винокуров А.А., Ильин В.Б.* Сравнение методов теории рассеяния света, использующих сферический базис // Оптика и спектроскопия. 2007. Т. 102. № 6. С. 1006–1016.
13. *Апельцин В.Ф., Кюркчан А.Г.* Аналитические свойства волновых полей. Глава II. М.: Изд-во МГУ, 1990, 208 с.
14. *Кюркчан А.Г., Стернин Б.Ю., Шаталов В.Е.* Особенности продолжения волновых полей // УФН. 1996. Т. 166. №12. С. 1285–1308.
15. *Конюхова Н.Б., Пак Т.В.* Дифракция плоской звуковой волны на жестком вытянутом сфероиде. М.: ВЦ АН СССР, 1985, 62 с.