

УДК 534.535

АКУСТИЧЕСКИЕ ПОТОКИ В СЛОЕ НЕМАТИЧЕСКОГО ЖИДКОГО КРИСТАЛЛА ПРИ БИНАРНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ ЗВУКОВЫХ И ВЯЗКИХ ВОЛН

© 2010 г. Е. Н. Кожевников

Самарский государственный университет

443011, Самара, ул. Ак. Павлова 1

E-mail: kozhev@ssu.samara.ru

Поступила в редакцию 9.10.08 г.

Анализируется механизм возникновения акустических потоков в слое нематического жидкого кристалла при бинарном воздействии на него звуковых и вязких волн. Показано, что для адекватного описания потоков на ультразвуковых частотах необходимо помимо конвективных напряжений привлекать нелинейные напряжения, обусловленные релаксацией структуры нематического кристалла в звуковом поле. Построено выражение для нелинейных релаксационных напряжений; для разных частот и толщин жидкокристаллического слоя определен относительный вклад в формирование потоков конвективных и релаксационных напряжений.

PACS: 47.20.Ft

ВВЕДЕНИЕ

Возможность практического использования нематических жидких кристаллов (НЖК) в акустооптике основана на чувствительности ориентационной структуры кристаллов к механическим воздействиям: сжатию в звуковых волнах, периодическому сдвигу, гидродинамическим потокам. Типичное акустооптическое устройство на жидких кристаллах представляет собой ячейку, в которой гомеотропный НЖК-слой помещен между скрещенными поляроидами и которая непрозрачна в отсутствие внешнего воздействия по отношению к световому потоку, падающему на ячейку нормально. Поворот оптической оси кристалла при его механической деформации приводит к деполяризации световой волны, распространяющейся в слое, и, как результат, к просветлению ячейки. Изменение прозрачности ячейки позволяет использовать ее для создания чувствительных микрофонов, вибродетекторов, модуляторов оптического излучения, экранов для визуализации звукового поля (см. обзоры [1–4]). Необходимость прогнозирования характеристик акустооптических устройств требует теоретического анализа механизма переориентации молекул кристалла и выявления новых гидродинамических явлений в анизотропных средах.

Деформация нематического жидкого кристалла при низкочастотных сжатии и сдвиге при малой амплитуде воздействия реализуется в периодическом повороте оси кристалла и, при больших амплитудах, в пороговом изменении ориентационной структуры, периодическом или однород-

ном вдоль НЖК-слоя. Теоретическое описание низкочастотных механических явлений в жидких кристаллах базируется на уравнениях гидродинамики Лесли–Эриксона [5–6], зачастую сложно с математической точки зрения, но не требует новых физических конструкций.

Воздействие ультразвуковой волны и ультразвукового пучка на нематический жидкий кристалл при их нормальном или наклонном падении на НЖК-ячейку также приводит к деформации ориентационной структуры кристалла и просветлению ячейки; аналогичный эффект вызывают поверхностные волны, распространяющиеся по граничной пластине. Двухволновое (бинарное) воздействие на ячейку звуковых волн, падающих под разными углами, или одновременное действие звуковой и поверхностной волн позволяет использовать при визуализации ультразвукового поля “акустическую подсветку” [7, 8], что увеличивает возможности жидкокристаллических ячеек в задачах визуализации.

Акустооптический эффект на ультразвуковых частотах наблюдается при амплитудах колебаний, на которых периодические углы поворота оси кристалла ничтожно малы и не могут отвечать за наблюдаемое просветление [9]. Теоретическая трактовка действия ультразвука на структуру жидких кристаллов неоднозначна. Поворот оптической оси нематического кристалла при воздействии на него периодического сдвига в работе [10] и сжатия в работах [11, 12] рассматривается как результат параметрической неустойчивости структуры, обусловленной периодической деформа-

цией среды. В работах [13–15] для объяснения воздействия ультразвука на НЖК-слой привлечен принцип наименьшего производства энтропии в стационарных процессах; авторы сводят этот принцип к минимизации поглощения звука в жидком кристалле, при которой молекулы нематика стремятся развернуться ортогонально направлению распространения волны. В работе [16] ответственными за поворот молекул нематика считаются вязкие моменты в стационарных потоках, вызванных действием радиационного давления в озвученной области. В работах [17, 18] предполагается, что деформация нематической структуры при наклонном падении на НЖК-слой ультразвуковой волны обусловлена анизотропией статического модуля упругости. Несостоятельность этих теоретических построений и расхождение их результатов с данными эксперимента анализируется в обзорах [1, 2] и работе [19].

Теоретическая картина акустооптического эффекта в гомеотропной НЖК-ячейке, качественно и по порядку величины согласующаяся с экспериментальной, основана на предположении о том, что искажение структуры нематического кристалла в ультразвуковом поле обусловлено действием на молекулы вязких моментов в гидродинамических потоках, возникающих в жидком слое при бинарном воздействии на кристалл звуковых и вязких волн [7, 8, 19–22]. Образование вязких волн, распространяющихся в глубь слоя от его границ, обусловлено спецификой граничных условий и геометрией воздействия ультразвука на НЖК-слой. При наклонном падении на НЖК-слой ультразвуковой волны вязкие волны возникают на границах жидкость – твердое тело вследствие различия их механических характеристик. Источником вязких волн служат также звуковые волны, распространяющиеся вдоль НЖК-слоя. Эти волны возникают при непосредственном контакте концов слоя с озвученной средой, при периодическом движении открытых концов НЖК-ячейки вследствие ее сжатия в звуковом поле, при неоднородном сжатии граничной пленки вблизи закрытых концов ячейки, из-за неоднородности сжатия среды вблизи резкой границы ультразвукового пучка. При распространении по подложке поверхностной волны вязкие волны непосредственно индуцируются смещением границы в своей плоскости. Акустические потоки с очевидностью возникают также и при комбинированном воздействии на нематический жидкий кристалл звукового поля и поверхностной волны, распространяющейся по граничной пластине [8].

Теоретические построения в работах [7, 8, 19–22] базируются на гидродинамическом описании нематической жидкости Лесли–Эриксона, а бинарный характер воздействия звуковых и вязких волн учитывается в уравнениях движения кон-

вективными напряжениями $\sigma_{ij} \sim -\rho v_i v_j$. В этих работах коэффициенты вязкости рассматриваются постоянными и игнорируются процессы релаксации нематической структуры, которые могут быть существенными на высоких частотах. В действительности величина коэффициентов вязкости Лесли α_k ($k = 1..6$) определяется степенью ориентационной упорядоченности нематического кристалла. Изменение ориентационного порядка при сжатии и сдвиговой деформации меняет также и значения α_k . Релаксационное запаздывание структурных изменений и, соответственно, изменений коэффициентов вязкости $\delta\alpha$ от деформации в звуковых и вязких волнах приводит к стационарным нелинейным напряжениям $\sigma_{ij}^{(r)}$ вида

$$\sigma_{ij}^{(r)} \sim \overline{\text{Re}[\delta\alpha] \cdot v_{ij}} \sim \overline{\text{Re} \left[\frac{\delta\alpha}{\delta\varepsilon_{pq}} \varepsilon_{pq} \right] \cdot v_{ij}},$$

квадратичным по амплитуде воздействия. Здесь ε_{pq} – компоненты тензора деформации, $v_{pq} = \dot{\varepsilon}_{pq}$, черта сверху означает усреднение по периоду звуковых колебаний. Напряжения $\sigma_{ij}^{(r)}$ имеют релаксационную природу и включают в себя слагаемые, пропорциональные произведению сжатия в звуковой и сдвига в вязкой волнах и могут менять картину акустических потоков на высоких частотах. Считая необходимым учитывать их в расчете потоков, уточним исходные уравнения гидродинамики для определения скорости потока в нематической жидкости при бинарном воздействии на нее ультразвуковых и вязких волн.

Нелинейные релаксационные напряжения и моменты рассмотрены ранее в работах [23–25], где анализируется воздействие на структуру нематического и холестерического жидких кристаллов плоской ультразвуковой волны, однородной по сечению, при ее нормальном падении на жидкокристаллические слои. Учет релаксационных эффектов в ультразвуковом поле позволил описать акустический переход Фредерикса в гомеотропном НЖК-слое [23], появление доменных структур в слое холестерического жидкого кристалла в широком, более четырех порядков диапазоне частот [25], а также степень деформации структуры за порогом потери устойчивости [24]. В геометрии воздействия, рассмотренной в этих работах, вязкие волны не возникают и действие ультразвукового поля на кристалл сводится к одноосному сжатию в направлении распространения волны, а деформация структуры имеет пороговый характер.

Роль нелинейных релаксационных эффектов в формировании гидродинамических потоков в жидких кристаллах при одновременном воздействии на них сжатия в звуковой и сдвига в вязкой

волнах ранее нигде не рассматривалась — такой анализ проводится в данной работе впервые. На основе молекулярно-кинетического подхода описывается вращение отдельных молекул, обусловленное как внешним воздействием, так и тепловым движением, строятся обусловленные этим вращением микронапряжения и уравнение, описывающее эволюцию углового распределения молекул. Усреднение микронапряжений по неравновесному угловому распределению и, одновременно, по периоду колебаний в звуковой волне позволяет получить выражение для стационарных релаксационных напряжений $\hat{\sigma}^{(r)}$. Определены толщины ЖК-слоя и частоты воздействия, на которых эти напряжения вносят преобладающий вклад в формирование потоков и деформацию структуры кристалла.

1. МОЛЕКУЛЯРНАЯ МОДЕЛЬ НЕМАТИЧЕСКОГО ЖИДКОГО КРИСТАЛЛА

При построении напряжений остановимся на модели нематического жидкого кристалла, предложенной в работах [26, 27]. Будем описывать все процессы в жидкокристаллической среде, исходя из представлений о поведении отдельной молекулы, определяя ориентацию длинных осей молекул единичным вектором \mathbf{L} . Молекулы кристалла считаем неполярными. Взаимодействие частицы с окружающей средой моделируем, с одной стороны, вязкими напряжениями, возникающими в окружающей частицу жидкости, и, с другой стороны — вязкими моментами, действующими на частицу со стороны среды; учитываем также действие на частицу силового поля с заданным видом потенциала. Выберем для расчета потенциал Майра—Заупе, представляя энергию молекул в виде $E(\mathbf{L}) = -d \langle P_2(L_1) \rangle P_2(L_1)$, где $d = 4.506 T_c$ — постоянная молекулярного поля, T_c — температура ориентационного плавления нематического кристалла, $P_k(L_1)$ — полиномы Лежандра, $L_1 = (\mathbf{L}\mathbf{n})$ — проекция \mathbf{L} на ось кристалла \mathbf{n} , угловые скобки означают усреднение по равновесному угловому распределению f_{00} .

Согласно результатам работы [28], в которой определяется дисперсия скорости и аномальное поглощение звука, флуктуации в нематической фазе вносят малый вклад в релаксационные процессы (<20%); еще меньшую роль играют флуктуации двуосности [29]. Поэтому при построении молекулярной модели нематического жидкого кристалла не учитываем двуосные искажения и флуктуации, считая, что параметры самосогласованного поля однородны по пространству на масштабах, меньших длины звуковых и вязких волн.

В приближении самосогласованного поля равновесное распределение ориентаций молекул имеет вид бoльцмановской экспоненты

$$f_{00} = \text{const} \exp\{-E(\mathbf{L})/k_b T\},$$

где T — температура среды, k_b — постоянная Больцмана. При внешнем воздействии плотность распределения ориентаций молекул $f(\mathbf{L})$ отклоняется от равновесной f_{00} и может быть представлена в виде произведения квазиравновесного распределения f_0 на возмущающий множитель $(1 + f')$

$$f = f_0(1 + f'). \quad (1)$$

Квазиравновесное распределение по-прежнему имеет экспоненциальный вид, но в нем учитываются изменения термодинамических параметров среды при ее деформации в звуковых и сдвиговых волнах. Требование нормировки плотности распределения приводит к соотношению $\int f' f_0 d\Omega = 0$, в котором интегрирование проводится по всем направлениям вектора \mathbf{L} . Здесь и далее Ω — пространственный угол.

Релаксационные напряжения $\delta\sigma_{ij}$ в нематическом кристалле определяются суммой упругих напряжений $\sigma_{ij}^{(e)}$, обусловленных отклонением свободной энергии от равновесного значения, и вязких напряжений $\sigma_{ij}^{(v)}$, обусловленных диссипацией энергии при вращении молекул

$$\delta\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(e)} + \sigma_{ij}^{(v)}.$$

Напряжения $\sigma_{ij}^{(e)}$ определяются второй вариацией свободной энергии нематического кристалла, имеют лишь шаровую часть $\sigma_{ij}^{(e)} \sim \delta_{ij}$ и не приводят к потокам. В дальнейших рассуждениях эти напряжения опускаем, полагая $\delta a_{ij} = \sigma_{ij}^{(v)}$.

Вязкие напряжения выведем из вида диссипативной функции [27]

$$D = D_0 + \int_V \int_{\Omega} (s_{ij} v_{i,j} + \mathbf{N}_L \mathbf{G}') f(\mathbf{L}) d\Omega dV, \quad (2)$$

в которой второе слагаемое обусловлено вращением молекул во внешнем поле. Здесь D_0 — диссипативная функция нематического кристалла при фиксированной ориентации оптической оси и в отсутствие релаксации нематической структуры, n — число молекул в единице объема, s_{ij} — вклад одной молекулы в тензор вязких напряжений, $\mathbf{N}_L = \dot{\mathbf{L}} - 1/2 \text{rot} \mathbf{v} \times \mathbf{L}$ — скорость вращения молекул относительно окружающей жидкости, \mathbf{v} — скорость движения среды, \mathbf{G}' — вязкая сила, действующая на молекулы в направлении, ортогональном вектору \mathbf{L} .

В соответствии с формулой (2) вращение молекул определяет следующий вклад в вязкие напряжения:

$$\delta\sigma_{ij} = n \int_{\Omega} s_{ij} f(L) d\Omega. \quad (3)$$

Выражения для микронапряжений s_{ij} в приближении самосогласованного поля получены в работе [26] в сферических функциях и в работе [27] в компонентах вектора \mathbf{L} . Остановившись на последнем выражении для s_{ij} и рассматривая в нем слагаемые, обусловленные релаксационными процессами, представим микронапряжения угловыми градиентами возмущения плотности распределения

$$s_{ij} = k_b T L_j \hat{\mathcal{L}}_i f' = k_b T \left(L_j \frac{\partial}{\partial L_i} - L_j L_i L_k \frac{\partial}{\partial L_k} \right) f', \quad (4)$$

где $\hat{\mathcal{L}}_i = \partial/\partial L_i - L_i L_k \partial/\partial L_k$ — угловой оператор Гамильтона в координатном представлении.

Подставляя s_{ij} в формулу (3) и полагая в ней $f = f_{00}$, получим вязкоупругие напряжения, линейные по скорости деформации среды. Проводя усреднение в формуле (3) по полной плотности распределения $f = f_0(1 + f')$, и, одновременно, — по периоду звуковой волны, найдем стационарные релаксационные напряжения $\delta\sigma_{ij}$. Таким образом, построение напряжений сводится к определению неравновесного углового распределения ориентаций молекул нематического жидкого кристалла.

2. УГЛОВОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МОЛЕКУЛ НЕМАТИЧЕСКОГО ЖИДКОГО КРИСТАЛЛА ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ЗВУКОВЫХ И ВЯЗКИХ ВОЛН

Возмущение плотности распределения f' описывается интегро-дифференциальным уравнением [27]

$$\begin{aligned} & 3d_T L_1 L_s N_s + \frac{\partial f'}{\partial t} - b T f_{00}^{-1} \hat{\mathcal{L}}_i (f_{00} \hat{\mathcal{L}}_i f') + \\ & + (P_2 - \langle P_2 \rangle) \frac{\beta - 1}{R_{22}} \int_{\Omega} P_2 f_{00} \frac{\partial f'}{\partial t} d\Omega = \\ & = - (P_2 - \langle P_2 \rangle) K \dot{p} + \lambda \left\{ 3 v_{ij} L_i L_j - v_{\alpha\alpha} + \right. \\ & \left. + \frac{3}{2} d_T L_1 (2L_1 L_i L_j - n_i L_j - n_j L_i) v_{ij} \right\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь p — звуковое давление, b — вращательная подвижность,

$$\beta = \left(1 - R_{22} \frac{d}{T} + \rho n k_b R_{22} \frac{d^2}{C_p} \right)^{-1}, \quad d_T = \frac{d}{T} \langle P_2 \rangle,$$

$$K = \beta d_T \chi, \quad \chi = \frac{1}{T_c} \frac{dT_c}{dP} - \frac{\alpha}{\rho C_p},$$

$R_{nm} = \langle P_n P_m \rangle - \langle P_n \rangle \langle P_m \rangle$, k_b — постоянная Больцмана, C_p — удельная теплоемкость, α — объемный коэффициент теплового расширения, ρ — плотность, $\mathbf{N} = \dot{\mathbf{n}} - 1/2 \text{rot} \mathbf{v} \times \mathbf{n}$ — скорость вращения директора относительно окружающей среды, λ — молекулярный форм-фактор, меняющий свое значение от $\lambda = 1$ для вытянутых молекул до $\lambda = -1$ для дискотиков. В дальнейших рассуждениях рассматриваем вытянутую форму молекул и полагаем $\lambda = 1$.

В уравнении (5) не учитываются упругие моменты Франка, обусловленные неоднородностью ориентации директора в деформированной структуре нематика и малые по сравнению с вязкими моментами. Требование малости упругих моментов ограничивает рассматриваемые частоты снизу неравенством $\omega \gg K_{33} \gamma h^{-2}$ и заведомо выполняются для ультразвуковых частот. Здесь $\gamma \sim 0.1$ Н с — коэффициент вращательной вязкости, $K_{33} \sim 10^{-11}$ Н — упругая постоянная Франка, $h > 1$ мкм — толщина НЖК-слоя.

При описании углового распределения направим ось \mathbf{e}_1 вдоль оси $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — ортогонально равновесному направлению директора \mathbf{n} . Изменение компоненты L_1 , связанное с поворотом директора, при этом равно $\delta L_1 = \delta \mathbf{n} \cdot \mathbf{L} = L_s \delta n_s$, индекс s здесь и везде далее пробегает значения $s = 2, 3$.

Возмущение f' представим разложением по собственным функциям оператора $\hat{\mathcal{L}}_i^2$ [30]. Ограничиваясь при этом вторыми по компонентам L_i моментами распределения и отбрасывая двухосные искажения, приведем f' к виду

$$f' = A_{11} (P_2 - \langle P_2 \rangle) + A_{1s} L_1 L_s, \quad s = 2, 3, \quad (6)$$

где A_{ij} — зависящие от времени коэффициенты.

Подставим f' в виде (6) в (5). Умножая полученное уравнение на $P_2(L_1) - \langle P_2 \rangle$ и интегрируя по ориентациям молекул, выделим уравнение для A_{11} . Решая его, получим

$$\begin{aligned} A_{11} = \beta^{-1} \{ & K \beta_S^{-1} [F \varepsilon + (1 - F) \tau \dot{\varepsilon}] + \\ & + 3R [F \varepsilon_{11} + (1 - F) \tau \dot{\varepsilon}_{11}] \}. \end{aligned}$$

Здесь $\varepsilon = \text{div} \mathbf{u} = -\beta_S p$ — объемное растяжение среды в звуковом поле, \mathbf{u} — смещение частиц сре-

ды, $\varepsilon_{11} = (u_i n_i n_i - \varepsilon/3)$, β_s — сжимаемость, через R обозначена комбинация параметров кристалла

$$R = \lambda \left[1 - \frac{d_T}{7} - \frac{12 R_{24}}{35 R_{22}} d_T (\beta - 1) \right],$$

функция F определяет релаксационную зависимость коэффициента A_{11} от частоты

$$F = F(\omega\tau) = \frac{\omega^2 \tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2},$$

$\tau = [6bT(1 - d_T/7)]^{-\beta}$ — время релаксации параметра ориентационного порядка $\langle P_2 \rangle$.

Для определения коэффициента A_{1s} воспользуемся выражением для квазиравновесного распределения

$$f_0 = f_{00} \left\{ 1 + 3d_T L_1 L_s \delta n_s + (P_2 - \langle P_2 \rangle) \left[Kp + \frac{\beta - 1}{R_{22}} \int_{\Omega} P_2 f' f_{00} d\Omega \right] \right\}, \quad (7)$$

полученным в работе [27], и рассмотрим возмущение тензорного параметра ориентационного порядка $\xi_{ij} = \langle L_i L_j - 1/3 \delta_{ij} \rangle = \langle P_2 \rangle (n_i n_j - 1/3 \delta_{ij})$. В равновесии тензор ξ_{ij} диагонален: $\xi_{12} = \xi_{13} = 0$. Возмущение $\delta \xi_{1s} = \langle P_2 \rangle \delta n_s$ ($s = 2, 3$) при неравновесном распределении ориентаций молекул представим в виде

$$\delta \xi_{1s} = \langle P_2 \rangle \delta n_s = \int_{\Omega} L_1 L_s f(L) d\Omega = \int_{\Omega} L_1 L_s (f_0 + f' f_{00}) d\Omega = \langle L_1 L_s f' \rangle + \frac{3}{2} d_T \langle L_2 - L_4 \rangle \delta n_s$$

откуда следует

$$\langle L_1 L_s f' \rangle = \frac{3}{2} d_T \left[\frac{2T}{3d} - \langle L_1^2 - L_1^4 \rangle \right] \delta n_s, \quad s = 2, 3. \quad (8)$$

Вычисляя дополнительно следующие имеющие нулевое значение интегралы

$$\int_{\Omega} \mathcal{L}_i (f_{00} \hat{\mathcal{L}}_i P_2) d\Omega = -6 \langle P_2 \rangle + \frac{9}{2} d_T \langle L_1^2 - L_1^4 \rangle = 0,$$

$$\int_{\Omega} \mathcal{L}_i (f_{00} \hat{\mathcal{L}}_{ij} P_4) d\Omega = -20 \langle P_4 \rangle +$$

$$+ 3d_T \left(\frac{35}{2} \langle L_1 - L_6 \rangle - \frac{15}{2} \langle L_2 - L_4 \rangle \right) = 0,$$

придем к соотношениям

$$\begin{aligned} \langle L_1^2 - L_1^4 \rangle &= \frac{2T}{3d}, \\ \langle L_1^4 - L_1^6 \rangle &= \frac{3}{7} \langle L_1^2 - L_1^4 \rangle + \frac{8 \langle P_4 \rangle}{21 P_2} = \frac{2T}{7d} \left[1 + \frac{4 \langle P_4 \rangle}{3 \langle P_2 \rangle} \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

Из формулы (8) и первого из соотношений в (9) получим значение $A_{1s} = 0$. Таким образом, возмущения плотности распределения определяются лишь релаксацией параметра ориентационного порядка

$$\begin{aligned} f' &= A_{11} (P_2 - \langle P_2 \rangle) = \\ &= (P_2 - \langle P_2 \rangle) \beta^{-1} \left\{ K \beta_s^{-1} [F \varepsilon + (1 - F) \tau \dot{\varepsilon}] + \right. \\ &\quad \left. + 3R [F \varepsilon_{11} + (1 - F) \tau \dot{\varepsilon}_{11}] \right\}. \end{aligned}$$

Подставляя f' в формулу (7), найдем плотность квазиравновесного распределения

$$\begin{aligned} f_0 &= f_{00} \left\{ 1 + 3d_T L_1 L_s \delta n_s + \right. \\ &\quad \left. + (P_2 - \langle P_2 \rangle) \left[Kp + \frac{\beta - 1}{R_{22}} \int_{\Omega} P_2 (L_1) f' f_{00} d\Omega \right] \right\} = \\ &= f_{00} \left\{ 1 + 3d_T L_1 L_s \delta n_s + (P_2 - \langle P_2 \rangle) [-K \beta_s^{-1} \varepsilon + (\beta - 1) A_{11}] \right\}. \end{aligned}$$

Полное выражение для неравновесной плотности углового распределения ориентаций молекул принимает вид

$$\begin{aligned} f &= f_{00} \left\{ 1 + 3d_T L_1 L_s \delta n_s + \right. \\ &\quad \left. + (P_2 - \langle P_2 \rangle) [-K \beta_s^{-1} (1 - F) (\varepsilon - \tau \dot{\varepsilon}) + \right. \\ &\quad \left. + 3R [F \varepsilon_{11} + (1 - F) \tau \dot{\varepsilon}_{11}] \right\}. \end{aligned} \quad (10)$$

3. СТАЦИОНАРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В НЕМАТИЧЕСКОМ ЖИДКОМ КРИСТАЛЛЕ ПРИ БИНАРНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ СДВИГА И СЖАТИЯ

Подставляя выражение для f' из (6) в формулы (4–3), получим

$$\delta \sigma_{ij} = 3nk_b T A_{11} \int_{\Omega} [L_1 L_j n_i - L_1^2 L_i L_j] f(L) d\Omega.$$

Полагая в интеграле $f = f_{00}$, найдем напряжения, обусловленные релаксацией ориентационного порядка, — эти напряжения приводят к акустической анизотропии, а также вносят вклад в дисперсии скорости и аномальное поглощение звуковой волны. Подставляя в интеграл возмущенную плотность распределения (10) и усредняя

дополнительно по времени (черта сверху), выделим стационарную часть напряжений $\sigma_{ij}^{(r)}$:

$$\sigma_{ij}^{(r)} = \overline{\delta\sigma_{ij}} = 3nk_bT \left\langle \left[L_1 L_j n_i - L_1^2 L_i L_j \right] \times \right. \\ \left. \times \left\{ 3d_T L_1 L_s \delta n_s + (P_2 - \langle P \rangle_2) \left[-K\beta_S^{-1} (1-F)(\varepsilon - \tau\dot{\varepsilon}) + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + 3R[F\varepsilon_{11} + (1-F)\tau\dot{\varepsilon}_{11}] \right] A_{11} \right\} \right\rangle. \quad (11)$$

Усредненные произведения компонент вектора \mathbf{L} представим в виде

$$\langle L_1 L_j n_i - L_1^2 L_i L_j \rangle = \frac{3}{2} \langle L_1^2 - L_1^4 \rangle (n_i n_j - 1/3\delta_{ij}), \\ \langle L_1^2 L_i L_s \rangle \delta n_s = \frac{1}{2} \langle L_1^2 - L_1^4 \rangle \delta n_j, \quad (12) \\ \langle L_1^3 L_i L_j L_s \rangle \delta n_s = \frac{1}{2} \langle L_1^4 - L_1^6 \rangle (n_i \delta n_j + n_j \delta n_i).$$

Слагаемые, содержащие квадрат ε в (1), обращаются в нуль:

$$\overline{(\varepsilon - \tau\dot{\varepsilon})(F\varepsilon + (1-F)\tau\dot{\varepsilon})} = \left[F\varepsilon^2 - (1-F)\tau^2 \dot{\varepsilon}^2 \right] = \\ = \left[\frac{\omega^2 \tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2} - \omega^2 \tau^2 \left(1 - \frac{\omega^2 \tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2} \right) \right] \varepsilon^2 = 0. \quad (13)$$

Отклонение директора от равновесного направления при быстрых деформациях среды определяется градиентами смещения частиц среды

$$\delta n_i = u_{i,j} n_j - u_{jk} n_j n_k k_i = u_{j,k} [\delta_{ji} n_k - n_i n_j n_k]. \quad (14)$$

Используя в преобразовании напряжений формулы (12–14), (9), вид коэффициента K и равновесные значения $n_2 = n_3 = 0$, приведем выражение для $\sigma_{ij}^{(r)}$ к виду

$$\sigma_{ij}^{(r)} = - \left\{ \sigma_1 \left[F\varepsilon \overline{u_{\alpha,\beta}} + (1-F)\tau \overline{\dot{u}_{\alpha,\beta}} \right] + \right. \\ \left. + \sigma_2 \left[F\varepsilon_{11} \overline{u_{\alpha,\beta}} + (1-F)\tau \overline{\dot{u}_{11} u_{\alpha,\beta}} \right] \right\} \times \\ \times \left\{ \left(1 + \frac{4\langle P_4 \rangle}{3\langle P_2 \rangle} \right) n_\beta n_j \delta_{\alpha,i} - \frac{3}{4} \left(1 - \frac{\langle P_4 \rangle}{\langle P_2 \rangle} \right) n_\beta n_i \delta_{\alpha j} - \right. \\ \left. + \frac{1}{3} \left(1 - 8 \frac{\langle P_4 \rangle}{\langle P_2 \rangle} \right) n_\alpha n_\beta n_i n_j \right\} + \\ + \left\{ \sigma_3 \left[F\varepsilon \varepsilon_{11} + (1-F)\tau \dot{\varepsilon}_{11} \right] + \sigma_4 F\varepsilon_{11}^2 \right\} N_{ij}$$

где σ_k – параметры, имеющие размерность напряжений:

$$\sigma_1 = \frac{9}{7} nk_b T \langle P_2 \rangle d_T \chi \beta_S^{-1}, \quad \sigma_2 = \frac{27}{9} nk_b T \langle P_2 \rangle R \beta^{-1}, \\ \sigma_3 = -\frac{9}{7} nk_b T R d_T \chi \beta_S^{-1} \left(R_{22} - \frac{12}{5} R_{24} \right), \\ \sigma_4 = -\frac{27}{7} nk_b T R^2 \beta^{-1} \left(R_{22} - \frac{12}{5} R_{24} \right),$$

$$N_{ij} = n_i n_j - 1/3\delta_{ij}.$$

Формула (15) определяет стационарные релаксационные напряжения, возникающие в нематическом жидком кристалле при бинарном воздействии на него звуковых и вязких волн.

4. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Уравнение для скорости потоков \mathbf{V} в нематическом жидком кристалле в отсутствие массовых сил выводится из условия баланса всех напряжений и приводится к виду

$$\text{rot} \left[\nabla \cdot (\hat{\sigma} + \hat{\sigma}^{(2)} + \hat{\sigma}^{(r)}) \right] = 0.$$

Здесь $\hat{\sigma}$ – вязкие напряжения в гидродинамике Лесли [5, 6], $\hat{\sigma}^{(2)}$ – стационарные напряжения, определяемые конвекцией скорости и угла поворота молекул θ_1 , напряжения $\hat{\sigma}^{(r)}$ определяются формулой (15).

Определим роль стационарных релаксационных напряжений в формировании акустических потоков в слое нематического жидкого кристалла толщины h с исходной гомеотропной ориентацией при бинарном воздействии на него звуковых и вязких волн частоты ω . Считаем, что сжатие в слое создается нормальным смещением его верхней границы, а вязкие волны – ее смещением в своей плоскости. Нижняя граница слоя предполагается неподвижной. Такое воздействие реализуется, в частности, при нормальном падении звуковой волны на слой нематического кристалла и распространении по граничной пластине волны Гуляева–Блюстейна. Проведем рассуждение для высоких частот, на которых длина вязкой волны много меньше толщины слоя, считая выполняющимся неравенство $qh \gg 1$, где $q = \sqrt{\rho\omega/2\eta}$, $\eta = (\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_2)/2$ – вязкость в вязких волнах, распространяющихся вдоль или ортогонально оси кристалла.

При описании потоков в НЖК-слое направим ось z по нормали к слою, определяя нижнюю и верхнюю границы слоя координатами $z = 0$ и $z = h$, ось x указывает на направление смещения частиц среды в вязких волнах. Полагаем в оценочном расчете, что гидродинамические переменные медленно меняются вдоль слоя по сравнению с их изменением по толщине, и отбрасываем в уравнении движения производные по x . В этом случае скорость потоков имеет лишь одну ненулевую компоненту $V = V_x(z)$, которая определяется уравнением

$$\eta_2 \frac{\partial^3 V}{\partial z^3} = -\frac{\partial^2}{\partial z^2} (\sigma_{xz}^{(2)} + \sigma_{xz}^{(r)}) \quad (16)$$

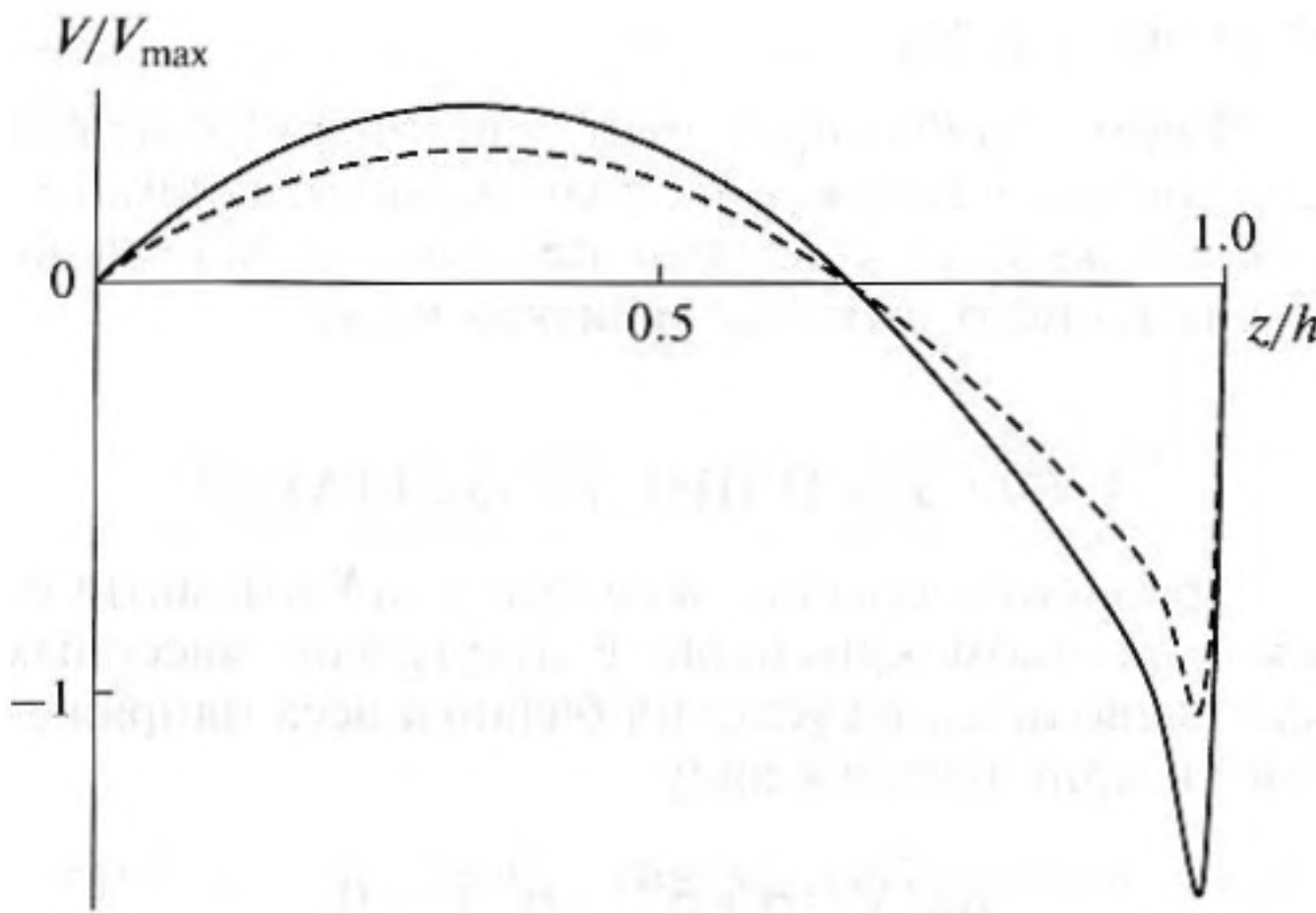


Рис. 1. Распределение приведенной скорости потока в жидкокристаллическом слое на частоте $\nu = 3$ мГц при толщинах слоя $h = 100$ мкм.

Кривые построены по формуле (4.8): сплошная — с учетом всех напряжений, пунктирная — без учета релаксационных напряжений; V_{\max} — максимальное по модулю значение скорости потока, найденного без учета релаксационных эффектов.

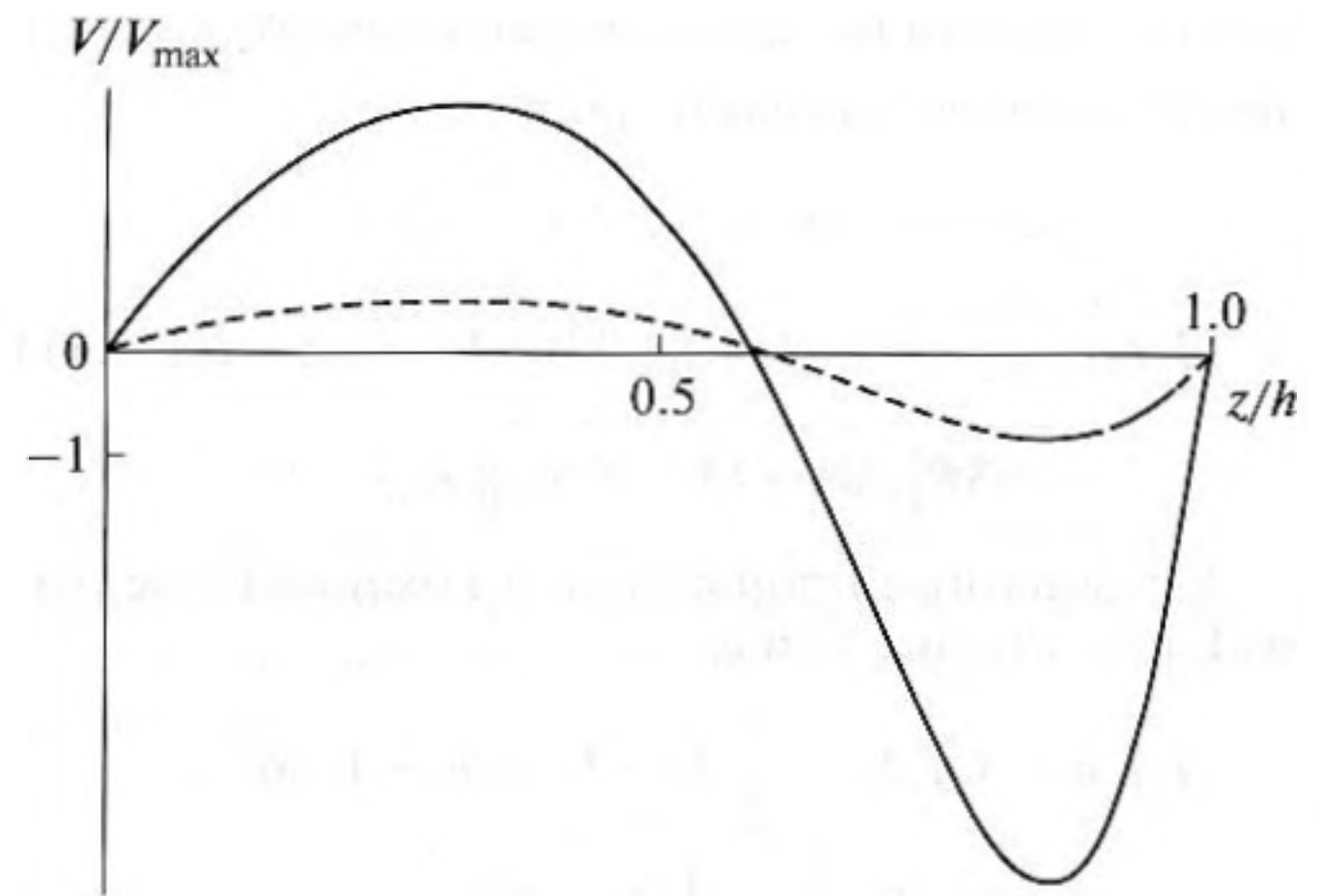


Рис. 2. Распределение приведенной скорости потока в жидкокристаллическом слое на частоте $\nu = 3$ мГц при толщинах слоя $h = 10$ мкм.

Кривые построены по формуле (4.8): сплошная — с учетом всех напряжений, пунктирная — без учета релаксационных напряжений; V_{\max} — максимальное по модулю значение скорости потока, найденного без учета релаксационных эффектов.

и удовлетворяет нулевым граничным условиям и условию замкнутости течения

$$V(0) = V(h) = 0; \int_0^h V(z) dz = 0.$$

Напряжения $\sigma_{xz}^{(2)}$ определяются конвекцией скорости и угла поворота молекул θ_1 , описывающего отклонение директора от оси z в вязких волнах, и равны $\sigma_{xz}^{(2)} = -\rho(v_x v_z) + \alpha_2(v_z \partial_z \theta_1)$; $\eta_2 = (\alpha_4 - \alpha_2 + \alpha_5)/2$.

Найдем скорости потоков при бинарном воздействии звуковой и вязкой волн.

Представим смещения в звуковом поле u_z и вязких волнах u_x в виде

$$u_z = u_{z0} \sin kz \sin \omega t,$$

$$u_x = u_{x0} \sin[\omega t - q(h-z)] e^{-q(h-z)}.$$

Выражения для скоростей и деформаций, необходимые для вычисления стационарных напряжений, имеют вид

$$v_z = \omega u_{z0} \sin kz \cos \omega t,$$

$$v_x = \omega u_{x0} \cos[\omega t - q(h-z)] e^{-q(h-z)},$$

$$\varepsilon = -u_{z,z} = -k u_{z0} \cos kz \sin \omega t,$$

$$u_{x,z} = q u_{x0} \{ \sin[\omega t - q(h-z)] + \cos[\omega t - q(h-z)] \} e^{-q(h-z)},$$

$$\varepsilon_{11} = 2/3 u_{z,z} = -2/3 \varepsilon. \quad (17)$$

Подставляя необходимые выражения из (17) в формулу (15), найдем компоненту $\sigma_{xz}^{(r)}$ релаксационных напряжений

$$\begin{aligned} \sigma_{xz}^{(r)} = & \frac{1}{2} k q u_{x0} u_{z0} \left(1 + \frac{4 \langle P_4 \rangle}{3 \langle P_2 \rangle} \right) (\sigma_1 + 2/3 \sigma_2) \times \\ & \times \cos kz \{ f_1(\omega \tau) \cos[q(h-z)] - \\ & - f_2(\omega \tau) \sin[q(h-z)] \} e^{-q(h-z)}. \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь $f_{1,2}$ — функции приведенной частоты

$$f_1(\omega \tau) = \frac{\omega \tau (1 + \omega \tau)}{1 + \omega^2 \tau^2}, \quad f_2(\omega \tau) = \frac{\omega \tau (1 - \omega \tau)}{1 + \omega^2 \tau^2}.$$

Преобразуем конвективные напряжения. Определяя угол θ_1 градиентами смещения в вязкой волне $\theta_1 = u_{x,z}$ и используя уравнение для u_x , получим соотношение

$$\overline{\alpha_2 v_z \theta_{1,z}} \approx \overline{\alpha_2 v_z u_{x,zz}} = \frac{\alpha_2}{\eta} \overline{\rho v_x v_z},$$

используя которое, представим конвективные напряжения в виде

$$\sigma_{xz}^{(2)} = -\frac{(1 - \alpha_2/\eta)}{2} \times \quad (19)$$

$$\times \rho \omega^2 u_{x0} u_{z0} \sin(kz) \cos[q(h-z)] e^{-q(h-z)}.$$

Подставим напряжения из (18), (19) в уравнение (16). Пренебрегая в решении уравнения величинами порядка малости $\exp(-qh), k/q, 1/qh \ll 1$,

получим следующее выражение для скорости потоков:

$$\begin{aligned}
 V = V_x(z) = & \frac{\rho \omega^2 u_{x0} u_{z0} (1 - \alpha_2 / \eta)}{4q\eta_2} \sin kh \times \\
 & \times \left\{ [\cos(q(h-z)) - \sin(q(h-z))] e^{-q(h-z)} + 2\frac{z}{h} - 3\frac{z^2}{h^2} \right\} + \\
 & + \frac{kqu_{x0}u_{z0}(\sigma_1 + 2/3\sigma_2)}{4q\eta_2} \left(1 + \frac{4\langle P_4 \rangle}{3\langle P_2 \rangle} \right) \cos kh \times \quad (20) \\
 & \times \left\{ [(f_1 - f_2) \cos(q(h-z)) - \right. \\
 & \left. - (f_1 + f_2) \sin(q(h-z))] e^{-q(h-z)} + \right. \\
 & \left. + (f_1 - f_2) \left(2\frac{z}{h} - 3\frac{z^2}{h^2} \right) \right\}.
 \end{aligned}$$

Относительный вклад конвективных и релаксационных напряжений в формирование акустических потоков (20) и конфигурация потоков при фиксированных параметрах среды зависят от толщины НЖК-слоя и частоты воздействия. Конфигурация потоков в слое нематического жидкого кристалла МББА представлена на рис. 1, 2, на которых для частоты $\nu = 3$ МГц и толщин слоя $h = 100$ мкм и $h = 10$ мкм по формуле (20) построены кривые, определяющие зависимость скорости V от координаты z . Сплошная кривая построена с учетом как конвективных, так и релаксационных напряжений, пунктирная – с учетом лишь конвективных напряжений (коэффициенты σ_1, σ_2 в (20) полагались равными нулю). И в том, и в другом случае скорости потоков нормируются на максимальное по модулю значение скорости V , определяемой одними лишь конвективными напряжениями. Параметры кристалла и молекулярной модели, использованные в расчетах, представлены в Приложении. Из рис. 1, 2 видно, что учет релаксационных напряжений практически не меняет конфигурацию потоков, но влияет на величину скорости V . Приведенные кривые демонстрируют также возрастание роли релаксационных напряжений $\hat{\sigma}^{(r)}$ в формировании потоков при уменьшении толщины слоя.

Определим относительный вклад релаксационных и конвективных напряжений в формировании гидродинамических потоков в жидкокристаллическом слое при бинарном воздействии звуковых и вязких волн для произвольных частот и толщин слоя, сравнивая максимальные по модулю значения $\sigma_{xz}^{(2)}$ и $\sigma_{xz}^{(r)}$. И те, и другие напряжения экспоненциально убывают с удалением от верхней границы, достигая максимума

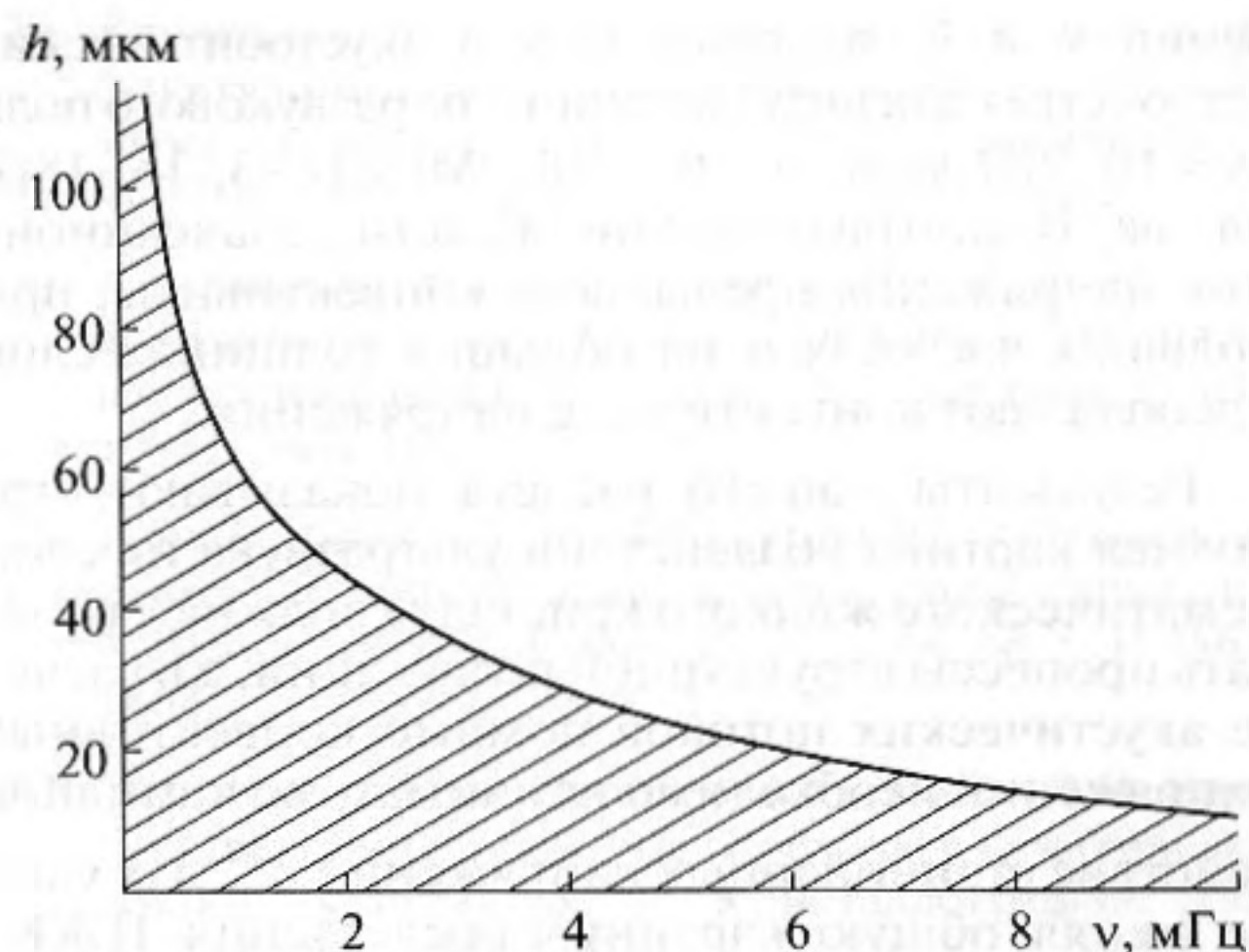


Рис. 3. Области преобладания релаксационных (штриховка) и конвективных напряжений.

при $z = h^1$, отношение их максимальных значений

$$\begin{aligned}
 A(\omega, h) = & \frac{|\sigma_{xz}^{(r)}|}{|\sigma_{xz}^{(2)}|} = \\
 = & \frac{qk(\sigma_1 + 2/3\sigma_2)}{\rho\omega^2(1 - \alpha_2/\eta)\tan(kh)} \left(1 + \frac{4\langle P_4 \rangle}{3\langle P_2 \rangle} \right) f_1(\omega\tau)
 \end{aligned}$$

зависит от частоты и толщины слоя. При малой толщине слоя и на низких частотах определяющий вклад в гидродинамические потоки вносят релаксационные напряжения, на высоких частотах и при больших толщинах слоя преобладают конвективные напряжения. Выделим на плоскости ν, h ($\nu = \omega / 2\pi$) области преобладания одних или других напряжений, построив разделяющую их кривую $h_e = h_e(\nu)$. Приравняв к единице отношение $A(\omega, h)$, получим после соответствующих преобразований

$$\begin{aligned}
 h_e(\nu) = & \frac{c}{2\pi\nu} \arctan \left[\frac{\sigma_1 + 2/3\sigma_2}{1 - \alpha_2/\eta} \left(1 + \frac{4\langle P_4 \rangle}{3\langle P_2 \rangle} \right) \frac{1}{c\sqrt{\rho\eta}} \times \right. \\
 & \left. \times \frac{\sqrt{\nu\tau(1 + 2\pi\nu\tau)}}{1 + 4\pi^2\nu^2\tau^2} \right].
 \end{aligned}$$

Кривая $h_e = h_e(\nu)$, построенная на рис. 3 для жидкого кристалла МББА, разделяет область зна-

¹ При значениях kh , достаточно близких к $\pi/2$, максимум $|\sigma_{xz}^{(r)}|$ смещается внутрь слоя ($z \neq h$). Однако численный расчет показывает, что максимальное значение $|\sigma_{xz}^{(r)}|$ достигается на верхней границе вплоть до частот ν , на которых выполняется неравенство $kh < 0.987 \cdot \pi/2 = 1.55$, а максимум произведения kh в области доминирования релаксационных напряжений не превышает значения 0.82.

чений v и h , используемых в акустооптических устройствах для визуализации ультразвукового поля ($h = 10\text{--}200$ мкм, $v = 0.2\text{--}200$ МГц [1–3, 15–18]), на две. В заштрихованной области релаксационные напряжения превышают конвективные, при больших частотах и на больших толщинах слоя преобладают конвективные напряжения.

Результаты нашего расчета показывают, что полная картина воздействия ультразвука на слой нематического жидкого кристалла должна учитывать процессы структурной релаксации, а в расчете акустических потоков помимо конвективных напряжений необходимо принимать во внимание действие стационарных напряжений $\hat{\sigma}^{(r)}$. Их учет, не меняя общую картину просветления НЖК-ячейки при воздействии ультразвука, может существенно менять величину эффекта.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных исследований (РФФИ), Грант 07-02-00763.

ПРИЛОЖЕНИЕ

В расчетах используются параметры нематического жидкого кристалла МББА: $\alpha_4 \approx \gamma_1 \approx 0.1$ Па, $-\alpha_2 \approx \gamma_1 \approx 0.078$ Па·с, $\alpha_5 = 0.046$ Па·с, $\rho \approx 10^3$ Кг м⁻³ [5, 6], $c = 1.5 \times 10^3$ м·с⁻¹, $\tau = 3 \times 10^{-8}$ с, $\beta_s = 0.44 \times 10^{-9}$ Н⁻¹ м² [31], $\partial T_c / \partial P = 3.5 \times 10^{-7}$ град Н⁻¹ м² [32], $C_p = 2 \times 10^6$ Дж кг⁻¹ [33], $d \approx 4.506 T_c$ [27], $T_c = 319$ К° [6], $\alpha = 3 \times 10^{-4}$ град⁻¹ [34]. Для температуры $T = 305$ К° параметры молекулярной модели, найденные численным расчетом, равны: $\langle P_2 \rangle = 0.6$, $\langle P_4 \rangle = 0.24$, $R = 1.5$, $\beta = 2.68$, $d_T = 2.8$, $\chi \approx 10^{-7}$ Н⁻¹·м², $\sigma_1 = 8.8 \times 10^7$ Н·м⁻², $\sigma_2 = 0.7 \times 10^7$ Н·м⁻², $\sigma_3 = 1.9 \times 10^7$ Н·м⁻², $\sigma_4 = 0.49 \times 10^7$ Н·м⁻².

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kapustina O.A.* Acoustooptical Phenomena in Liquid Crystals // *Mol. Cryst. Liq. Cryst.* 1984. V. 112. № 1–2. P. 1–164.
2. *Капустин А.П., Капустина О.А.* Акустика жидких кристаллов. М.: Наука. 1986. С. 247.
3. *Капустина О.А.* Пути совершенствования акустооптических преобразователей на жидких кристаллах // *Акуст. журн.* 2000. Т. 46. № 2. С. 204–210.
4. *Капустина О.А.* Акустика жидких кристаллов. Современный взгляд на проблему // *Кристаллография.* 2004. Т. 49. № 4. С. 759–772.
5. *Stephen M.J., Straley J.P.* Physics of liquid crystals // *Rev. of Modern Physics.* 1974. V. 46. № 4. P. 617–704.
6. *Де Жен П.* Физика жидких кристаллов. М.: Мир. 1977. 399 с.
7. *Акопян Р.С., Зельдович Б.Я., Табирян Н.В.* Возбуждение регулярных конвективных движений в жидких кристаллах акустической волной // *Акуст. журн.* 1988. Т. 38. № 8. С. 583–587.
8. *Бочаров Ю.В., Капустина О.А.* Особенности ориентационного искажения нематиков в условиях двухволнового воздействия // *Акуст. журн.* 1999. Т. 45. № 4. С. 461–467.
9. *Кожевников Е.Н., Чабан И.А.* К вопросу об использовании жидких кристаллов в акустооптических устройствах // *Акуст. журн.* 1975. Т. 21. № 6. С. 900–907.
10. *Чабан И.А.* Виброгидродинамическая неустойчивость жидких кристаллов на низких частотах // *Акуст. журн.* 1985. Т. 31. С. 132.
11. *Чабан И.А.* Акустогидродинамическая неустойчивость нематических жидких кристаллов // *Акуст. журн.* 1979. Т. 25. Вып. 1. С. 124–134.
12. *Кожевников Е.Н.* Неустойчивость ориентации нематических жидких кристаллов в звуковом поле в отсутствие растекания // *Акуст. журн.* 1980. Т. 26. № 6. С. 966–871.
13. *Dion J.-L.* Orienting action on liquid crystals related to the minimum entropy production // *J. Appl. Phys.* 1979. V. 50. № 4. P. 2965–2966.
14. *Dion J.-L.* Un nouvel effet des ultrasons sur l'orientation d'un crystal liquide. // *C.R.Acad.Sci.Paris.* 1977. V. 28. P. B-219 – B-222.
15. *Dion J.-L.* The acousto-optical effect in liquid crystals due to anisotropic attenuation: new development and application // *IEEE. Ultrasonic symposium.* 1979. P. 56–59.
16. *Candau S., Ferre A., Petters A., Waton G., Pieranski P.* Acoustical Streaming in a Film of Nematic Liquid Crystal // *Mol. Cryst. Liq. Cryst.* 1980. V. 61. P. 7–30.
17. *Selinger J.V., Spector M.S., Greanya V.A., Weslowski B.T., Shenoy D.K., Shashidhar R.* Acoustic realignment of nematic liquid crystals // *Phys. Rev. E.* 2002, V. E66, P. 051708.
18. *Greanya V.A., Spector M.S., Selinger J.V., Weslowski B.T., Shashidhar R.* Acousto-optic response of nematic liquid crystals // *J. Appl. Phys.* 2003, V. 94, № 12. P. 7571–7575.
19. *Кожевников Е.Н.* Деформация гомеотропного НЖК-слоя при наклонном падении ультразвуковой волны // *Акуст. журн.* 2005. Т. 51. № 6. С. 795–801.
20. *Miyano K., Shen Y.R.* Domain pattern excited by acoustic waves in a nematic film // *Appl. Phys. Lett.* 1972. V. 28. № 9. P. 473–475.
21. *Sripaipan S., Hayes C.F., Fang G.T.* Ultrasonically-induced optical effect in a nematic liquid crystal // *Phys. Rev. A.* 1977. V. 15. № 3. P. 1297–1303.
22. *Кожевников Е.Н.* Акустооптический эффект в нормально ориентированном слое нематического жидкого кристалла при падении на него ультразвукового пучка // *ЖЭТФ.* 1982. Т. 82. Вып. 1. С. 161–166.
23. *Кожевников Е.Н., Долматова Н.Г.* Переход Фредерикса в гомеотропно ориентированном слое нематического жидкого кристалла при нормальном па-

- дении ультразвуковой волны // Вестник Сам. Гу. 1997. Вып. 2(4). С. 142–152.
24. *Кожевников Е.Н.* Структура акустических доменов холестерического жидкого кристалла при воздействии ультразвука // Акуст. журн. 2004. Т. 50. № 5. С. 646–654.
25. *Kozhevnikov E.N.* Relaxation Nature of the Domain Structure in a Cholesteric Liquid Crystal under the Effect of Ultrasound // *Acoustical Physics*. Vol. 46. № 6. 2002. P. 687–696.
26. *Степанов В.И.* Кинетическая теория динамических свойств нематических жидких кристаллов // К статической теории термотропных жидких кристаллов. 1982. Препринт № 106. Институт Механики Сплошных Сред УНЦ УРО РАН АН СССР. Свердловск. С. 39–61.
27. *Кожевников Е.Н.* Релаксация углового распределения молекул нематического жидкого кристалла в звуковом поле // Акуст. журн. 1994. Т. 40. С. 613–618.
28. *Кожевников Е.Н., Чабан И.А.* Распространение звука в НЖК вблизи перехода его в изотропную фазу // Акуст. журн. 1978. Т. 24. № 2. С. 363–371.
29. *Каменский В.Г., Кац Е.И.* Влияние двухосных флуктуаций параметра порядка на поглощение звука в нематических жидких кристаллах // ЖЭТФ. 1982. Т. 83. Вып. 3(9). С. 1045–1051.
30. *Кожевников Е.Н., Долматова Н.Г.* Собственные функции квадрата углового оператора Гамильтона в координатном представлении // Вестник СамГУ. 1995. Спец. Вып. С. 73–81.
31. *Eden D., Garland C.W., Williamson R.C.* Ultrasonic investigation of the nematic-isotropic phase transition in MBVA // 1973, *J. Chem. Phys.* V. 58. № 5. P. 1861–1868.
32. *Тихомирова М.А., Вистинь А.К., Носов В.Н.* Влияние давления на фазовые переходы в нематических жидких кристаллах. // Кристаллография. 1972. Т. 17. № 5. С. 100–1002.
33. *Сонин А.С.* Лекции по жидким кристаллам. Ч. 1. М.: МГУ. 1979. С. 122.
34. *Lee J.S., Golub S.L., Brown P.C.* Raman Scattering From a Nematic Liquid Crystal. Orientational Statistics // *J. Chem. Phys.* 1972. V. 76. P. 2409–2417.