АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2010, том 56, № 2, с. 147–151

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК 534.23

ПЕРИОДИЧЕСКАЯ ПОВЕРХНОСТНАЯ СТРУКТУРА С ЭКСТРЕМАЛЬНЫМИ АКУСТИЧЕСКИМИ СВОЙСТВАМИ

© 2010 г. Ю. И. Бобровницкий, К. Д. Морозов, Т. М. Томилина

Учреждение Российской академии наук –
Институт машиноведения им. А.А. Благонравова
101990 Москва, Малый Харитоньевский пер 4
E-mail: bobrovni@orc.ru

Поступила в редакцию 25.09.09 г.

Импедансным методом решено несколько вариационных задач о поглощении и рассеянии звука. Получены в явном виде поверхностные импедансы наилучшего поглотителя и идеально прозрачного тела. Предложена поверхностная структура (покрытие), реализующая их акустические свойства. Приведены результаты компьютерного моделирования.

В настоящее время ведутся интенсивные работы по исследованию и созданию новых материалов с микро- и наноструктурой, обладающих уникальными механическими и акустическими свойствами. Параллельно аналогичные работы ведутся в оптике и электродинамике, в частности, по созданию так называемых метаматериалов, с помощью которых возможно решение таких задач, ранее казавшихся "неприступными", как задача о плаще-невидимке или о суперлинзе.

В данной работе исследуются акустические свойства (поглощение и рассеяние звука) одной из новых дискретных периодических поверхностных структур, которые, при определенном выборе структурных параметров, являются экстремальными, т.е. предельно достижимыми. Волновые размеры ячейки периодичности структуры предполагаются малыми, поэтому она рассматривается также как тонкое покрытие из материала с микроструктурой. Произвольное тело с таким покрытием может в принципе стать акустически невидимым или поглощать максимум энергии падающего поля.

Предложенная структура и метод исследования ее свойств основаны на недавно созданной импедансной теории поглощения и рассеяния звука [1, 2]. В рамках этой теории впервые были аналитически определены предельно возможные значения для энергии поглощения и рассеяния звука пассивными линейно-упругими телами. Были получены в явном виде поверхностные импедансы, которыми должны обладать идеально прозрачное (нерассеивающее) тело, наилучший поглотитель, т.е. тело, которое среди всех возможных линейно-упругих тел данной геометрии поглощает максимум энергии падающего поля, и другие тела с экстремальными свойствами. Как показали расчеты, эффективность таких "идеальных" тел значительно выше, чем у существующих средств поглощения и нерассеяния. Так, сечение поглощения наилучшего поглотителя на несколько порядков превышает сечение лучших известных поглощающих материалов и устройств. Причина такой разницы в том, что идеальные тела обладают глобальной поверхностной реакцией, в то время как существующие средства являются в основном локально реагирующими.

Отличительной особенностью предложенного покрытия, названного авторами покрытием с протяженной реакцией, является введение определенного вида связности между соседними элементами, что придает реакции покрытия на внешнее воздействие нелокальный характер. И хотя оно является лишь приближением к идеальным телам, обладающим глобальной реакцией и экстремальными свойствами, его эффективность, как показано далее, заметно превышает эффективность существующих материалов и устройств.

Ниже кратко излагаются основные положения импедансной теории поглощения и рассеяния звука, приводятся поверхностные импедансы тел с экстремальными поглощающими и нерассеивающими свойствами. Затем дается описание схемы покрытия с протяженной реакцией, приводятся некоторые результаты расчета его эффективности. Статья написана по материалам доклада, прочитанного на Первой Всероссийской конференции "Проблемы механики и акустики сред с микро- и наноструктурой: НАНОМЕХ – 2009" (21–23 сентября 2009, г. Нижний Новгород, РФ).

Рассмотрим помещенный в среду поглотитель или рассеиватель в виде линейно-упругого тела, имеющего конечный объем V и внешнюю замкнутую поверхность A произвольной геомет-

рии. Предполагается, что среда и тело описываются линейными уравнениями, среда может быть неоднородной и ограниченной. Исследование ограничено гармоническими колебаниями, и множитель $\exp(-i\omega t)$ всюду опущен.

В среде имеются некоторые источники, создающие в отсутствие тела звуковое поле с комплексными амплитудами давления $p_i(x)$, которое называется падающим полем, x – это координаты произвольной точки поля. Присутствие тела искажает падающее поле на величину $p_s(x)$, которая называется рассеянным полем, так что полное поле в среде представляется в виде суммы этих двух компонент $p(x) = p_i(x) + p_s(x)$. Задача рассеяния и поглощения состоит в нахождении оператора, связывающего рассеянную компоненту поля с падающей компонентой, считающейся известной в последующем вычислении требуемых характеристик поля.

Идея импедансного подхода состоит в следующем. Поверхность A разбивается на N участков малых волновых размеров, на которых давление и нормальную скорость можно считать постоянными и их непрерывные распределения на A можно заменить N-векторами. Они обозначены как p, p_i, p_s и v, v_i, v_s. Связь между векторами давления и скорости записываются с помощью импедансных $N \times N$-матриц. Для решения задачи рассеяния и поглощения требуются три импедансные матрицы. Одна матрица Z характеризует колебания тела в вакууме: она связывает силы, приложенные к участкам поверхности, со скоростями отклика этих участков. Две другие матрицы, Z_i и Z_r, характеризуют среду: матрица Z_i описывает колебания объема V, заполненного средой, а матрица импедансов излучения Z_r описывает колебания среды во внешности A. Вводя далее матрицы рассеяния, Q и S, которые связывают скорость и давление рассеянного поля на A со скоростью и давлением падающего поля на A

$$v_s = Qv_i, \quad p_s = Sp_i, \tag{1}$$

можно получить искомое решение задачи рассеяния в виде

$$Q = (Z_r + Z)^{-1}(Z_i - Z), \quad S = (Y_r + Y)^{-1}(Y_i - Y), \tag{2}$$

где матрица подвижностей Y_k является обратной к матрице импедансов Z_k, $k = \varnothing, i, r$. Формулы (2) по форме записи и по физическому смыслу совпадают с известными формулами Френеля для отражения плоских волн от плоских границ и могут поэтому рассматриваться как обобщение теории Френеля на случай тел произвольной геометрии.

Средняя по времени мощность звука Ф, поглощенного телом, и средняя мощность рассеяния F записываются как

$$\Phi = -\frac{1}{2}\mathrm{Re}(v^*p) = \frac{1}{2}v_i^*(I + Q^*)R(I + Q)v_i, \tag{3}$$

$$F = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(v_S^*p_S) = \frac{1}{2}v_i^*Q^*R_rQv_i\ , \tag{4}$$

где R_r – это матрица сопротивлений излучения, $R = \mathrm{Re}(Z)$, I – единичная матрица.

Импедансный подход оказался очень удобным инструментом для решения ряда нерешенных задач теории поглощения и рассеяния, и особенно вариационных задач для тел с экстремальными акустическими свойствами. Одна из них, задача о наилучшем поглотителе, формулируется так: найти импедансную матрицу $Z = R + iX$, которая доставляет максимум мощности поглощения (3). Можно показать [1], что мощность (3) имеет единственное стационарное значение, когда импедансная матрица тела равна эрмитово сопряженной матрице излучения

$$Z = Z_r^* \text{ или } R = R_r, \ X = -X_r. \tag{5}$$

Максимальное значение поглощенной мощности равно

$$\Phi_{\max} = \frac{1}{8}p_i^*(I + Y_i^*Z_r^*)R_r^{-1}(I + Z_rY_i)p_i. \tag{6}$$

Тело с поверхностными импедансами (5) и есть наилучший поглотитель, который среди всех тел той же геометрии поглощает максимум энергии падающего поля. Этот максимум может на много порядков превышать энергию поглощения обычно применяемых поглощающих материалов [3]. Например, наилучший поглотитель в форме небольшой пульсирующей сферы имеет на частотах $ka \sim 0.01$ относительное сечение поглощения порядка 10^4, в то время как шар тех же размеров из пористого или другого поглощающего материала имеет в лучшем случае сечение 4, а черное тело этих размеров имеет сечение 1. Для тел с большим числом колебательных степеней свободы разница еще больше, так что имеются практически неограниченные возможности для конструирования поглощающих материалов повышенного качества.

Еще одна вариационная задача, сформулированная и решенная в рамках импедансного метода [1], состоит в следующем: найти такую импедансную матрицу Z, которая доставляет максимум мощности поглощения (3), если мощность рассеяния (4) принимает некоторое фиксированное значение. Решение этой задачи показывает, что максимальное значение мощности поглощения связано с фиксированным значением мощности рассеяния посредством следующего простого уравнения

$$\varphi = 2\sqrt{f} - f, \tag{7}$$

где $\varphi = \Phi/\Phi_{max}$, $f = F_0/\Phi_{max}$, а Φ_{max} – это значение абсолютного максимума мощности поглощения (6).

Одним из следствий этого решения является существование конечной области допустимых значений для мощностей поглощения и рассеяния пассивных линейно-упругих тел. На рис. 1 эта область изображена на (f, φ)-плоскости. Нижней границей области является ось f, а верхней – кривая (7). Каждая точка области соответствует телу с определенной матрицей поверхностных импедансов. График на рис. 1 универсален: он применим на всех частотах ко всем пассивным телам любой геометрии, все индивидуальные особенности конкретных тел и падающих полей заключены в нормирующем множителе (6). График полезен при конструировании поглотителей и рассеивателей звука с заданными свойствами.

Так, если требуется построить эффективный поглотитель, естественно делать его в виде наилучшего поглотителя с импедансной матрицей (5), которая соответствует точке (1, 1) области на рис. 1 или тела, соответствующего одной из близлежащих точек. Если требуется эффективный рассеиватель, его можно найти вблизи точки (4, 0). Если необходимо спроектировать неотражающее или нерассеивающее покрытие, его следует искать в окрестности начала координат. Здесь располагаются черное тело (идеальное тело, не дающее отражения назад), а также идеально прозрачное (нерассеивающее) тело, для которого матрица поверхностных импедансов равна

$$Z = Z_i. \tag{8}$$

Из (2) видно, что рассеянное поле такого тела тождественно равно нулю во всем пространстве независимо от падающего поля.

Наиболее важным физическим свойством наилучшего поглотителя и нерассеивающего тела является глобальная реакция их поверхностей. Свойство следует из того, что конечный объем, заполненный газом или жидкостью без потерь, представляет собой высокодобротную колебательную систему. Отклик такой системы на точечное поверхностное воздействие заметно не только в точке возбуждения (как у локально реагирующих поверхностей), но и во всех других точках объема. То же можно сказать и о жидкости или газе во внешности поверхности A. Таким образом, импедансные матрицы Z_r и Z_i в уравнениях (5) и (8) являются полностью заполненными. Это также означает, что для того, чтобы покрытие имело такую импедансную матрицу, каждый его элемент должен быть связан со всеми остальными элементами. Такое покрытие, очевидно, является слишком сложным для практической реализации. В предложенном авторами покрытии с протяженной реакцией [2] связанными являются только

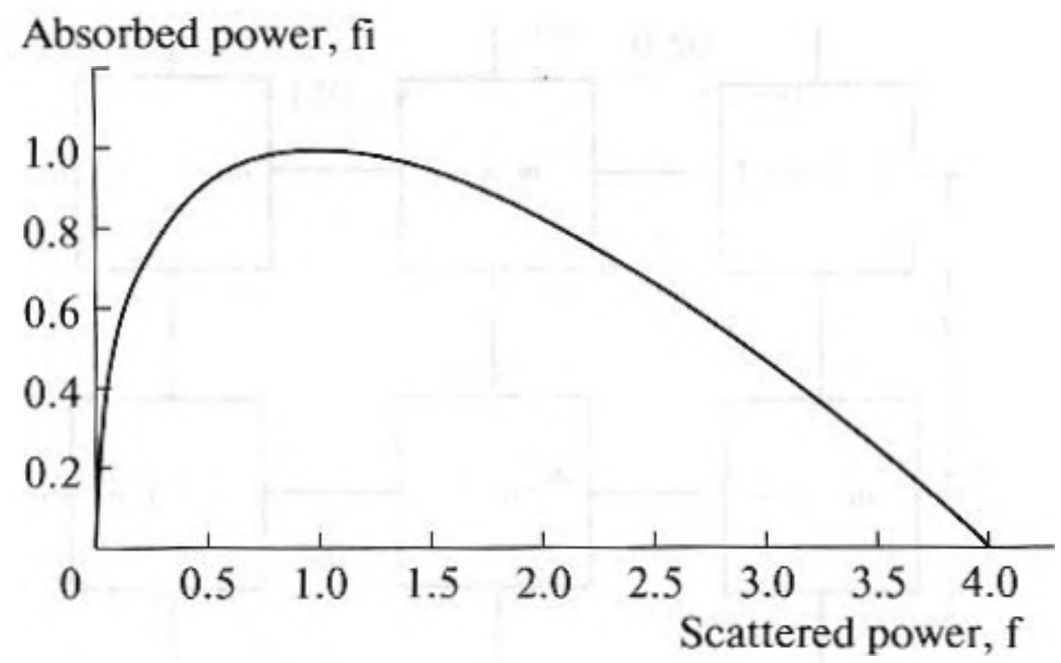

Рис. 1. Область допустимых значений мощностей рассеяния и поглощения для произвольного пассивного линейно-упругого тела.

соседние элементы. Это делает его практически вполне реализуемым, а его эффективность, хотя и не предельной, но значительно выше, чем у обычно применяемых покрытий.

Схема одного из простых вариантов покрытия с протяженной реакцией представлена на рис. 2. Это двумерная двояко периодическая структура, составленная их идентичных элементов (ячеек) малых волновых размеров. Отдельная ячейка характеризуется импедансом Z_1. В изображенном покрытии каждая ячейка связана с четырьмя ближайшими соседними ячейками (по две в каждом направлении). Эта связность также характеризуется импедансным параметром: сила взаимодействия пропорциональна разности нормальных скоростей соседних ячеек с коэффициентом пропорциональности Z_2. В более сложных вариантах покрытий связь импедансного типа может быть введена также между вторыми, третьими и т.д. соседями.

Вынужденные колебания рассматриваемой структуры под действием падающего поля описывается системой уравнений в конечных разностях. Но так как размер l ячейки периодичности предполагается малым по сравнению с длиной волны, удобно перейти от конечноразностных уравнений к непрерывному уравнению в частных производных. Для покрытия на рис. 2 оно записывается как

$$z_1 v(\xi_1, \xi_2) - Z_2 \Delta v(\xi_1, \xi_2) = q(\xi_1, \xi_2), \tag{9}$$

где ξ_1, ξ_2 – поверхностные декартовы координаты, v – нормальная компонента скорости покрытия, q – поверхностная плотность внешних сил (давление), Δ – оператор Лапласа, $z_1 = Z_1/l^2$. Это уравнение второго порядка с двумя импедансными структурными параметрами Z_1 и Z_2, значения которых должны быть выбраны из условия близости поверхностного импеданса, получаемого из уравнения (9), к импедансам идеального тела, (5)

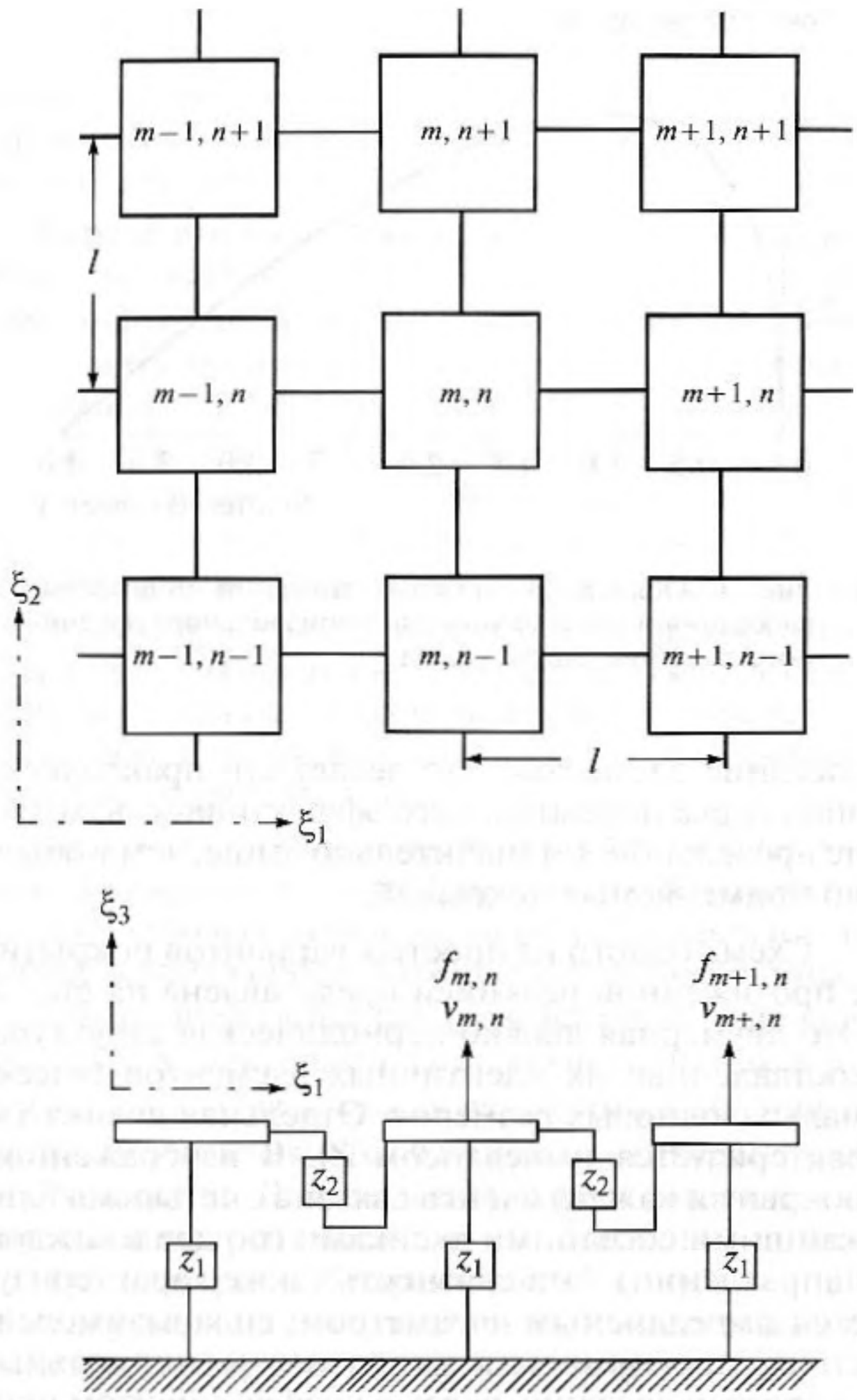

Рис. 2. Схема покрытия с протяженной реакцией.

или (8). Для более сложных вариантов покрытия (с большей связностью) непрерывные уравнения типа (9) являются уравнениями четвертого, шестого и т.д. порядка по пространственным координатам. Они содержат большее число структурных импедансных параметров, которые обеспечивают более точное приближение к предельным характеристикам (5) и (8).

Приведем примеры работы покрытия с протяженной реакцией.

На рис. 3 представлены кривые зависимости модуля коэффициента отражения плоской звуковой волны от угла ее падения на плоскую границу с покрытием. Кривая *1* соответствует так называемому согласованному локальному покрытию, имеющему поверхностный импеданс ρc, и которое считается лучшим из существующих поглощающих и неотражающих покрытий. Кривая *2* на рис. 3 соответствует покрытию с протяженной реакцией, изображенному на рис. 2. Его эффектив-

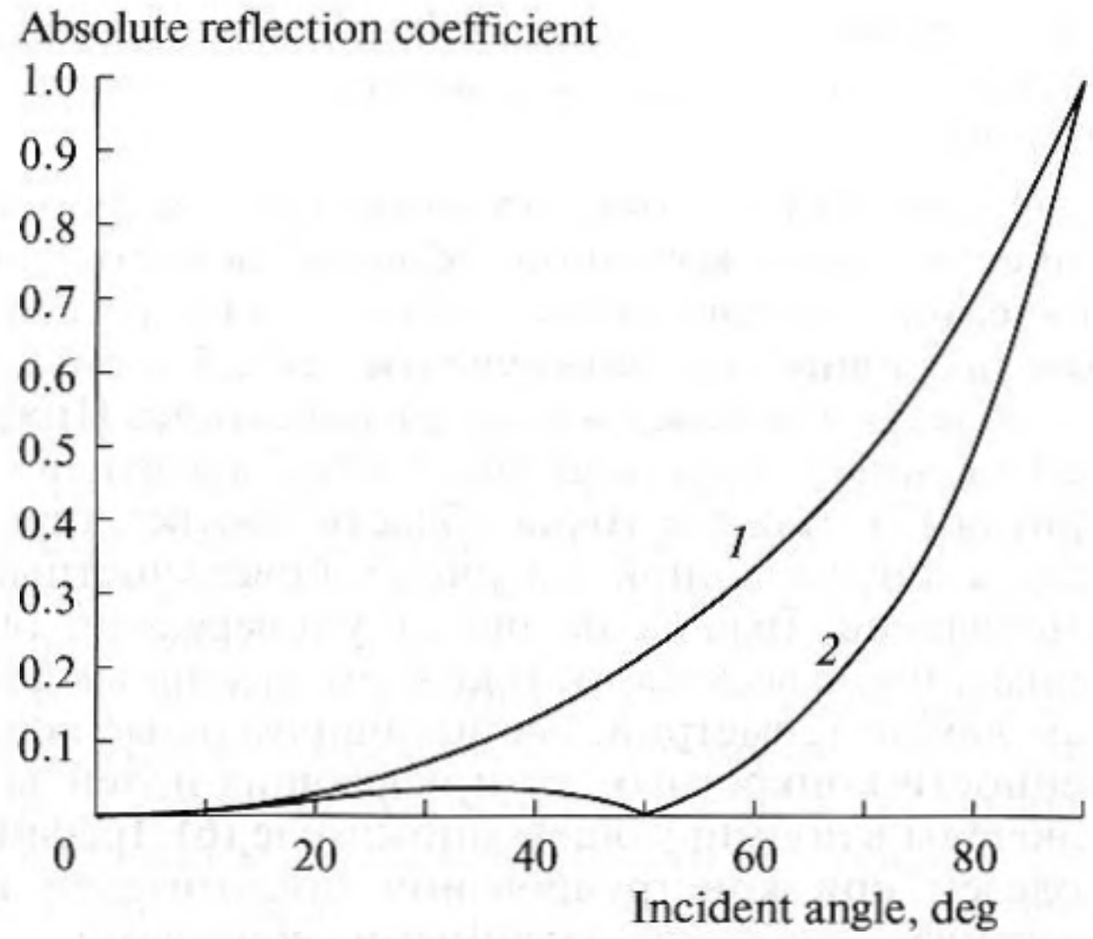

Рис. 3. Коэффициент отражения как функция угла падения плоской волны на плоскую границу с согласованным локальным покрытием (*1*) и с покрытием с протяженной реакцией (*2*).

ность очевидно выше, чем у согласованного покрытия: оно поглощает более 97% энергии падающего на него диффузного звукового поля, в то время как согласованное покрытие поглощает 91%.

Рисунок 4 демонстрирует эффективность нерассеивающего покрытия с протяженной реакцией в случае тела цилиндрической геометрии. На нем изображены кривые частотной зависимости нормированного сечения рассеяния для трех цилиндрических тел. Кривая *1* соответствует твердому цилиндру. Кривая *2* рассчитана для цилиндра с согласованным локальным покрытием, а кривая *3* соответствует покрытию с протяженной реакций (рис. 2), в котором значения двух структурных импедансных параметров выбраны из условия минимума рассеянной мощности (4). Из рис. 4 видно, что даже простейший вариант, в котором связаны только первые соседи, более эффективен, чем другие покрытия: цилиндр становится практически нерассеивающим в низкочастотном диапазоне ($ka < 1$), где a – радиус цилиндра, и имеет небольшое сечение рассеяния на средних частотах ($ka < 4$). На рис. 5 сплошной кривой представлена диаграмма направленности рассеянного поля цилиндра с покрытием на частоте $ka = 1$. Для сравнения пунктирной линией нанесена диаграмма направленности рассеяния для твердого цилиндра. Мощность звука, рассеянного цилиндром с покрытием на этой частоте равна 2% мощности рассеяния твердым цилиндром, а на частотах ниже $ka = 0.7$ она составляет менее одного процента от мощности рассеяния твердым цилиндром, а также цилиндрическим телом с согласованным покрытием.

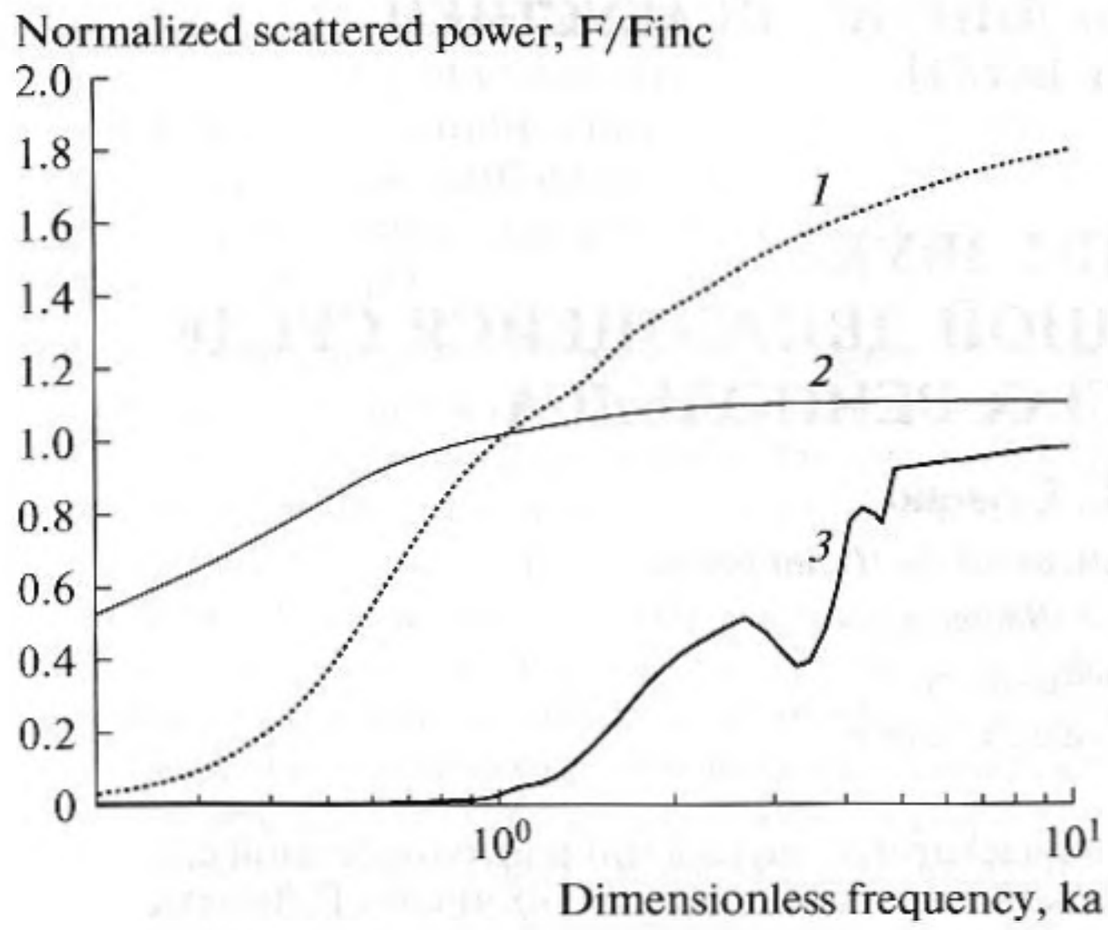

Рис. 4. Сечение рассеяния твердого цилиндра (*1*), цилиндра с согласованным локальным покрытием (*2*), цилиндра с покрытием с протяженной реакцией (*3*).

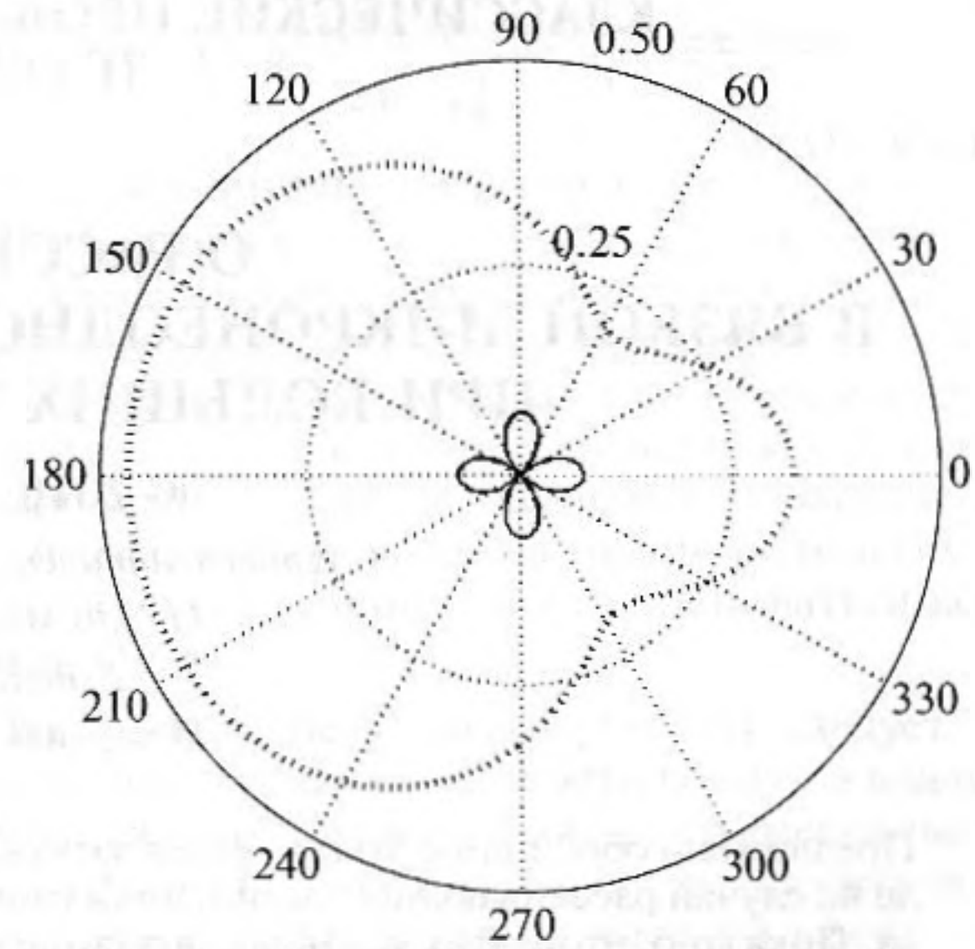

Рис. 5. Диаграммы направленности рассеянного поля твердого цилиндра (пунктир) и цилиндра с покрытием с протяженной реакцией (сплошная линия) на частоте $ka = 1$.

При увеличении количества связей в покрытии с протяженной реакцией частотный диапазон нерассеяния расширяется. В пределе, когда каждая пара ячеек связаны, и покрытие является глобально реагирующим, цилиндр становится абсолютно прозрачным и, следовательно, невидимым для внешних источников во всем частотном диапазоне.

Таким образом, на основе импедансной теории аналитически определены предельные возможности поглощения и рассеяния звука пассивными линейно-упругими телами. В явном виде получены поверхностные импедансные характеристики идеально прозрачного тела, наилучшего поглотителя и других тел с экстремальными акустическими свойствами. Предложена поверхностная периодическая структура, состоящая из дискретных механических элементов малых волновых размеров – покрытие с протяженной реакцией, которая с заданной степенью приближения реализует эти свойства. Компьютерные расчеты показали, что даже самые простые варианты предложенного покрытия значительно превосходят по эффективности лучшие из известных поглощающих и не рассеивающих покрытий и средств.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 09-02-01217.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бобровницкий Ю.И.* Импедансная теория рассеяния и поглощения звука // Акуст. журн. 2007. Т. 53. № 1. С. 113–118.
2. *Бобровницкий Ю.И.* Нерассеивающее покрытие для цилиндра // Акуст. журн. 2008. Т. 54. № 6. С. 879–889.
3. *Цвиккер К., Костен К.* Звукопоглощающие материалы. М.: ИЛ, 1952. 160 с.