АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2010, том 56, № 2, с. 172–178

НЕЛИНЕЙНАЯ АКУСТИКА

УДК 537.548

НЕЛИНЕЙНОСТЬ ТВЕРДЫХ ТЕЛ С МИКРО- И НАНОМАСШТАБНЫМИ ДЕФЕКТАМИ И ОСОБЕННОСТИ ЕЕ МАКРОСКОПИЧЕСКИХ ПРОЯВЛЕНИЙ

© 2010 г. О. В. Руденко, А. И. Коробов, М. Ю. Изосимова

Физический факультет Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, 119991 Москва, Ленинские горы

E-mail: akor@acs465a.phys.msu.ru

Поступила в редакцию 30.06.09 г

Обсужден смысл измеряемых в эксперименте нелинейных параметров среды. Подчеркнут различный смысл локальной нелинейности, измеряемой в окрестности дефекта и зависящей от размеров области усреднения, и эффективной объемной нелинейности среды, содержащей множество дефектов. Рассчитана локальная нелинейность при вершине трещины, убывающая с увеличением области, излучающей вторую гармонику. Рассчитана объемная нелинейность твердого тела, содержащего сферические полости. Рассчитана объемная нелинейность среды, содержащая бесконечно тонкие трещины в виде круглых дисков, принимающих при раскрытии эллипсоидальную форму. В расчетах нелинейного акустического параметра использованы классические точные результаты теории трещин.

Установлено, что дефекты надмолекулярной структуры твердых тел приводят к появлению так называемой структурной нелинейности, которая может на 2–3 порядка превышать обычные нелинейности – физическую и геометрическую [1–5]. Однако до сих пор нет общепринятого определения количественных характеристик структурной нелинейности, таких, каким является нелинейный акустический параметр для бегущих волн [6, 7]. Многочисленные эксперименты указывают лишь на тенденцию, не позволяя сравнивать результаты количественно. Однако понимание того, что измеряется в том или ином эксперименте, может создать основу для интерпретации количественных данных, необходимых, в первую очередь, для нелинейной акустической диагностики. Ниже изложена точка зрения авторов относительно путей решения этой проблемы.

Описания надмолекулярных объектов, обнаруживающих нелинейное поведение, приведены во многих статьях и обзорах (смотри, например, [1–5, 8]). Для конкретности ограничимся здесь рассмотрением твердотельной среды, содержащей дефекты в виде трещин. Известно, что острый край трещины является концентратором напряжений [9]. Если вдали от трещины механическое напряжение равно τ, то вблизи края оно порядка [10]

$$\tau_* = \tau(1+G), \quad G = 2\sqrt{l/r_0}. \tag{1}$$

Здесь $2l$ – длина трещины, r_0 – радиус кривизны ее края. Если длина трещины 1 мм, а радиус кривизны – 1 нм (порядка нескольких межатомных расстояний), то коэффициент усиления $G \sim 10^3$. Это означает, что сравнительно слабые акустические колебания $\sigma(t)$ в окрестности трещины могут усилиться настолько, что нелинейные эффекты, описываемые функцией $\tau_*(t)$ (это, прежде всего, генерация высших гармоник) станут весьма заметными. Поскольку напряжения при удалении от вершины уменьшаются от значения $\tau_*(t)$ до значения $\tau(t)$, соответствующего однородной среде т.е. коэффициент G убывает, проявления нелинейных свойств также будут ослабевать. Это означает, что количественная характеристика нелинейности в присутствии одной трещины должна зависеть от координат. Однако локальные измерения на масштабах порядка нанометров можно провести лишь на поверхности – с помощью туннельных или атомных силовых микроскопов. В объеме среды, где находится трещина, это сделать очень сложно. Поэтому нужно понять, к каким макроскопическим проявлениям, наблюдаемым в ультразвуковых экспериментах, может привести нелинейность, рожденная нано- и микронеоднородностями среды.

Пусть зависимость напряжения τ от деформации e описывается функцией

$$\frac{\tau}{\tau_0} = \Phi\left(\frac{e}{e_0}\right), \tag{2}$$

имеющей линейный участок при малых e/e_0, который отвечает закону Гука. В реальных средах

обычно следует учесть наследственные свойства, релаксацию и гистерезис [1–2], однако для простоты зависимость (2) здесь считается алгебраической. Константы τ_0, e_0 соответствуют характерным значениям напряжения и деформации в зависимости (2) и служат для нормировки. Из формулы (2) следует

$$\frac{\tau_*}{\tau_0} = \frac{\tau}{\tau_0}(1+G) = \Phi\left(\frac{e_*}{e_0}\right), \quad \frac{e_*}{e_0} = \Phi^{-1}\left[\frac{\tau}{\tau_0}(1+G)\right].$$

Считая, что напряжение вдали от трещины мало и лежит на линейном участке кривой (2), придем к формуле

$$\frac{e_*}{e_0} = \Phi^{-1}\left[\frac{E}{\tau_0}(1+G)\cdot e\right], \tag{3}$$

где E – модуль Юнга. Формула (3) дает нелинейную зависимость деформации e_* вблизи трещины от деформации e вдали от нее.

Для проведения расчетов и оценок конкретизируем зависимость (2) с помощью функции $\Phi(x) = \ln(1+x)$, $\Phi^{-1}(x) = \exp(x) - 1$, в общих чертах правильно описывающей тенденции в поведении нелинейных свойств. При этом формула (3) приобретает вид

$$\frac{e_*}{e_0} = \exp\left[\frac{E}{\tau_0}(1+G)\cdot e\right] - 1. \tag{4}$$

Пусть деформация, вызванная акустической волной, вдали от трещины изменяется во времени по гармоническому закону $e = A_1\cos(\omega t)$. Тогда выражение (4) удается разложить в ряд по гармоникам:

$$\frac{e_*}{e_0} = I_0\left[\frac{E}{\tau_0}(1+G)\cdot A_1\right] - 1 + \\ +2\sum_{n=1}^{\infty} I_n\left[\frac{E}{\tau_0}(1+G)\cdot A_1\right]\cos(n\omega t).$$

Здесь I_n – модифицированные функции Бесселя. Амплитуда второй гармоники, наиболее часто измеряемая в экспериментах, равна

$$\frac{A_2}{e_0} = 2I_2\left[\frac{E}{\tau_0}(1+G)\cdot A_1\right]. \tag{5}$$

Для слабой нелинейности, когда аргумент функции Бесселя в формуле (5) мал, справедлива приближенная формула

$$\frac{A_2}{e_0} = \left[\frac{E}{2\tau_0}(1+G)\cdot A_1\right]^2. \tag{6}$$

Логично определить нелинейный параметр локальной нелинейности ε_0, рассмотрев зависимость (6) вдали от трещины, где $G = 0$. При этом

$$\varepsilon_0 = \frac{4A_2}{A_1^2} = \frac{e_0}{\tau_0^2}E^2. \tag{7}$$

Коэффициент концентрации напряжений зависит от координат. Совместим ось цилиндрической системы координат с линией фронта трещины, а зависимостью от полярного угла при качественном анализе пренебрежем. При этом [10]

$$G = 2\sqrt{l/r}, \tag{8}$$

где $r > r_0$ – радиальная координата. Поскольку измерение гармоники проводят датчиком конечных размеров, получают обычно усредненные данные

$$\frac{\overline{A_2}}{e_0} = \left(\frac{EA_1}{2\tau_0}\right)^2\overline{(1+G)^2}. \tag{9}$$

Вычислим среднее по некоторому объему с характерным размером R, обозначенное в (9) чертой сверху:

$$\overline{(1+G)^2} = \frac{2}{R^2 - r_0^2}\int_{r_0}^{R}\left(1 + 2\sqrt{\frac{l}{r}}\right)^2 r\,dr. \tag{10}$$

Подставляя (10) в (9), найдем выражение для нелинейного параметра, определенного формулой (7):

$$\varepsilon = \varepsilon_0\left[1 + \frac{16}{3}\sqrt{l}\frac{R + \sqrt{Rr_0} + r_0}{(R+r_0)\left(\sqrt{R} + \sqrt{r_0}\right)} + \frac{8l}{R+r_0}\right]. \tag{11}$$

Как видно, величина нелинейности зависит от размера области усреднения, производимого при измерении амплитуды второй гармоники. Если этот размер минимален, $R = r_0$, из (11) получается максимальное значение

$$\varepsilon = \varepsilon_0\left(1 + 2\sqrt{\frac{l}{r_0}}\right)^2.$$

Вдали от вершины трещины, при $R \gg r_0$, величина нелинейного параметра ε (11) с ростом расстояния R уменьшается и стремится к ε_0 (7).

Измерения высокой локальной нелинейности в окрестности одиночной трещины проведены в работах [11, 12].

Другая ситуация возникает в том случае, когда в образце имеется много трещин и нужно оценить их суммарный вклад в увеличение нелинейности среды. Очевидно, при этом нужно найти амплитуду второй гармоники, излучаемой всеми тре-

щинами в единице объема среды. Иными словами, нужно проинтегрировать выражение (9) по объему, малому по сравнению с длиной волны, и отнести к величине этого объема:

$$\frac{A_2}{e_0} = \left(\frac{EA_1}{2\tau_0}\right)^2 \frac{1}{V}\int(1+G)^2\,dV. \qquad (12)$$

Когда трещин нет и $G = 0$, из формулы (12) получается прежнее выражение (7) для нелинейного параметра ε_0 однородной среды. При наличии ансамбля трещин

$$\varepsilon = \frac{4A_2}{A_1^2} = \varepsilon_0\left(1 + n\int\left(2G + G^2\right)dv\right). \qquad (13)$$

В формуле (13) n – число трещин в единице объема, а интегрирование ведется по области пространства, в которой возникают напряжения от одной трещины. Предполагается, что трещин не очень много и они слабо влияют друг на друга.

Трудности предложенного подхода состоят в том, что известные координатные зависимости коэффициента концентрации напряжений типа (8) справедливы лишь вблизи трещины. При подстановке этих зависимостей в формулу (13) получаются расходящиеся интегралы. Тем не менее, известен один пример, для которого описанная выше схема расчета может быть реализована полностью. Этот случай соответствует полостям сферической формы. Разумеется, концентрация напряжений вблизи сферической полости гораздо меньше, чем вблизи трещины с острым краем, но полученный для сфер результат иллюстрирует идею и может послужить основой для качественных обобщений.

Итак, в основе дальнейших расчетов лежит решение задачи о напряжениях, возникающих в твердом теле при наличии в ней сферической полости (рис. 1). Считаем, что вдали от полости напряжение есть τ_{ik}^0, а полное напряжение в присутствии полости равно τ_{ik}. Вектор $\vec{n}$ направлен из центра сферы в точку наблюдения, r_0 – радиус сферы, σ – коэффициент Пуассона окружающей среды. Решение задачи, полученное Р. Саусвеллом (R. Southwell) и Дж. Гудьером (J. Goodier) и частично отраженное в книгах [13, 14], имеет довольно громоздкий вид:

$$\begin{aligned}\tau_{ik} = {} & \left(\tau_{ik}^0 - \frac{1}{3}\tau_{ll}^0\delta_{ik}\right)\left[1 + \frac{5(1-2\sigma)}{7-5\sigma}\left(\frac{r_0}{r}\right)^3 + \frac{3}{7-5\sigma}\left(\frac{r_0}{r}\right)^5\right] + \\ & + \left(\tau_{il}^0 n_k n_l + \tau_{kl}^0 n_i n_l - \frac{2}{3}\tau_{ll}^0 n_i n_k\right)\frac{15}{7-5\sigma}\left(\frac{r_0}{r}\right)^3\left[\sigma - \left(\frac{r_0}{r}\right)^2\right] + \\ & + \left(\tau_{lm}^0 n_l n_m n_i n_k - \frac{1}{3}\tau_{ll}^0 n_i n_k\right)\frac{15}{2(7-5\sigma)}\left(\frac{r_0}{r}\right)^3\left[-5 + 7\left(\frac{r_0}{r}\right)^2\right] + \\ & + \left(\tau_{lm}^0 n_l n_m \delta_{ik} - \frac{1}{3}\tau_{ll}^0\delta_{ik}\right)\frac{15}{2(7-5\sigma)}\left(\frac{r_0}{r}\right)^3\left[1 - 2\sigma - \left(\frac{r_0}{r}\right)^2\right] + \\ & + \frac{1}{3}\tau_{ll}^0\left[\delta_{ik} + \frac{1}{2}\left(\frac{r_0}{r}\right)^3(\delta_{ik} - 3n_i n_k)\right].\end{aligned} \qquad (14)$$

Пусть среда подвергается однородной деформации, как показано на рис. 1, и вдали от полости отлична от нуля только одна компонента тензора деформации τ_{zz}^0. Тогда, полагая $i = k = z$, $n_z = \cos\theta$, на поверхности сферы $r = r_0$ имеем

$$\tau_{zz} = \frac{15}{7-5\sigma}\tau_{zz}^0\sin^2\theta\left[\sin^2\theta - \frac{1+5\sigma}{10}\right]. \qquad (15)$$

Видно, что напряжение на сфере равно нулю вдоль направления приложения силы – оси z, т.е. при $\theta = 0$, и максимально в поперечном направлении. При $\theta = \pi/2$ оно равно

$$\tau_{zz} = \frac{3(9-5\sigma)}{2(7-5\sigma)}\tau_{zz}^0. \qquad (16)$$

Формула (16) совпадает с результатом, приведенным в книге [14] (см. последнюю формулу задачи 12, §7). Распределение напряжений (15) в зависимости от азимутального угла показано на рис. 1, где области большего напряжения соответствует более светлая область контурного графика. Усиление напряжений, согласно (16), для сферической полости невелико; например, для меди ($\sigma = 0.35$) $\tau_{zz}/\tau_{zz}^0 \approx 2.1$. Оно значительно меньше, чем для трещины с острым краем (1).

Для произвольных расстояний от центра сферы из решения (14) следует:

$$\frac{\tau_{zz}}{\tau_{zz}^0} = 1 + G, \qquad (17)$$

$$\begin{aligned}G = {} & \frac{(4-5\sigma) + 3(11+5\sigma)\cos^2\theta - 75\cos^4\theta}{2(7-5\sigma)}\left(\frac{r_0}{r}\right)^3 + \\ & + \frac{3\left(3 - 30\cos^2\theta + 35\cos^4\theta\right)}{2(7-5\sigma)}\left(\frac{r_0}{r}\right)^5.\end{aligned} \qquad (18)$$

Вычисление объемного интеграла

$$\int G\,dv = 2\pi\int_0^\pi \sin\theta\,d\theta\int_{r_0}^\infty G(r,\theta)r^2\,dr \qquad (19)$$

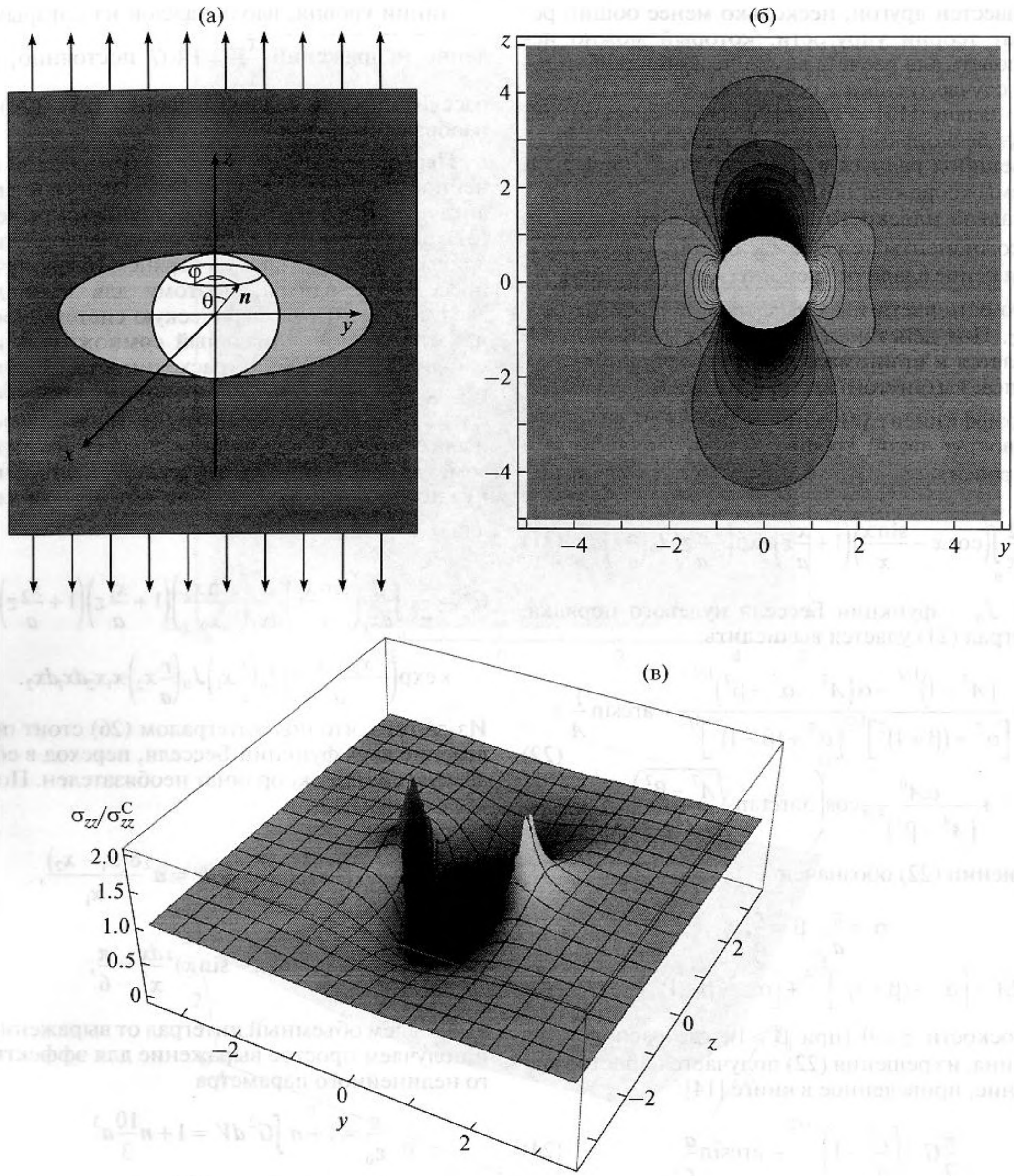

Рис. 1. Полость и привязанные к ней сферические координаты (а). Контурный график распределения напряжений в плоскости YZ (б). Шаг дискретизации – 0.074. Более светлые участки иллюстрируют распределение увеличенных напряжений на поверхности сферы. 3D – график распределения напряжений в плоскости YZ (в).

от функции G, заданной формулой (18), дает ноль. Таким образом, лишь интеграл типа (19) от G^2 дает вклад в усиление нелинейности по формуле (13). Расчет приводит к следующему результату:

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = 1 + n\int G^2 d\nu = 1 + n\nu_0 \frac{807 - 730\sigma + 175\sigma^2}{35(7 - 5\sigma)^2}. \quad (20)$$

Здесь $\nu_0 = 4\pi r_0^3/3$ – объем одной сферической полости, $n\nu_0$ – доля объема среды, занимаемого сферическими полостями. Коэффициент в слагаемом, пропорциональном $n\nu_0$, например, для меди равен примерно 0.6, что свидетельствует о малом росте нелинейности среды со сферическими полостями по сравнению с однородной средой.

Известен другой, несколько менее общий результат теории упругости, который можно использовать для расчета акустической нелинейности в случае трещин с острым краем. Удалось решить задачу [15] о распределении напряжений вокруг бесконечно тонкой дискообразной в плане трещины радиуса a. Начало цилиндрической системы координат помещено в центр диска. Ось z нормальна плоскости диска. Решение получено для компоненты тензора τ_{zz} и для случая, когда напряжение вдали от трещины имеет компоненту τ_{zz}^0, то есть растягивающая сила действует вдоль оси z. Под действием растяжения трещина раскрывается и принимает в осевом сечении форму эллипса, вытянутого вдоль координаты r.

Коэффициент усиления G (см. (17)) напряжений вокруг такой трещины, согласно [15], при $z \geq 0$ равен

$$G = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left(\cos x - \frac{\sin x}{x}\right)\left(1 + \frac{x}{a}z\right)\exp\left(-\frac{x}{a}z\right)J_0\left(\frac{x}{a}r\right)dx. \quad (21)$$

Здесь J_0 – функция Бесселя нулевого порядка. Интеграл (21) удается вычислить:

$$\frac{\pi}{2}G = \frac{\left(A^2-1\right)^{1/2} - \alpha\left(A^2-\alpha^2-\beta^2\right)^{1/2}}{\left[\alpha^2+(\beta+1)^2\right]^{1/2}\left[\alpha^2+(\beta-1)^2\right]^{1/2}} - \arcsin\frac{1}{A} + \frac{\alpha A^6}{\left(A^4-\beta^2\right)^{3/2}}\cos\left(3\arctan\frac{\sqrt{A^2-\beta^2}}{A\sqrt{A^2-1}}\right). \quad (22)$$

В решении (22) обозначено:

$$\alpha = \frac{z}{a}, \quad \beta = \frac{r}{a},$$
$$2A = \left[\alpha^2+(\beta+1)^2\right]^{1/2} + \left[\alpha^2+(\beta-1)^2\right]^{1/2}. \quad (23)$$

В плоскости $z = 0$ (при $|\beta| > 1$), где расположена трещина, из решения (22) получается простое выражение, приведенное в книге [14]:

$$\frac{\pi}{2}G = \left(\frac{r^2}{a^2}-1\right)^{-1/2} - \arcsin\frac{a}{r}. \quad (24)$$

В точке $r = a$, $z = 0$, как следует из формулы (24), напряжение обращается в бесконечность. Полагая в (24) $r = a + r_0$, где r_0 – минимальный радиус кривизны края трещины, получим формулу для максимального усиления напряжений вблизи края:

$$G = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2a}{r_0}}. \quad (25)$$

Формула (25) с точностью до обозначений и численного коэффициента совпадает с общей формулой (1).

Линии уровня, вдоль каждой из которых усиление напряжений $\frac{\tau_{zz}}{\tau_{zz}^0} = 1 + G$ постоянно, были рассчитаны с помощью решения (22)–(24); они изображены на рис. 2.

Перейдем теперь к расчету акустической нелинейности по формуле (13). Вначале нужно вычислить интеграл по объему от G, пользуясь решением (21). Заметим, что интеграл по радиальной цилиндрической координате на верхнем (бесконечном) пределе расходится, поэтому для вычисления следует перейти в сферическую систему координат, где экспоненциальный сомножитель в (21) устраняет указанную расходимость. Вычисляя после этого интеграл по полярному углу, убеждаемся, что интеграл по объему от G равен нулю, как и для сферической полости (18), (19). Таким образом, для расчета акустической нелинейности нужно проинтегрировать по объему выражение для G^2:

$$G^2 = \frac{4}{\pi^2}\int_0^\infty \frac{d}{dx_1}\left(\frac{\sin x_1}{x_1}\right)\frac{d}{dx_2}\left(\frac{\sin x_2}{x_2}\right)\left(1+\frac{x_1}{a}z\right)\left(1+\frac{x_2}{a}z\right)\times \exp\left(-\frac{x_1+x_2}{a}z\right)J_0\left(\frac{r}{a}x_1\right)J_0\left(\frac{r}{a}x_2\right)x_1x_2dx_1dx_2. \quad (26)$$

Из-за того, что под интегралом (26) стоит произведение двух функций Бесселя, переход в сферическую систему координат необязателен. Пользуясь формулами

$$\int_0^\infty J_0\left(\frac{r}{a}x_1\right)J_0\left(\frac{r}{a}x_2\right)rdr = a^2\frac{\delta(x_1-x_2)}{x_1},$$
$$\int_0^\infty (x\cos x - \sin x)^2\frac{dx}{x^4} = \frac{\pi}{6},$$

вычисляем объемный интеграл от выражения (26) и получаем простое выражение для эффективного нелинейного параметра

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = 1 + n\int G^2 dV = 1 + n\frac{10}{3}a^3. \quad (27)$$

Сравнивая результат (27) с выведенной ранее формулой (20), видим, что при наличии ансамбля параллельных друг другу дискообразных трещин усиление нелинейности не зависит от коэффициента Пуассона и линейных упругих модулей среды. Кроме того, результат (27) не зависит от относительного объема, занимаемого трещинами в твердом теле. Следовательно, увеличение нелинейности в присутствии трещин (27) может быть более значительным, чем при наличии сферических полостей (20).

В заключение отметим, что использованные для расчета акустического нелинейного парамет-

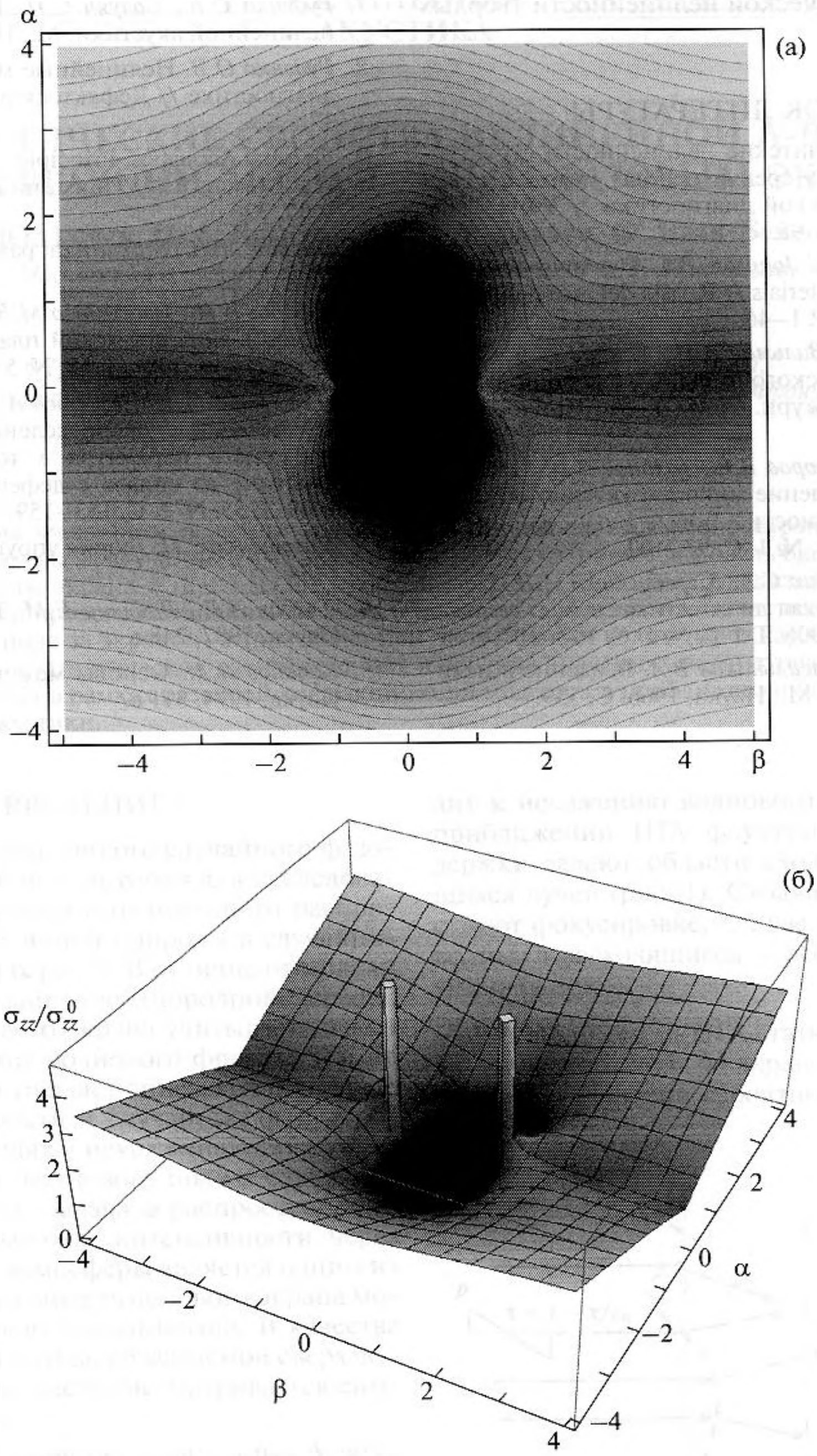

Рис. 2. Усиление напряжений вокруг бесконечно тонкой дискообразной в плане трещины радиуса a. Контурный график распределения напряжений в плоскости YZ (а). Шаг дискретизации – 0.086. 3D – график распределения напряжений в плоскости YZ (б).

ра среды решения (14) и (21) задач теории упругости – это уникальные результаты, полученные классиками в области механики. Рассчитывать на то, что в будущем удастся получить точные результаты для трещин иного типа, вряд ли возможно. Поэтому развитый здесь подход может быть использован главным образом для приближенных вычислений с целью проведения качествен-

ных оценок акустической нелинейности твердых сред с дефектами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Руденко О.В.* Гигантские нелинейности структурно-неоднородных сред и основы методов нелинейной акустической диагностики // УФН. 2006. Т. 176. № 1. С. 77–95.
2. *Ostrovsky L.A. and Johnson P.A.* Dynamic nonlinear elasticity in geomaterials // Rivista del nuovo cimento. 2001. V. 24. № 7. P. 1–46.
3. *Баженова Е.Д., Вильман А.Н., Есипов И.Б.* Флуктуации акустического поля в гранулированной среде // Акуст. журн. 2005. Т. 51. Приложение. С. 46–52.
4. *Зайцев В.Ю., Назаров В.Е., Таланов В.И.* "Неклассическое" проявление микроструктурно-обусловленной нелинейности: новые возможности // УФН. 2006. Т. 176. № 1. С. 97–102.
5. *Есипов И.Б., Рыбак С.А., Серебренный А.И.* Нелинейная акустическая диагностика земных пород и океана // УФН. 2006. Т. 176. № 1. С. 102–107.
6. *Зарембо Л.К., Красильников В.А.* Введение в нелинейную акустику. М.: Наука, 1966. С. 539.
7. *Руденко О.В., Солуян С.И.* Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975. С. 287.
8. *Руденко О.В.* Нелинейные методы в акустической диагностике // Дефектоскопия. 1993. № 8. С. 24–32.
9. Physical Acoustics. Principles and Methods. Edited by W.P. Mason, R.N. Thurston. – Academic Press, 1984. V. 17. 326 p.
10. *Партон В.З.* Механика разрушения. М.: Наука, 1990. 240 с.
11. *Коробов А.И., Изосимова М.Ю.* Нелинейные волны Лэмба в металлической пластине с дефектами // Акуст. журн. 2006. Т. 52. № 5. С. 683–692.
12. *Изосимова М.Ю., Коробов А.И., Руденко О.В.* Пространственное распределение нелинейного акустического параметра в тонкой металлической пластине из сплава с дефектами // Акуст. журн. 2009. Т. 55. № 2. С. 153–159.
13. *Тимошенко С.П.* Теория упругости. М.: Гостехиздат, 1934.
14. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория упругости. М.: Наука, 1987. 248 с.
15. *Качанов Л.М.* Основы механики разрушения. М.: Наука, 1974. 311 с.