АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2010, том 56, № 2, с. 190–196

ФИЗИЧЕСКАЯ АКУСТИКА

УДК 534.16

СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ В УПРУГОМ СЛОЕ, НАГРУЖЕННОМ КОНЕЧНОЙ МАССОЙ

© 2010 г. В. Г. Андреев, Т. Б. Крит, О. А. Сапожников

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет, 119991 Москва, Ленинские горы 1, стр. 2

E-mail: timofey@acs366.phys.msu.ru

Поступила в редакцию 3.12.08 г.

Исследованы стоячие сдвиговые волны в плоскопараллельном слое из резиноподобного материала, закрепленного без проскальзывания между двумя жесткими пластинами конечной массы. Нижняя пластина, на которой лежит слой, колеблется параллельно своей поверхности под действием внешней гармонической силы, а вторая пластина лежит свободно. Теоретически и экспериментально показано, что в такой системе возникают резонансы на частотах, значения которых известным образом зависят от массы свободной пластины и сдвигового модуля слоя. Рассчитаны и измерены формы резонансных кривых при различных значениях упругих параметров слоя и массы пластины. Показано, что по измеренным резонансным кривым определяется динамический сдвиговый модуль и коэффициент сдвиговой вязкости резиноподобного материала.

ВВЕДЕНИЕ

Особенностью резиноподобных сред (называемых также "мягкими твердыми телами" – soft solids), к которым относятся резины, гелеобразные материалы и мягкие биоткани, является малость сдвигового модуля упругости по сравнению с модулем всестороннего сжатия. В таких средах коэффициент Пуассона близок к 0.5, а скорость сдвиговых волн намного меньше скорости объемных волн и составляет иногда всего несколько метров в секунду.

Среди различных методов исследования вязкоупругих свойств различных сред удобным является метод, основанный на анализе стоячих волн в слое исследуемой среды. Такой подход оказался успешным в случае продольных волн мегагерцевого диапазона. Соответствующие ультразвуковые интерферометры широко используются для измерения скорости и коэффициента затухания звука в жидкостях [1]. Коэффициент затухания определяется по ширине резонансных пиков, а фазовая скорость звука – по значениям резонансных частот.

Аналогичный подход может быть использован для измерения комплексного сдвигового модуля резиноподобных сред [2, 3]. Ввиду малой скорости сдвиговых волн в резиноподобных средах соответствующие длины волн невелики, что позволяет возбуждать стоячие волны в образцах малых размеров на сравнительно низких звуковых частотах. Такие измерения в последние годы становятся особенно актуальными в приложении к мягким биологическим тканям, сдвиговый модуль которых служит важным диагностическим параметром состояния ткани [4–6].

Интерферометр на сдвиговых волнах может быть удобен не только для исследования линейных упругих параметров материала, но и для измерений его нелинейных модулей. Наличие только кубичной нелинейности в резиноподобных материалах приводит к ряду новых нелинейных явлений, в частности к смещению резонансной частоты при конечных амплитудах сдвиговых волн [7], что позволяет оценить нелинейный модуль упругости.

В настоящей работе приводятся результаты теоретического и экспериментального исследования стоячих сдвиговых волн в резонаторе, заполненном резиноподобной средой, а также выясняются возможности использования метода интерферометра для измерения линейных вязкоупругих параметров резиноподобных материалов.

СТОЯЧИЕ СДВИГОВЫЕ ВОЛНЫ В ОДНОМЕРНОМ РЕЗОНАТОРЕ

Метод возбуждения стоячей сдвиговой волны пояснен на вставке к рис. 1. Слой резиноподобного материала толщины L закреплен на нижней

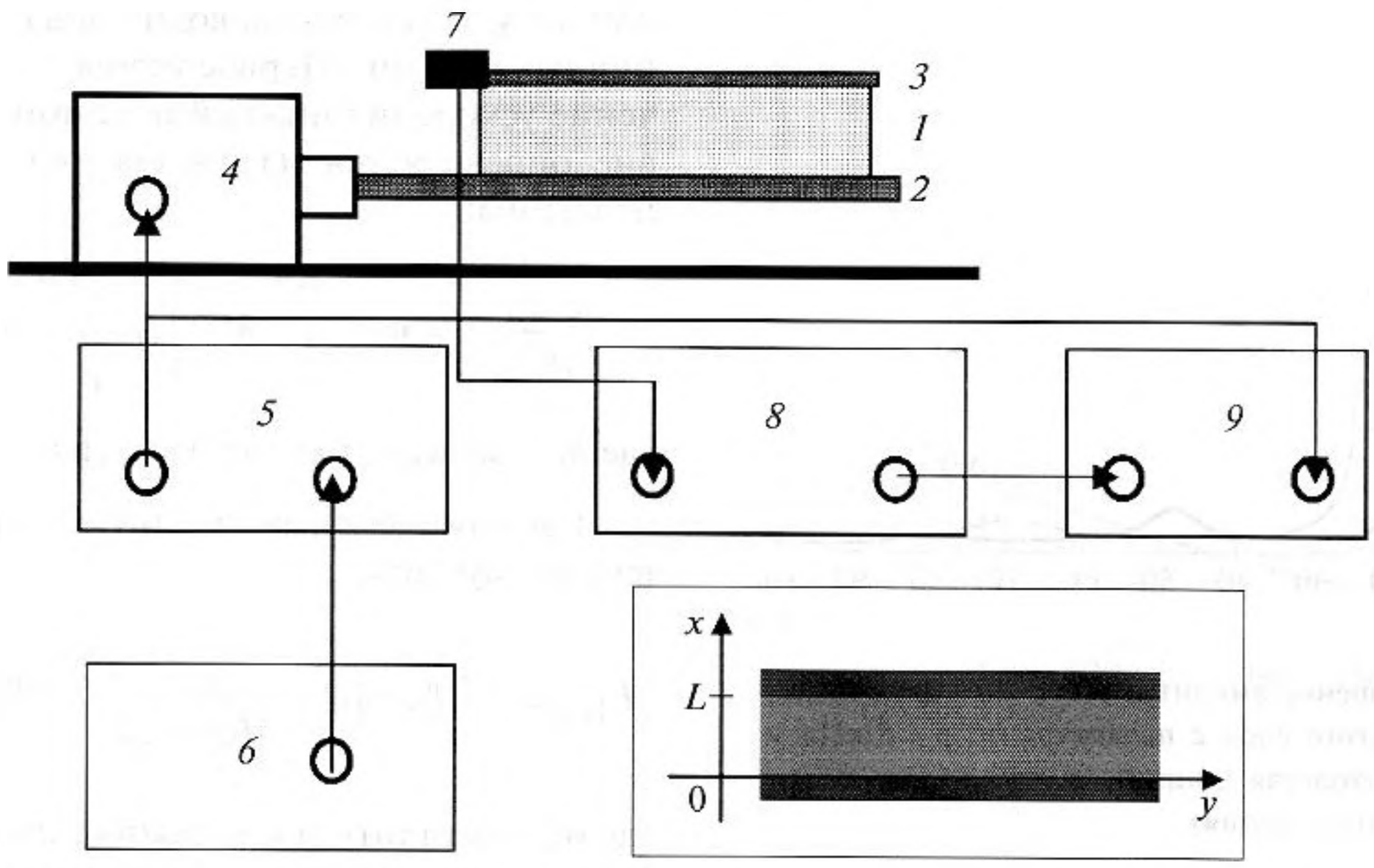

Рис. 1. Схема экспериментальной установки: *1* – слой резиноподобного материала; *2* – нижняя пластина; *3* – верхняя пластина; *4* – вибратор; *5* – усилитель низкой частоты; *6* – генератор сигналов; *7* – акселерометр; *8* – усилитель заряда; *9* – цифровой осциллограф. На вставке: возбуждение стоячей сдвиговой волны в упругом слое толщиной L.

пластине ($x = 0$) так, чтобы при движении пластины проскальзывание слоя отсутствовало. На верхней поверхности слоя ($x = L$) находится пластина конечной массы, которая движется вместе со слоем. Пластина, на которой лежит слой, колеблется в поперечном направлении (вдоль оси y) с ускорением

$$w_y(x = 0,\ t) = W_0 \cos\omega t = \mathrm{Re}\left(W_0 e^{-i\omega t}\right).$$

При колебаниях нижней пластины в слое резиноподобного материала возникает сдвиговая волна. Эта волна достигает верхней границы слоя, отражается от нее и складывается с падающей волной, в результате чего в слое образуется стоячая волна. Отметим, что упругие колебания в резиновых слоях, нагруженных массой, могут быть использованы для гашения вибраций в стержнях и пластинах [8].

Движение частиц в резиноподобном материале описывается уравнением движения и законом Гука [9]:

$$\rho\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x},$$

$$\sigma_{xy} = \mu\frac{\partial u_y}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_y}{\partial t}\right).$$

Здесь ρ – плотность материала, u_y – смещение вдоль оси y, μ – модуль сдвига, η – коэффициент сдвиговой вязкости, $\sigma_{xy} = F_y/S$ – компонента тензора напряжений, F_y – компонента силы вдоль оси y, S – площадь поверхности слоя, перпендикулярной оси x.

Для случая гармонических колебаний $u_y(x, t) = U(x)\cdot e^{-i\omega t}$, $\sigma_{xy}(x,t) = \Sigma(x)\cdot e^{-i\omega t}$ эти уравнения запишутся в виде:

$$-\omega^2\rho\cdot U = \frac{d\Sigma}{dx}, \tag{1}$$

$$\Sigma = \tilde{\mu}\frac{dU}{dx}. \tag{2}$$

Здесь $U(x)$ и $\Sigma(x)$ – комплексные амплитуды соответствующих величин $u_y(x,t)$ и $\sigma_{xy}(x,t)$, $\tilde{\mu} = \mu - i\omega\eta$ – комплексный модуль сдвига. Введем для удобства угол потерь $\delta = \delta(\omega)$, характеризующий относительную роль вязких напряжений: $\mathrm{tg}\delta = \omega\eta/\mu$. Тогда $\tilde{\mu} = \mu(1 - i\,\mathrm{tg}\delta) = \mu e^{-i\delta}/\cos\delta$. Из уравнения движения (1) и закона Гука (2) для комплексной амплитуды поперечного смещения получается стандартное волновое уравнение:

$$\frac{d^2U}{dx^2} + \frac{\omega^2\rho}{\tilde{\mu}}U = 0. \tag{3}$$

Общее решение этого уравнения имеет вид суперпозиции двух встречных волн:

$$U = Ae^{ikx} + Be^{-ikx},$$

где волновое число определяется из закона дисперсии:

$$k = \frac{\omega}{\sqrt{\tilde{\mu}/\rho}} = \frac{\omega}{c_t} + i\alpha.$$

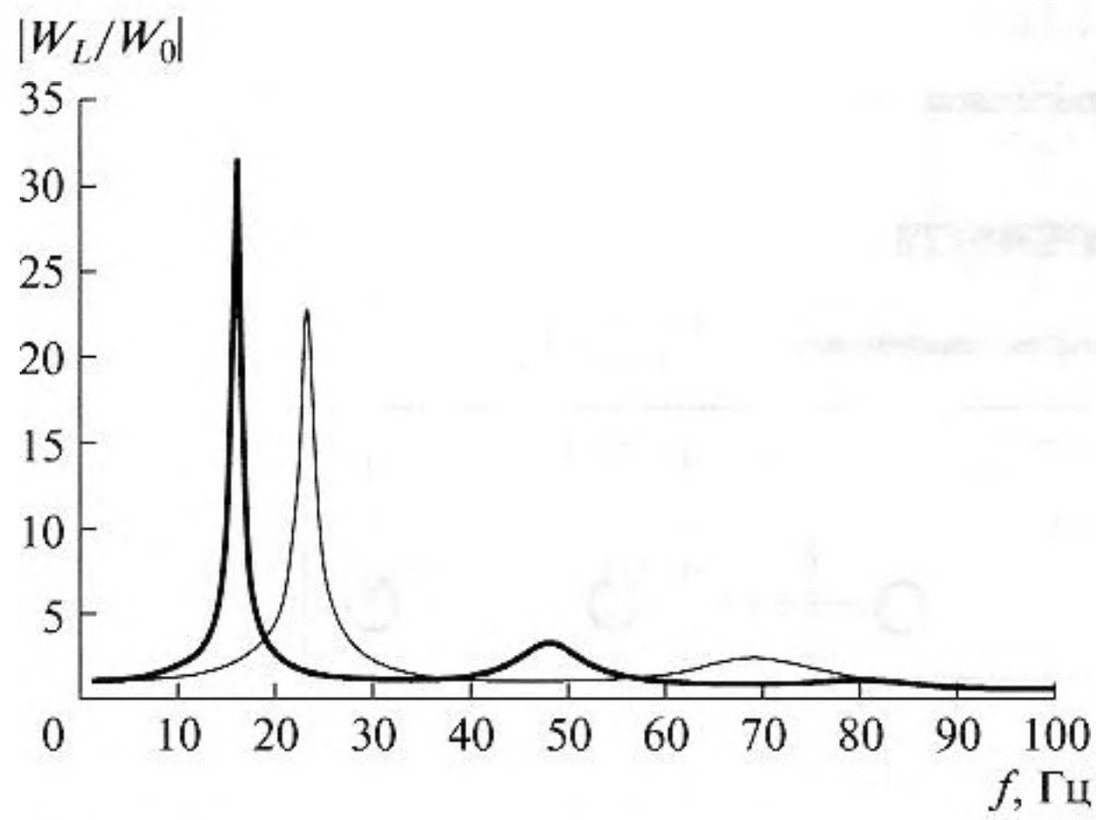

Рис. 2. Отношение амплитуд ускорений, рассчитанное для упругого слоя с параметрами: $\mu = 5$ кПа и $\eta = 2$ Па·с (толстая линия), $\mu = 10.5$ кПа и $\eta = 4$ Па·с (тонкая линия).

Здесь введены обозначения для скорости и коэффициента затухания сдвиговых волн:

$$c_t = \frac{\sqrt{\mu/\rho}}{\cos(\delta/2)\sqrt{\cos\delta}}, \quad \alpha = \frac{\omega}{c_t}\mathrm{tg}(\delta/2).$$

Амплитуды встречных волн найдутся из двух граничных условий. Первое условие – заданное значение ускорения нижней пластины, второе условие определяется из закона движения верхней пластины:

$$\left.\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}\right|_{x=0} = w_y\big|_{x=0}, \quad M\left.\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}\right|_{x=L} = -\sigma_{xy}\big|_{x=L}\cdot S\ ,$$

где M – масса верхней пластины.

Для комплексных амплитуд граничные условия примут вид:

$$U\big|_{x=0} = -\frac{W_0}{\omega^2}, \quad \left.\left(U - \frac{\mu S}{M\omega^2\cos\delta}\cdot e^{-i\delta}\frac{dU}{dx}\right)\right|_{x=L} = 0, \quad (4)$$

где W_0 – амплитуда ускорения нижней пластины. Решая уравнение (3) с граничными условиями (4) и учитывая, что амплитуда ускорения верхней пластины $W_L = -\omega^2 U\big|_L$, получим следующее выражение для отношения указанных комплексных амплитуд:

$$\frac{W_L}{W_0} = \frac{2i\dfrac{S}{M\omega}\sqrt{\dfrac{\rho\mu}{\cos\delta}}\cdot e^{-i\frac{\delta}{2}}}{e^{-ikL}\left(1 + i\dfrac{S}{M\omega}\sqrt{\dfrac{\rho\mu}{\cos\delta}}\cdot e^{-i\frac{\delta}{2}}\right) - e^{ikL}\left(1 - i\dfrac{S}{M\omega}\sqrt{\dfrac{\rho\mu}{\cos\delta}}\cdot e^{-i\frac{\delta}{2}}\right)}. \quad (5)$$

Если сдвиговая вязкость отсутствует, то решение (5) можно существенно упростить:

$$\left.\frac{W_L}{W_0}\right|_{\delta=0} = \frac{2i\mathrm{tg}\gamma}{e^{-ikL}(1 + i\mathrm{tg}\gamma) - e^{ikL}(1 - i\mathrm{tg}\gamma)} = \frac{\sin\gamma}{\sin(kL - \gamma)}, \quad (6)$$

где $\gamma \equiv \mathrm{arctg}\left(\dfrac{\rho c_t S}{M\omega}\right)$.

Абсолютное значение отношения комплексных амплитуд ускорений, рассчитанное по формуле (5) при различных значениях модуля сдвига и коэффициента сдвиговой вязкости материала в диапазоне от 1 до 100 Гц, представлено на рис. 2. При расчетах использованы следующие значения: плотность материала $\rho = 1$ г/см^3, толщина слоя $L = 3.2$ см, масса верхней пластины $M = 28.3$ г, ее площадь $S = 94$ см^2. Решение, построенное для слоя с параметрами $\mu = 5$ кПа и $\eta = 2$ Па·с, показано на рисунке сплошной толстой линией. Резонансы наблюдаются на частотах 15.97, 47.98 и 79.32 Гц. Тонкой линией на рисунке показано решение, построенное при $\mu = 10.5$ кПа и $\eta = 4$ Па·с. Здесь частоты 23.14 и 69.33 Гц соответствуют первому и второму резонансам. Видно, что резонансы более высокого порядка шире и меньше по амплитуде, поэтому те из них, что возникают на частотах выше 100 Гц, при указанных параметрах вообще не различимы. Этим обусловлен выбор частотного диапазона, в котором построено решение.

Из (6) следует, что в случае бесконечно малой массы верхней пластины и в отсутствие затухания резонансы возникнут на частотах

$$f_n = \frac{c_t}{4L}\cdot(2n - 1), \quad n = 1, 2, \ldots \quad (7)$$

Заметим, что отношения резонансных частот, наблюдаемые в слое для первого и второго набора параметров составили: 15.97 : 47.98 : 79.32 = 1 : 3 : 4.97 и 23.14 : 69.33 = 1 : 3, что находится в соответствии с (7). Это означает, что резонансные частоты слоя, нагруженного малой, но конечной массой и при коэффициентах сдвиговой вязкости до 4 Пак с, можно оценивать по простой формуле (7).

РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Блок-схема экспериментальной установки для изучения стоячих сдвиговых волн в резиноподоб-

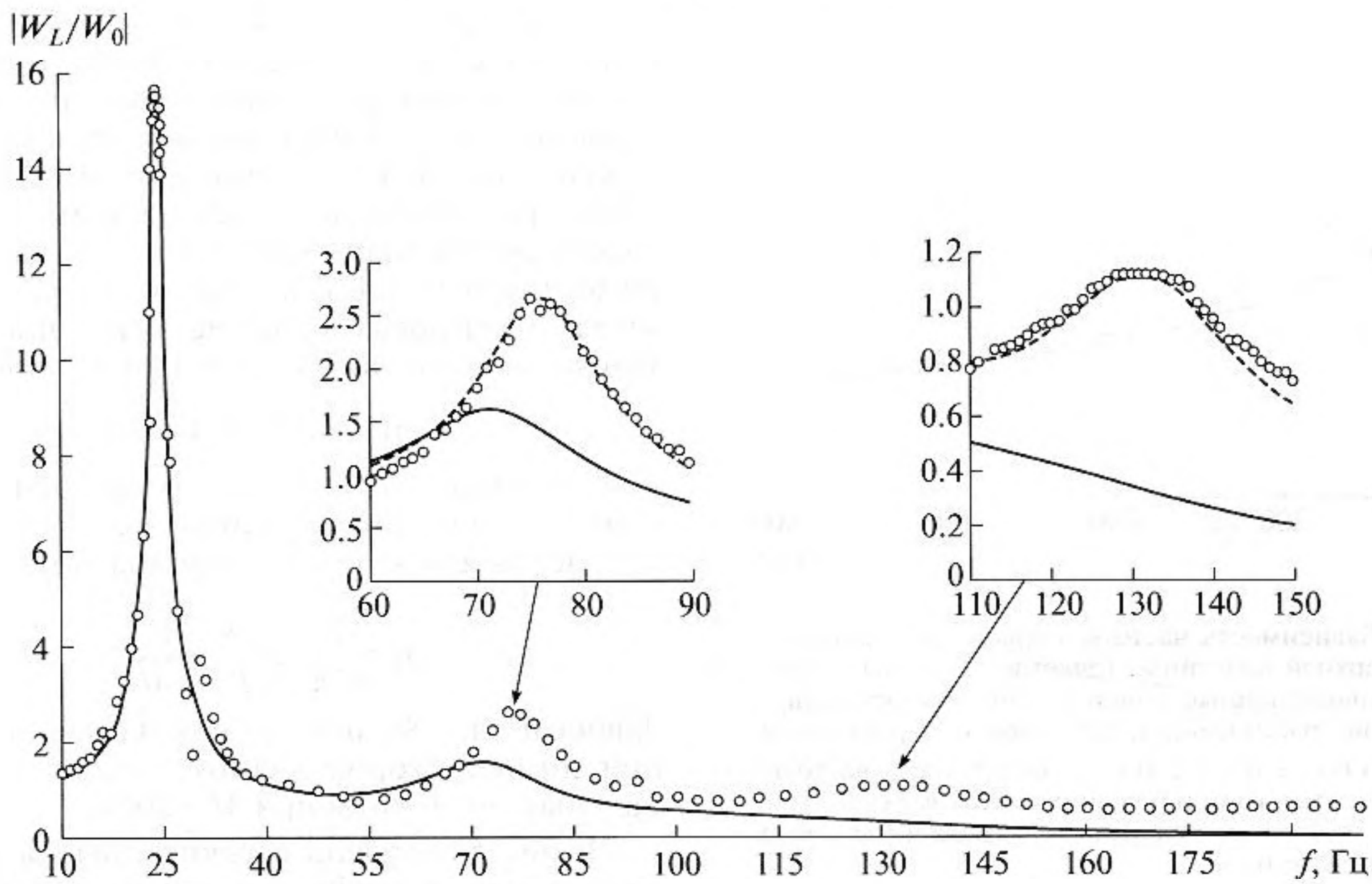

Рис. 3. Экспериментальная зависимость отношения амплитуд ускорений верхней и нижней пластин от частоты (точки). Теоретическая кривая, рассчитанная для слоя с параметрами $\mu = 11.3$ кПа и $\eta = 6.2$ Па · с, показана сплошной линией. На вставках – фрагменты зависимости в диапазонах частот 60–90 Гц и 110–150 Гц. Штриховой линией показаны теоретические кривые, рассчитанные для парметров слоя $\mu = 12.6$ кПа и $\eta = 3.9$ Па · с в диапазоне 60–90 Гц и для $\mu = 13.5$ кПа и $\eta = 2.9$ Па · с в диапазоне 110–150 Гц.

ном материале представлена на рис. 1. В качестве слоя использовался прямоугольный параллелепипед толщиной $L = 3.2$ см со сторонами 7.9 и 11.9 см, изготовленный из мягкого полимерного материала пластисола (производитель MF manufacturing Co, США). Статический сдвиговый модуль, измеренный методом вдавливания жесткого шарика [9], составил 11.7 кПа. Слой был закреплен на горизонтальной металлической пластине; на верхней поверхности слоя располагалась тонкая пластина из текстолита массой 28.3 г, которая за счет трения колебалась без проскальзывания вместе с поверхностью слоя. Площадь пластины была равна площади верхней грани образца. Нижняя пластина жестко соединялась с вибратором типа TIRA TV 52120. Через усилитель TIRA BAA 500 на вибратор подавалось напряжение синусоидальной формы с генератора сигналов HP33120A. Измерения проводились при фиксированной амплитуде выходного напряжения генератора сигналов на различных частотах в диапазоне 1–200 Гц с шагом 0.1 Гц. Два акселерометра 4374 (фирма Брюль и Къер, Дания) размещались на верхней и на нижней пластинах и измеряли ускорения этих пластин. Сигналы акселерометров через усилители заряда 2635 (фирма Брюль и Къер, Дания) подавались на входы двуканального цифрового осциллографа Tektronix TDS 3032B. Оцифрованные сигналы с осциллографа через GPIB интерфейс поступали в компьютер, где производилось вычисление отношения амплитуд ускорений.

Зависимость отношения амплитуд ускорений верхней и нижней пластин от частоты представлена на рис. 3 точками. На частотах 24, 76 и 131 Гц видны первые три резонанса слоя. Коэффициент усиления по ускорению на частоте первого резонанса равен 16, ширина резонансной кривой по уровню 0.7 составляет 2 Гц, что соответствует добротности 12. Коэффициент усиления по ускорению на частоте второго резонанса 76 Гц равен 3, резонансная кривая имеет ширину 11.4 Гц, что соответствует добротности 6.7. Сплошной линией на рис. 3 показана теоретическая зависимость, рассчитанная для слоя с параметрами: $\mu = 11.3$ кПа, $\eta = 6.2$ Па · с. Она хорошо соответствует экспериментальной кривой на частотах вблизи первого резонанса, однако наблюдаются существенные различия на двух других резонансных частотах.

Для того чтобы обеспечить совпадение экспериментальных и теоретических значений в области второго резонанса в диапазоне частот 60–90 Гц, расчетный модуль сдвига был увеличен до 12.6 кПа, а коэффициент сдвиговой вязкости был уменьшен до 3.9 Па · с. В диапазоне 110–150 Гц отклонение теоретической кривой от эксперимен-

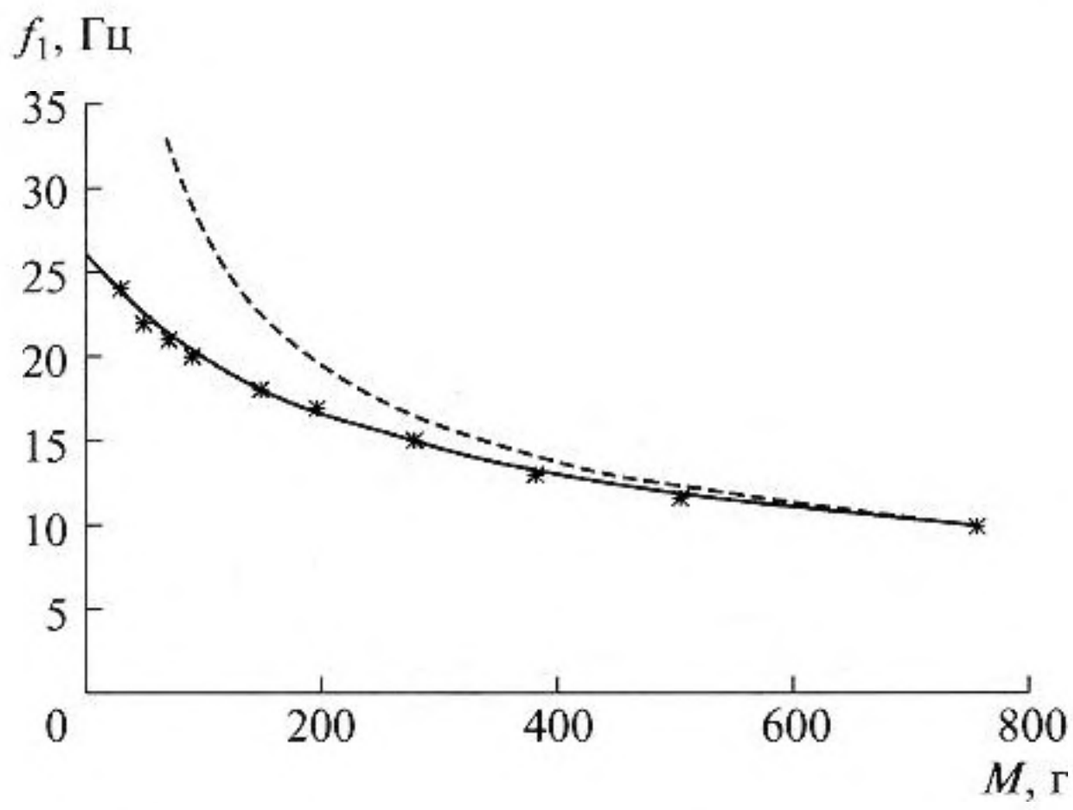

Рис. 4. Зависимость частоты первого резонанса от массы верхней пластины. Точками показаны экспериментальные данные, сплошная линия соответствует кривой, рассчитанной для слоя с параметрами $\mu = 11.3$ кПа и $\eta = 6.2$ Па · с. Зависимость частоты первого резонанса при больших массах верхней пластины в отсутствие сдвиговой вязкости показана пунктирной линией.

тальной оказалось минимальным при параметрах слоя $\mu = 13.5$ кПа, $\eta = 2.9$ Па · с. Соответствующие теоретические зависимости в диапазонах частот 60–90 Гц и 110–150 Гц представлены на вставках к рис. 3 штриховыми линиями. Можно сделать вывод, что сдвиговая вязкость для данного полимерного материала уменьшается, а модуль сдвига растет с увеличением частоты. Этот результат находится в соответствии с результатами измерений сдвиговых волн в форме однополярных импульсов длительностью менее 2 мс, которые возбуждались в аналогичном материале с помощью сфокусированного ультразвукового пучка [7]. В частности, в работе [7] было получено значение коэффициента сдвиговой вязкости (0.30 ± ± 0.03) Па · с, что на порядок меньше, чем значения, полученные нами в данной работе. Следует отметить, что частотный спектр импульса сдвиговой волны достаточно широкий (0–800 Гц), поэтому указанное в статье [7] значение является некоторой средней величиной, в большей степени отражающей поведение сдвиговой вязкости на частотах выше 300 Гц.

Из анализа решения (5) для отношения ускорений следует, что резонансные частоты упругого слоя, нагруженного пластиной, уменьшаются с ростом массы верхней пластины. Были проведены измерения резонансных кривых упругого слоя при его нагружении дополнительными грузами массами от 20 до 725 г. Экспериментально измеренная зависимость частоты первого резонанса упругого слоя от массы верхней пластины показана на рис. 4 точками. По этой зависимости можно было определить значение сдвигового модуля более точно. Для этого рассчитывались теоретические зависимости частоты первого резонанса слоя от массы верхней пластины при изменении значений сдвигового модуля в пределах от 10 до 12 кПа с шагом 0.1 кПа (при фиксированном значении η) и находилась такая зависимость, для которой среднеквадратичное отклонение от экспериментальных данных было минимальным. Эта зависимость показана на рис. 4 сплошной линией. При этом сдвиговый модуль оказался равным:

$$\mu = 11.3 \pm 0.1 \text{ кПа}.$$

При массе пластины, превышающей массу слоя, в отсутствие затухания частоту первого резонанса можно найти по приближенной формуле:

$$f_1 \approx \frac{c_t}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{\rho S}{L}} \cdot \frac{1}{\sqrt{M}}. \quad (8)$$

Зависимость (8), показанная на рис. 4 пунктирной линией, хорошо соответствует эксперименальным значениям при $M > 500$ г.

На рис. 5 показаны рассчитанные зависимости первых трех резонансных частот упругого слоя с фиксированными значениями сдвигового модуля и сдвиговой вязкости ($\mu = 11.3$ кПа, $\eta = 6.2$ Па · с), нагруженного пластиной, от массы этой пластины. С увеличением массы пластины частота первого резонанса медленно уменьшается, частоты второго и третьего резонансов, соответствующие $n = 2$ и $n = 3$, стремятся соответственно к удвоенной и учетверенной частотам первого резонанса. Действительно, с ростом массы верхней пластины ее ускорение уменьшается при фиксированной силе со стороны упругого слоя. Это приводит к тому, что верхняя граница слоя при увеличении массы пластины становится менее подвижной, и в пределе при $M \longrightarrow \infty$ резонансы возникают на частотах, соответствующих слою с закрепленной верхней границей: $f_n = \frac{c_t n}{2L}$, $n = 1, 2, \ldots$

ОБСУЖДЕНИЕ И ВЫВОДЫ

Проведенные исследования показали, что метод интерферометра позволяет определять модуль сдвига и коэффициент сдвиговой вязкости на низких звуковых частотах с использованием слоев резиноподобного материала сантиметровой толщины. Использование стоячих волн позволяет добиться заметного усиления амплитуды сдвигового смещения на частоте резонанса. В частности, коэффициент усиления на частоте 24 Гц составил 16, т.е. резонансные свойства упругого слоя достаточно хорошо выражены.

Предложенный метод расширения семейства резонансных кривых путем вариации массы верхней пластины позволил добиться улучшения точности измерений сдвигового модуля: погреш-

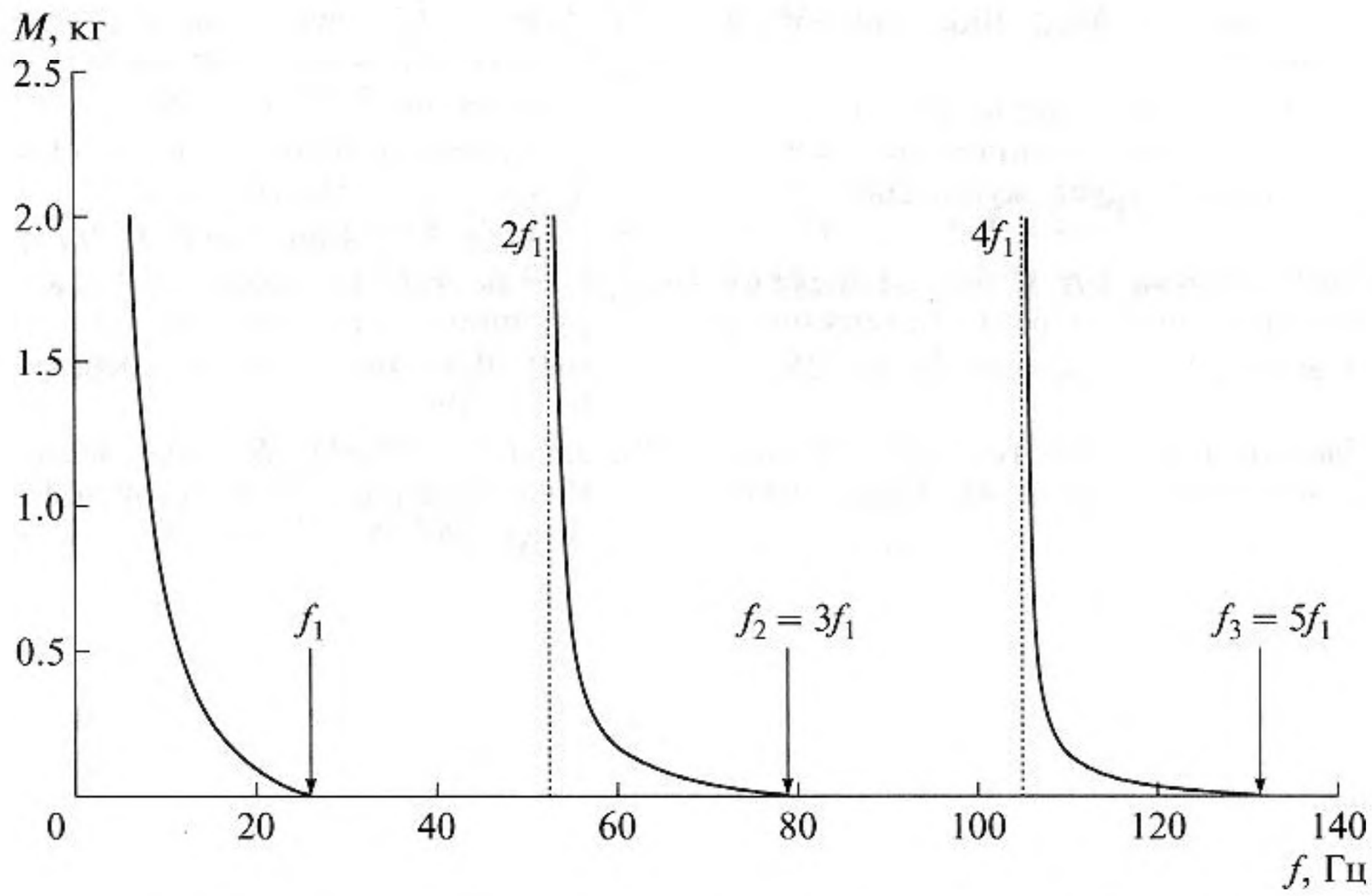

Рис. 5. Зависимости первых трех резонансных частот упругого слоя от массы верхней пластины, рассчитанные для слоя с параметрами $\mu = 11.3$ кПа и $\eta = 6.2$ Па · с.

ность измерений не превышала 1%. Для сравнения, погрешность статических измерений в тех же условиях составила 9% (метод статической деформации слоя) и 10% (метод вдавливания жесткого шарика) [7].

Отметим, что использованный метод позволяет также исследовать частотную зависимость сдвигового модуля $\mu(\omega)$ и коэффициента сдвиговой вязкости $\eta(\omega)$ в низкочастотном диапазоне. Показано, что коэффициент сдвиговой вязкости падает с ростом частоты: на частотах, выше 100 Гц он в 2 раза меньше, чем на низких частотах (5–50 Гц). В то же время сдвиговый модуль, а следовательно и скорость сдвиговых волн, с ростом частоты возрастают. Такое поведение упругости и вязкости характерно для релаксирующей среды с относительно большим (100 мс) временем релаксации [11, 12]. Это явление может быть связано с механизмом низкочастотной релаксации сдвиговых напряжений, возникающих в полимерах с длинными молекулами. Рассмотренный интерферометрический метод позволяет измерить достаточно детально частотную зависимость вязкоупругих параметров резиноподобного материала путем варьирования резонансных частот слоя простым нагружением слоя дополнительными массами. Это позволит измерить медленные времена релаксации и построить реологическую модель конкретного резиноподобного материала.

Коэффициент сдвиговой вязкости полимера составил на низких частотах 6.2 ± 1.6 Па · с. Эта величина на порядок выше значений, полученных для материалов на основе желатина и агар-агара (см., например, [13]). Поэтому пластисол является неперспективным материалом для работы в нелинейном режиме, когда требуется получать относительные сдвиговые деформации порядка 1. В последующих работах планируется осуществить поиск подходящих резиноподобных материалов с малой сдвиговой вязкостью для наблюдения нелинейных эффектов в резонаторах.

Работа поддержана грантами РФФИ, ИНТАС и МНТЦ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Eggers F., Funck T.* Ultrasonic measurements with millimeter liquid samples in the 0.5 – 100 MHz range // Rev. Sci. Instrum. 1973. V. 44. P. 969–977.
2. *Тютекин В.В.* Метод измерения механических параметров резины на звуковых и ультразвуковых частотах // Акуст. журн. 1955. Т. 1. № 4. С. 356–359.
3. *Кашина В.И., Тютекин В.В.* Установка для измерения модуля упругости и коэффициента потерь материалов // В сб. "Машины и приборы для испытания металлов и пластмасс". М.: Машиностроение, 1965. С. 31–36.
4. *Carstensen E.L., Parker K.J., Lerner R.M.* Elastography in the management of liver disease // Ultrasound Med. Biol. 2008. V. 34. № 10. P. 1535–1546.
5. *Андреев В.Г., Дмитриев В.Н., Пищальников Ю.А., Руденко О.В., Сапожников О.А., Сарвазян А.П.* Наблюдение сдвиговых волн, возбужденных сфокусированным ультразвуком в резиноподобной среде // Акуст. журн. 1997. Т. 43. № 2. С. 149–155.
6. *Tanter M., Bercoff J., Athanasiou A., Deffieux T., Gennison J.-L., Montaldo G., Muller M., Tardivon A., Fink M.* Quantitative assessment of breast lesion viscoelasticity: initial clinical results using supersonic

shear imaging // Ultrasound Med. Biol. 2008. V. 34. № 9. P. 1373–1386.

7. *Руденко О.В., Хедберг К.М., Энфло Б.О.* Стоячие акустические волны конечной амплитуды в кубично нелинейной среде // Акуст. журн. 2007. Т. 53. № 4. С. 522–532.
8. *Тютекин В.В., Шкварников А.П.* Синтез и исследование поглотителей изгибных волн в стержнях и пластинах // Акуст. журн. 1972. Т. 18. № 3. С. 441–447.
9. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. В 10-ти т. Т. VII. Теория упругости. М.: Наука, 1987. 248 с.
10. *Андреев В.Г., Бурлакова Т.А.* Измерения сдвиговой упругости и вязкости резиноподобных материалов // Акуст. журн. 2007. Т. 53. № 1. С. 50–54.
11. *Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П.* Теория волн. М.: Наука, 1979. 384 с.
12. *Андреев В.Г., Кливлэнд Р.О., Пищальников Ю.А., Сапожников О.А., Хохлова В.А.* Диагностика релаксирующей среды акустическим импульсом с ударным фронтом // Акуст. журн. 1999. Т. 45. № 1. С. 13–19.
13. *Jacob X., Catheline S., Gennisson J.-L. et al.* Nonlinear shear wave interaction in soft solids // J. Acoust. Soc. Amer. 2007. V. 122. № 4. P. 1917–1926.