АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2010, том 56, № 5, с. 616–621

ФИЗИЧЕСКАЯ АКУСТИКА

УДК 534.2:533

О ПОГЛОЩЕНИИ ЗВУКА В ЭМУЛЬСИЯХ

© 2010 г. В. А. Мурга

Санкт-Петербургский государственный морской технический университет
190008 С.-Петербург, ул. Лоцманская 3
E-mail: pytys@mail.ru

Поступила в редакцию 17.07.09 г.

Теоретически исследован процесс поглощения звука в однородных разбавленных эмульсиях, обусловленный вязкостью компонент среды, с учетом деформационных (капиллярных) колебаний капель эмульсии и в предположении, что длина вязких волн мала по сравнению с размером капли, а размер капли мал по сравнению с длиной звуковой волны. Рассмотрены резонансные явления, относящиеся к капиллярным колебаниям. Анализируется резонансный вклад в коэффициент затухания плоской звуковой волны, распространяющейся в эмульсии.

Ключевые слова: эмульсия, капля, поверхностное натяжение, диссипация энергии, резонанс, затухание звука.

В данной работе речь идет об однородных разбавленных эмульсиях, поэтому исследование сводится к анализу диссипативных процессов для одной капли, взвешенной в безграничной среде, с последующим применением результатов анализа к совокупности капель (эмульсии). Диссипация (поглощение) звуковой энергии обусловлена, в основном, вязкостью и теплопроводностью жидкостей; в связи с этим можно говорить о вязкостном и термическом механизмах диссипации. Решение задачи (в сферических координатах) о колебаниях капли в звуковом поле представляет собой сумму гармоник или мод для каждой акустической величины. Каждой моде соответствует своя доля в поглощенной энергии. Для нулевой моды (сферически-симметричный вклад в решение) преобладает термический механизм, теоретически исследованный в [1]. Для первой моды (поступательное колебательное движение недеформированной капли как целого) преобладает, как можно показать, вязкостный механизм. В суммарном поглощении звука, связанном с нулевой и первой модами, вязкостный механизм играет обычно главную роль, если "тяжелые" частицы находятся в "легкой" жидкости (например, капельки ртути в воде), в обратном случае преобладает термический механизм (например, воздушные пузырьки в воде); в промежуточном случае эти механизмы, вообще говоря, "равноправны"; преобладать может любой из них в зависимости от конкретных значений параметров компонент эмульсий. Соответствующее первой моде поглощение звука было исследовано в [2] для твердых шариков, взвешенных в жидкости; обобщение для жидких капель приведено в [3]. Остальные моды связаны с деформационными (капиллярными) колебаниями поверхности капли; можно показать, что для деформационных мод, как и для первой моды, главную роль в поглощении звука играет вязкость. Капиллярные колебания представляют интерес в первую очередь потому, что в случае резонансного возбуждения какой-либо деформационной моды можно предположить заметное дополнительное (к нулевой и первой модам) поглощение звука каплей. Такое предположение высказывалось в работе [4] при попытке объяснить расхождение экспериментальных результатов по измерению коэффициента затухания звука в эмульсиях с теоретическими, вычисленными по формулам работы [2] (учет первой, то есть "вязкой" моды). Но в работе [3] было показано, что для удовлетворительного объяснения этого расхождения достаточно учесть нулевую ("термическую") моду, исследованную в [1], так что нет необходимости предполагать резонанс деформационных мод. В [3] исследованы также капиллярные колебания капли в отсутствие резонансных явлений; как можно было ожидать, их влияние на поглощение звука незначительно. Там же на основе некоторой "резонансной оценки" делается вывод, что резонансный вклад в поглощение и, следовательно, в коэффициент затухания звука пренебрежимо мал. Но, как будет здесь показано, выражение для упомянутой оценки неверно (неясно также происхождение этой оценки, приведенной без вывода и без каких-либо пояснений). В более поздних работах капиллярные колебания капель обычно исследуются в режиме свободных колебаний (см., например, [5, 6]). Что касается взаимодействия капель со звуковым полем (вынужденные колебания), то обычно исследуется силовое, осредненное по периоду колебаний, воздействие интенсивного ультразвука на каплю и связанную с этим статическую (или квазистатическую) деформацию капли (см. [7] и приведенный там список литературы). Вынужденные линейные капиллярные колебания капель с учетом вязкости, насколько нам известно, не рассматриваются. Таким образом, вопрос о влиянии резонанса деформационных мод на поглощение звука каплей и, следовательно, на распространение звука в эмульсиях остается открытым. В предлагаемой работе эта проблема проанализирована; вывод о слабом влиянии резонансных колебаний на распространение звука в эмульсиях, полученный в данной работе, совпадает с упомянутым выше выводом в работе [3], но этот последний, основанный, как уже говорилось, на неверной "резонансной оценке", может быть оправдан лишь после более тщательного анализа.

Рассмотрим поведение капли вязкой жидкости в звуковом поле. Предполагается, что

$$s/a \ll 1, \quad ka \ll 1, \quad \delta/a \ll 1.$$

Здесь s – смещение частиц жидкости от положения равновесия, a – радиус невозмущенной капли, $k = \omega/c$, ω – угловая частота колебаний, c – скорость звука, $\delta = (2\nu/\omega)^{1/2}$ – толщина динамического пограничного слоя, ν – коэффициент кинематической вязкости. Написанные соотношения выполняются как во внешней (по отношению к капле), так и во внутренней областях. Используем подвижную сферическую систему координат (r, θ) с началом, совпадающим с центром тяжести капли; в этой системе рассматриваем абсолютное движение жидкости. Первичная плоская волна распространяется в направлении полярной оси $(\theta = 0)$; потенциал скорости частиц жидкости для первичной волны дается вещественной частью выражения

$$\varphi = \Phi\exp[i(\omega t - kr\cos\theta)] = \\ = \Phi e^{i\omega t}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)i^{-n}j_n(kr)P_n(\cos\theta), \tag{1}$$

где Φ – амплитуда потенциала, j_n – сферические функции Бесселя, P_n – полиномы Лежандра; зависимость от времени всех акустических величин выражается временным фактором $\exp(i\omega t)$, который в дальнейшем всюду опускаем. Поле скорости $\mathbf{v}$ жидких частиц состоит из потенциальной и соленоидальной частей; для областей вне и внутри капли имеем соответственно

$$\mathbf{v} = \mathrm{grad}(\varphi + \psi) + w, \quad \mathbf{v}' = \mathrm{grad}\psi' + w', \tag{2}$$

где ψ – возмущенный потенциал во внешней области, ψ' – полный потенциал во внутренней области, штрихами снабжаются величины, относящиеся к капле, $\boldsymbol{w}$ – соленоидальный вектор. Выражения для потенциалов ψ и ψ' должны иметь вид

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty}A_n h_n(kr)P_n(\cos\theta), \\ \psi' = \sum_{n=0}^{\infty}B_n j_n(k'r)P_n(\cos\theta), \tag{3}$$

где A_n и B_n – неизвестные константы, h_n – сферические функции Ханкеля второго рода. Соленоидальный вектор $\mathbf{w}$ в обеих областях должен быть решением уравнений

$$\frac{\partial w_\theta}{\partial t} = \nu\left(\Delta w_\theta + \frac{2}{r^2}\frac{\partial w_r}{\partial\theta} - \frac{w_\theta}{r^2\sin^2\theta}\right), \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 w_r\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta w_\theta) = 0, \tag{4}$$

где w_θ и w_r – тангенциальная и радиальная составляющие вектора $\boldsymbol{w}$ и

$$\Delta w_\theta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial w_\theta}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial w_\theta}{\partial\theta}\right). \tag{4'}$$

На поверхности капли должны выполняться условия

$$-p_1 + 2\eta\frac{\partial v_r}{\partial r} = -p_1' + 2\eta'\frac{\partial v_r'}{\partial r} + p - p' + T\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right), \\ \eta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r}\right) = \eta'\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r'}{\partial\theta} + \frac{\partial v_\theta'}{\partial r} - \frac{v_\theta'}{r}\right), \tag{5} \\ v_r = v_r', v_\theta = v_\theta',$$

где p_1 – возмущение давления, p – статическое давление, $\eta = \nu\rho$, ρ – невозмущенная плотность жидкости, T – коэффициент поверхностного натяжения, R_1 и R_2 – главные радиусы кривизны поверхности капли v_r и v_θ – компоненты вектора $\mathbf{v}$.

В формулы (4), (4'), (5) входят члены, зависящие от малого параметра δ/a. В разложениях этих членов в ряды по степеням данного параметра будем пренебрегать слагаемыми со степенями выше первой (относительно наибольшего слагаемого в каждой формуле). Так, в (4') можно пренебречь вторым слагаемым в правой части, так как оно относительно первого слагаемого имеет порядок величины $\sim(\delta/a)^2$, что можно видеть с помощью формулы (6). С учетом сказанного первое уравнение в (4) упрощается к виду

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial w_0}{\partial r}\right)-\frac{i\omega w_0}{\nu}=0.$$

Ограниченные решения этого уравнения для областей вне и внутри капли имеют вид

$$\begin{aligned} w_\theta &= f(\theta)\exp[-(1+i)(r-a)/\delta]/r,\\ w'_\theta &= g(\theta)\{\exp[(1+i)(r-a)/\delta']-\\ &-\exp[-(1+i)(r+a)/\delta']\}/r, \end{aligned}\tag{6}$$

где f и g – пока произвольные функции от θ. Второе слагаемое в выражении для w'_θ весьма мало, и если исключить из рассмотрения область вблизи центра капли, то им можно пренебречь; оба решения сколько-нибудь заметно отличаются от нуля лишь в пределах своих пограничных слоев δ и δ'. Наличие этих слоев, а также деформаций поверхности капли, ограничивают применимость решений (6) требованием $\zeta/\delta \ll 1$, $\zeta/\delta' \ll 1$, где ζ – деформация (отклонение элемента поверхности капли в радиальном направлении от равновесного положения). Этого требования можно избежать, если вместо сферической системы координат использовать "деформированную" сферическую систему с координатой y, которая отсчитывается в радиальном направлении от (деформированной) поверхности капли, так что $y=r-(a+\zeta)$. Координатная поверхность $y=0$ совпадает в любой момент времени с поверхностью капли. В такой системе координат решение (в линейном приближении) имеет вид

$$\begin{aligned} w_\theta &= f(\theta)\exp[-(1+i)y/\delta]/(y+a),\\ w'_\theta &= g(\theta)\exp[(1+i)y/\delta']/(y+a), \end{aligned}\tag{6'}$$

а граничные условия на поверхности капли записываются не при $r=a$, а при $y=0$. Существенно, что при этом указанное выше ограничение снимается (подробнее о "деформированных" системах координат см. [8], [9]). Для функций φ, ψ, ψ', "медленно" меняющихся по r, разумеется, нет необходимости применять такую систему координат; значения этих функций на поверхности капли берутся при $r=a$.

Далее, представляем выражения (6') в виде

$$\begin{aligned} w_\theta &= \exp[-(1+i)y/\delta]/(y+a)\sum_{n=1}^{\infty}C_n dP_n(\cos\theta)/d\theta,\\ w'_\theta &= \exp[(1+i)y/\delta']/(y+a)\sum_{n=1}^{\infty}D_n dP_n(\cos\theta)/d\theta \end{aligned}\tag{7}$$

(C_n и D_n – неизвестные константы), после чего с помощью второго уравнения в (4) и используя известные свойства полиномов Лежандра, получаем

$$\begin{aligned} w_r &= -\delta(1-i)\exp[-(1+i)y/\delta]/2(a+y)^2\times\\ &\times\sum_{n=1}^{\infty}C_n n(n+1)P_n(\cos\theta),\\ w'_r &= \delta'(1-i)\exp[(1+i)y/\delta']/2(a+y)^2\times\\ &\times\sum_{n=1}^{\infty}D_n n(n+1)P_n(\cos\theta). \end{aligned}\tag{8}$$

Осталось еще выразить через ψ, ψ', $\mathbf{v}$ величины p_1, p'_1, $(1/R_1+1/R_2)$, входящие в первое граничное условие (5). Из уравнения состояния $p_1=\rho_1 c^2$ и уравнения неразрывности $i\omega\rho_1+\rho\,div\mathbf{v}=0$ (ρ_1 – возмущение плотности жидкости) следует, что возмущение давления зависит только от потенциальной составляющей звукового поля, то есть

$$p_1=-\rho(\dot\varphi+\dot\psi),\quad p'_1=-\rho'\dot\psi'.\tag{9}$$

Затем, согласно [10],

$$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=\frac{2}{a}-\frac{2\zeta}{a^2}-\frac{1}{a^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\zeta}{\partial\theta}\right),$$

и, очевидно, $\dot\zeta=v'_r\big|_{r=a}-v_0\cos\theta$, где v_0 – скорость колебательного движения центра тяжести капли. Далее, дифференцируя указанное граничное условие по времени и отбрасывая малые слагаемые, содержащие η и η' (пропорциональные $(\delta/a)^2$ и $(\delta'/a)^2$), запишем это условие в виде

$$\rho(\ddot\varphi+\ddot\psi)=\rho'\ddot\psi'-T\left[2v'_r+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial v'_r}{\partial\theta}\right)\right].\tag{10}$$

Используя формулы (1)–(3) и (7)–(10), получаем из граничных условий (5) систему уравнений для неизвестных A_m, B_m, C_n, D_n (n = 1, 2,...). Решая эту систему, получаем после вычислений

$$A_n = \frac{\Phi(-i)^{n+1}(ka)^{2n+1}\left[\left(\frac{\omega_n^2}{\omega^2}-1\right)\frac{\rho'}{\rho}+1+\frac{n}{n+1}\frac{\omega_n^2}{\omega^2}\right]}{\left\{[(2n-1)!!]^2\left(\frac{\omega_n^2}{\omega^2}-1\right)\left[1+(n+1)\frac{\rho'}{n\rho}\right]+i(ka)^{2n+1}(1+\Lambda_n)/(n+1)\right\}},$$

$$C_n = \frac{\Phi(-i)^{n+1}(2n+1)!!(ka)^{n}\left[\left(\frac{\omega_n^2}{\omega^2}-1\right)\frac{\rho'}{\rho}+1+\frac{n}{n+1}\frac{\omega_n^2}{\omega^2}\right]}{\left\{[(2n-1)!!]^2\left(\frac{\omega_n^2}{\omega^2}-1\right)\left[1+(n+1)\frac{\rho'}{n\rho}\right]+i(ka)^{2n+1}(1+\Lambda_n)/(n+1)\right\}n\left(1+\sqrt{\frac{\eta\rho}{\eta'\rho'}}\right)}, \tag{11}$$

$$D_n = -C_n\sqrt{\frac{\eta\rho}{\eta'\rho'}},$$

где

$$\frac{\omega_n^2}{\omega^2} = \frac{Tn(n-1)(n+2)}{\rho a^3\omega^2\left(\frac{n}{n+1}+\frac{\rho'}{\rho}\right)},$$

$$\Lambda_n = \frac{\delta[(2n+1)!!]^2(n+1)}{2an\left(1+\sqrt{\frac{\eta\rho}{\eta'\rho'}}\right)(ka)^{2n+1}}; \tag{11'}$$

при вычислениях использовались асимптотические представления функций h_n и j_n [11]:

$$h_n(z)|_{z\ll 1} = \frac{i(2n-1)!!}{z^{n+1}}+\frac{z^n}{(2n+1)!!},$$

$$j_n(z)|_{z\ll 1} = \frac{z^n}{(2n+1)!!}.$$

Кроме того, в числителях формул (11) при вычислениях отбрасывались малые величины, пропорциональные δ/a, а в мнимой части знаменателей в (11) принималось $\omega_n/\omega = 1$, так как при сколько-нибудь заметном отклонении частоты колебаний от резонансной мнимая часть в знаменателях становится пренебрежимо малой по сравнению с вещественной частью, и должна быть отброшена.

Диссипация энергии происходит, как уже говорилось, в пограничном слое и обусловлена соленоидальной частью поля скорости жидкости. Согласно теореме о диссипации механической энергии [10], применительно к нашему случаю, средняя по времени мощность диссипации на капле дается выражением

$$Q = \eta\int\left\langle\left(\frac{\partial w_\theta}{\partial y}\right)^2\right\rangle d\tau + \eta'\int\left\langle\left(\frac{\partial w'_\theta}{\partial y}\right)^2\right\rangle d\tau'; \tag{12}$$

интегрирование производится по объему пограничных слоев, угловые скобки означают усреднение по времени. Элемент объема $d\tau$ равен $-2\pi a^2 dxdy$ $(x = \cos\theta)$. Вычисление первого интеграла в (12) с помощью (7) и с учетом ортогональности полиномов Лежандра приводит после отбрасывания малых к выражению

$$\frac{\pi\eta}{\delta}\sum_{n=1}^{\infty}C_nC_n^*\int_{-1}^{1}(1-x)^2\left[\frac{dP_n(x)}{dx}\right]^2dx = \frac{2\pi\eta}{\delta}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2n+1}C_nC_n^*$$

(звездочка обозначает комплексно-сопряженное число). Так же вычисляется и второй интеграл. Суммируя оба результата и учитывая связь между C_n и D_n (11), получаем для средней мощности диссипации энергии (или тепловыделения) на одной капле

$$Q = \sum_{n=1}^{\infty}Q_n = \frac{2\pi\eta}{\delta}\left(1+\sqrt{\frac{\eta\rho}{\eta'\rho'}}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_nC_n^*n(n+1)}{2n+1}. \tag{13}$$

Эффективное сечение поглощения определяется как

$$\sigma = \sum_{n=1}^{\infty}\sigma_n, \quad \sigma_n = 2Q_n/\rho ck^2\Phi^*\Phi; \tag{13'}$$

σ_n – сечение поглощения, приходящееся на отдельную моду. Для первой моды ($n = 1$) получаем, используя (13) и (11)

$$\sigma_1 = \frac{12\pi a^2k\delta(1-\rho'/\rho)^2}{(1+2\rho'/\rho)^2\left(1+\sqrt{\frac{\eta\rho}{\eta'\rho'}}\right)}. \tag{14}$$

Для любой другой моды ($n \geq 2$) в отсутствие резонанса ($\omega_n/\omega \ll 1$) имеем также из (13) и (11)

$$\sigma_n = \frac{2\pi a^2(n+1)k\delta(ka)^{2n-2}(2n+1)(1-\rho'/\rho)^2}{n[(2n-1)!!]^2\left(1+\frac{n+1}{n}\rho'/\rho\right)^2\left(1+\sqrt{\frac{\eta\rho}{\eta'\rho'}}\right)}. \tag{15}$$

Результаты (14) и (15) получены в несколько ином виде в [3]. Сравнение их друг с другом показывает, что $\sigma_n/\sigma_1 \ll 1$. Таким образом, в отсутствие резонанса "вязкое" поглощение звука обусловлено только первой модой, то есть поступательным колебательным движением капли как целого.

В случае резонанса n-й моды ($\omega_n/\omega = 1$, $n \geq 2$) из (13'), (13) и (11) имеем

$$\sigma_n = \frac{4\pi(2n+1)\Lambda_n}{k^2(1+\Lambda_n)^2}. \tag{16}$$

Максимум поглощения достигается при $\Lambda_n = 1$, то есть

$$\sigma_{n\max} = (2n+1)\pi/k^2. \tag{17}$$

Интересно сравнить значения поглощенной (диссипированной) и рассеянной (дифрагированной) энергий в резонансе. Из (11) имеем для амплитуды потенциала рассеянного поля ($\omega_n/\omega = 1$, $n \geq 2$)

$$A_n = \frac{\Phi(-i)^{n+2}(2n+1)}{1+\Lambda_n}.$$

Учитывая, что на больших расстояниях $(kr \gg 1)$ $h_n(kr) = i^{n+1}\exp(-ikr)/kr$, получаем для потенциала рассеянного поля

$$\psi_n = \frac{-i(2n+1)\Phi\exp(-ikr)P_n(\cos\theta)}{(1+\Lambda_n)kr}.$$

Отсюда следует для дифференциального сечения рассеяния

$$dS_n = \frac{(2n+1)^2 P_n^2(\cos\theta)d\Omega}{(1+\Lambda_n)^2 k^2}$$

($d\Omega$ – элемент телесного угла), а полное сечение рассеяния дается формулой

$$S_n = \frac{4\pi(2n+1)}{(1+\Lambda_n)^2 k^2}. \tag{18}$$

Если пренебречь влиянием вязкости ($\Lambda_n = 0$), то (18) совпадает с известным результатом теории резонаторов [12]; таким образом, вязкость приводит к уменьшению рассеяния звука каплей – результат, который можно было ожидать. Если $\Lambda_n = 1$, то $S_n = (2n+1)\pi/k^2$, что совпадает с $\sigma_{n\max}$ (17). Таким образом, при максимально возможном поглощении звука каплей в поле плоской волны поглощенная энергия равна рассеянной энергии. Согласно принципу Бабине, равенство поглощенной и рассеянной энергий имеет место, когда тело, находящееся в поле плоской волны, полностью поглощает падающую на него энергию (см. [13]). Поэтому можно сказать, что в данном случае диссипация энергии на капле такая же, как была бы при облучении звуком "черного" диска площадью $(2n+1)\pi/k^2$, расположенного поперек распространяющейся волны.

Применим полученные выше результаты к случаю плоской волны в эмульсии. В среде с однородной концентрацией одинаковых капель эмульсии в отсутствие взаимодействия между каплями коэффициент поглощения волны β определяется выражением

$$\frac{\beta\lambda}{\varepsilon} = \frac{3\sigma}{4a^3k} = \frac{3}{4a^3k}\left(\sigma_1 + \sum_{n=2}^{\infty}\sigma_n\right), \tag{19}$$

где λ – длина волны звука, ε – относительный объем капель эмульсии. В отсутствие резонанса, в силу сказанного выше, вкладом деформационных мод ($n \geq 2$) в (19) можно пренебречь. В случае резонанса n-ой моды из (14), (16) и (19) следует

$$\frac{\beta\lambda}{\varepsilon} = 3\pi\left[\frac{3(1-\rho'/\rho)^2\delta/a}{(1+2\rho'/\rho)^2\left(1+\sqrt{\frac{\eta\rho}{\eta'\rho'}}\right)} + \frac{(2n+1)\Lambda_n}{(ka)^3(1+\Lambda_n)^2}\right]. \tag{20}$$

Рассмотрим теперь *затухание* плоской волны, вызванное не только поглощением, но и рассеянием звука на каплях эмульсии; для этого нужно в формуле (19) к сечению поглощения σ прибавить сечение рассеяния S. Тогда вместо (20), учитывая (16) и (18), получаем для коэффициента затухания γ (рассеянием первой моды, очевидно, можно пренебречь)

$$\frac{\gamma\lambda}{\varepsilon} = 3\pi\left[\frac{3(1-\rho'/\rho)^2\delta/a}{(1+2\rho'/\rho)^2\left(1+\sqrt{\frac{\eta\rho}{\eta'\rho'}}\right)} + \frac{2n+1}{(ka)^3(1+\Lambda_n)}\right]. \tag{21}$$

Формула (21) описывает затухание плоской волны, обусловленное (вязкостным) поглощением и рассеянием звука в эмульсии при резонансном возбуждении n-й (деформационной) моды у капель эмульсии ($\omega_n/\omega = 1$, $n \geq 2$).

Рассмотрим подробнее резонансный вклад в затухание звука. Из (11') следует (при $\omega_n/\omega = 1$)

$$\Lambda_n = \frac{[(2n+1)!!]^2(n+1)\left[\eta c\left(\frac{n}{n+1}+\frac{\rho'}{\rho}\right)\right]^{1/2}}{\left[2\mathrm{T}n^3(n-1)(n+2)\right]^{1/2}(ka)^{2n+1/2}\left[1+(\eta\rho/\eta'\rho')^{1/2}\right]},$$

$$a = \frac{\mathrm{T}n(n-1)(n+2)}{\rho c^2(ka)^2\left(\frac{n}{n+1}+\frac{\rho'}{\rho}\right)}, \quad \omega = \frac{\rho c^3(ka)^3\left(\frac{n}{n+1}+\frac{\rho'}{\rho}\right)}{\mathrm{T}n(n-1)(n+2)}, \tag{22}$$

$$\frac{\delta}{a} = \left[\frac{2\eta cka\left(\frac{n}{n+1} + \frac{\rho'}{\rho}\right)}{Tn(n-1)(n+2)}\right]^{1/2}.$$

Последние три формулы в (22) суть выражения для резонансных значений обозначенных величин как функций параметра ka. Видно, что Λ_n быстро растет с увеличением n. Для известных жидкостей (и газов) Λ_n всегда велико, поэтому резонансный вклад в затухание звука (второе слагаемое в правой части (21)) пропорционален величине $(ka)^{2n-5/2}$ (в цитированной выше работе [3] этот вклад оценивается как пропорциональный $(ka)^{2n}$, что, как видим, неверно). В то же время первое слагаемое в (21), обусловленное "обычным" поглощением звука, связанным с поступательным колебательным движением капли как целого (первая мода), пропорционально $(ka)^{1/2}$, как это видно из последней формулы в (22). Если компоненты эмульсии не слишком сильно различаются по своим свойствам, то второе слагаемое в (21) всегда пренебрежимо мало по сравнению с первым, но в других случаях оно может преобладать. Например, если $\rho'/\rho \sim 10^{-3}$ (для простоты считаем, что это воздушные пузырьки в воде) и $n = 2$ (квадрупольные колебания), из (22) следует, что отношение второго слагаемого в (21) к первому слагаемому по порядку величины равно $\sim ka \times 10^3$, и если положить, например, $ka = 10^{-2}$, то резонансный вклад в затухание звука превосходит "вязкий" вклад, связанный с первой модой, в десятки раз; при этом из (22) следует, что $a \sim 10^{-5}$ м, $\omega = 10^6$ рад/с, $\delta/a \sim 0.1$. Однако в этом случае "термический" вклад в затухание звука (нулевая мода) еще более существенно превосходит указанный "вязкий" вклад (см. начало статьи) и поэтому "маскирует" резонансный эффект. Таким образом, резонансные капиллярные колебания капель практически не влияют на затухание звука в эмульсиях. Это – довольно неожиданный результат; теоретически ведь Λ_n (22) может принимать любые значения (при фиксированных резонансных значениях a и ω), и если бы Λ_n было не очень большим, то резонансный вклад многократно превосходил бы "обычное" поглощение, связанное с нулевой и первой модами. Но действительные свойства известных жидкостей и газов таковы, что Λ_n всегда достаточно велико для того, чтобы резонансный эффект был незаметен на фоне "обычного" поглощения звука. Таким образом, капиллярные колебания капель (в том числе резонансные) не оказывают заметного влияния на распространение звука в эмульсиях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Исакович М.А.* О распространении звука в эмульсиях // ЖЭТФ. 1948. Т. 18. № 10. С. 907–912.
2. *Рытов С.М., Владимирский В.В., Галанин М.Д.* Распространение звука в дисперсных системах // ЖЭТФ. 1938. Т. 8. № 5. С. 614–621.
3. *Ратинская И.А.* О затухании звука в эмульсиях // Акуст. журн. 1962. Т. 8. № 2. С. 210–215.
4. *Allinson P.A., Richardson E.G.* The propagation of ultrasonik in suspensions of liquid globules in another liquid // Proc. Phys. Soc. 1958. V. 72. № 5. № 467. P. 833–840.
5. *Arcidiacono S., Poulokakos D., Ventikos Y.* Oscillatory behavior of nanodroplets // Phys. Rev. E. 2004. V. 70. № 1. P. 1. 011505/1–011505/7.
6. *Жаров А.Н., Григорьев А.И.* О временной эволюции формы поверхности деформированной в начальный момент заряженной капли вязкой жидкости // ЖТФ. 2005. Т. 75. № 1. С. 22–31.
7. *Marston P.* Shape oscillation and static deformation of drop and bubbles driven by modulated radiation stresses – Theory // J. Acoust. Soc. Amer. 1980. V. 67. № 1. P. 15–26.
8. *Longuet-Higgins M.S.* Mass transport in water waves // Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A245. 1953. P. 535–581 мм.
9. *Мурга В.А.* Акустическое течение в звуковом поле вблизи свободной границы // Акуст. журн. 2003. Т. 49. № 3. С. 400–40.
10. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
11. Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 832 с.
12. *Стретт Дж.В.* (лорд Рэлей). Теория звука. Т. 2. М.: ГИТТЛ, 1955. 476 с.
13. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля. М.: Наука, 1967. 460 с.