АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2011, том 57, № 4, с. 438–442

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК 534.21

ОСОБЕННОСТИ ДИСПЕРСИИ НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН В ПЕРИОДИЧЕСКИХ СТРУКТУРАХ

© 2011 г. Ю. И. Бобровницкий

Учреждение Российской академии наук
Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН
101990 Москва, Малый Харитоньевский пер. 4
E-mail: yuri@imash.ac.ru

Поступила в редакцию 17.02.2011 г.

Дисперсионные зависимости нормальных волн в периодических структурах по своей природе многозначны. Физически оправданный выбор единственной ветви дисперсии для каждой волны требует привлечения дополнительной информации. Обсуждаются вопросы снижения неопределенности в выборе дисперсии, в частности, на основе предельного перехода от анализируемой периодической структуры к другой структуре, для которой дисперсионные зависимости известны более определенно. Отмечены и исправлены некоторые неточности и ошибки в известных публикациях, связанные с неоднозначностью дисперсии.

Ключевые слова: периодические системы, нормальные волны, дисперсия волн, неоднозначность дисперсии.

Теория распространения волн по линейным периодическим структурам представляет собой хорошо разработанную область, многократно проверенную в течение более ста лет. В ней, однако, имеются особенности, которые являются причиной регулярного появления в литературе не вполне корректных результатов и утверждений. Главная из особенностей – неоднозначность дисперсии нормальных волн, которая может вызывать трудности в выборе для каждой волны единственной ветви дисперсии. Цель данного сообщения – пояснить эту особенность, обсудить способы снижения неопределенности в выборе дисперсии и указать на некоторые связанные с ней неточности в публикациях по акустике.

Напомним кратко основные положения имеющейся в настоящее время теории распространения волн в периодических структурах [1–3]. Для определенности рассмотрим одномерную структуру – цепочку из одинаковых ячеек. Пусть ячейка имеет длину l, описывается полевой величиной $u(x)$, например смещением, где x пробегает координаты всех степеней свободы ячейки: если ячейка непрерывна, то $u(x)$ есть функция; если ячейка дискретна и имеет конечное число N степеней свободы, то $u(x) = [u(x_1), u(x_2), ..., u(x_N)]^T$ – это N-вектор смещений.

Наиболее важным результатом теории является теорема Флоке, согласно которой элементарное гармоническое во времени волновое движение в цепочке, называемое нормальной волной, имеет следующий вид

$$u(x + nl) = u(x)\exp[i(\mu n - \omega t)], \qquad (1)$$

где $x \in [0, l]$, μ – безразмерная постоянная распространения, n – номер ячейки, ω – частота, t – время, i – мнимая единица. Нормальная волна в периодической структуре характеризуется формой колебаний ячейки $u(x)$ и постоянной распространения μ. Форма колебаний всех ячеек одна и та же. Собственно волновой характер решения (1) определяется его экспоненциальным множителем. Если постоянная распространения действительна, то нормальная волна является распространяющейся, а величина μ показывает изменение ее фазы на длине l одной ячейки периодичности. Если постоянная распространения комплексна, то нормальная волна является неоднородной, ее действительная часть $\mathrm{Re}(\mu)$ показывает изменение фазы, а мнимая часть $\mathrm{Im}(\mu)$ – величину убывания амплитуды волны на длине одной ячейки. Заметим, что в литературе теорему называют также теоремой Флоке–Ляпунова и теоремой Блоха. Сам Ж. Флоке доказал ее для функции одной переменной, удовлетворяющей известному уравнению Матье [4]. А.М. Ляпунов обобщил ее на вектор-функции одной переменной [5], а Ф. Блох – на функции нескольких переменных [6]. Теорема является прямым следствием трансляционной симметрии структуры.

В зависимости от характера соединения соседних ячеек, в структуре может существовать несколько независимых типов нормальных волн, каждая из которых характеризуется своей постоянной распространения $\mu_j(\omega)$ и отдельной формой колебаний ячейки $u_j(x), j = 1, 2, ..., J$. Число J типов нормальных волн на каждой частоте равно числу независимых механизмов обмена энергией между смежными

ячейками. Любое движение в структуре является линейной комбинацией J прямых нормальных волн, распространяющихся или убывающих в сторону возрастания номера ячейки n, и J обратных нормальных волн, отличающихся знаком постоянной распространения, т.е. распространяющихся или убывающих в обратном направлении.

Ключевой характеристикой нормальной волны является ее дисперсия, т.е. зависимость постоянной распространения от частоты, $\mu(\omega)$. Дисперсия определяет ее фазовую и групповую скорости и некоторые другие свойства. Наиболее важной особенностью дисперсии волн в периодических структурах, которая и обсуждается в данной статье, состоит в многозначности функции $\mu(\omega)$. Действительно, уравнение (1) не меняется, если постоянную распространения μ заменить на $\mu + 2\pi m$, где m – любое целое число. Это означает, что для каждой нормальной волны вместо одного существует бесконечно много значений постоянной распространения μ. Более того, из-за того, что знак $\mu + 2\pi m$ зависит от знака m, то даже направление распространения или убывания волны определено неоднозначно. Эта неопределенность дисперсии является следствием того, что фаза волны (1) наблюдается только в дискретных точках, отстоящих друг от друга на расстояние длины ячейки периодичности.

Чтобы избавиться от неопределенности и из бесконечного числа значений выбрать одно верное, требуется дополнительная информация о волне. В ряде случаев такой выбор не встречает затруднений. Если, например, рассматриваемая структура представляет собой непрерывную однородную среду с периодической неоднородностью, для постоянной распространения следует выбирать те значения, которые при стремлении периодической неоднородности к нулю переходят в дисперсию для несущей однородной среды. Однако для дискретных периодических структур, таких как кристаллические решетки или электрические фильтры, а также для многих непрерывных сред, выбор единственного значения μ не так прост, а чаще всего просто невозможен, так что значения $\mu + 2\pi m$ оказываются равнозначными для всех m.

В физике твердого тела [1, 7] договорились в таких случаях изображать дисперсию не на всей оси μ, а только в основном интервале, называемом первой зоной Бриллюэна, которая соответствует самым длинным прямым и обратным волнам. Для рассматриваемой здесь одномерной цепочки первой зоной Бриллюэна является интервал $[-\pi, \pi]$. Все остальные значения постоянной распространения μ лежат во второй зоне Бриллюэна $[-2\pi, -\pi]$ & $[\pi, 2\pi]$, третьей зоне $[-3\pi, -2\pi]$ & $[2\pi, 3\pi]$ и т.д., отличаясь от значений в первой зоне на $2\pi m$. Это правило распространилось также и на периодические структуры в других областях науки. Еще раз подчеркнем, что хотя согласно этому правилу дисперсию принято строить лишь в первой зоне, физически верные значения постоянной распространения могут лежать в других зонах. Это обстоятельство и является потенциальным источником неточностей и ошибок, появляющихся в литературе.

Одним из последних известных автору примеров ошибочных результатов является статья [8], которая претендует на обобщение теоремы Флоке и на открытие новых типов волн в периодических структурах. Хотя в этой статье рассматриваются довольно сложные слоистые периодические среды, смысл полученных там результатов удобнее пояснить на более простых структурах. С этой целью мы рассмотрим самую простую из всех известных периодических структур – цепочку Ньютона, которая состоит из одинаковых частиц, отстоящих на расстояние l друг от друга и взаимодействующих только с ближайшими соседями, скажем, через пружинки. На примере цепочки Ньютона будет ясна также некорректность некоторых других утверждений в публикациях.

Гармоническое движение частоты ω цепочки Ньютона удовлетворяет системе уравнений в конечных разностях [1]

$$u_{n-1} - 2au_n + u_{n+1} = 0, \quad n\text{– целое}, \tag{2}$$

где u_n – смещение n-й частицы и

$$a = 1 - \frac{\varepsilon^2}{2}, \quad \varepsilon = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}, \tag{3}$$

m – масса частицы, k – жесткость пружинки, соединяющей две смежные частицы. Подставив выражение для нормальной волны (1) в уравнения (2), получим известное дисперсионное уравнение

$$\cos(\mu) - a = 0. \tag{4}$$

Так как в цепочке Ньютона имеется лишь один механизм передачи энергии от ячейки к ячейке (это произведение силы, действующей на частицу, и ее скорости), в ней существует только один тип нормальных волн, так что в первой зоне Бриллюэна $[-\pi, \pi]$ дисперсионное уравнение (4) имеет два корня, отличающиеся знаком. На низких частотах ($\varepsilon \le 2$) корни действительны, $\mu = \arccos(a)$, кривые дисперсии выходят из начала координат, образуя так называемые акустические ветви (сплошные линии на рис. 1), а нормальная волна является распространяющейся. На высоких частотах ($\varepsilon > 2$) корни комплексны, $\mu = \pi \pm i\arccos(-ia)$, а волна неоднородна. Вне первой зоны дисперсионные кривые повторяются через каждые 2π (штриховые линии на рис. 1).

Все зоны Бриллюэна цепочки Ньютона на рис. 1 являются равнозначными. Чтобы уменьшить неопределенность в выборе физически значимых ветвей, нужна дополнительная информация о волне. Чтобы пояснить связь между количеством информации и неопределенностью в выборе, покажем

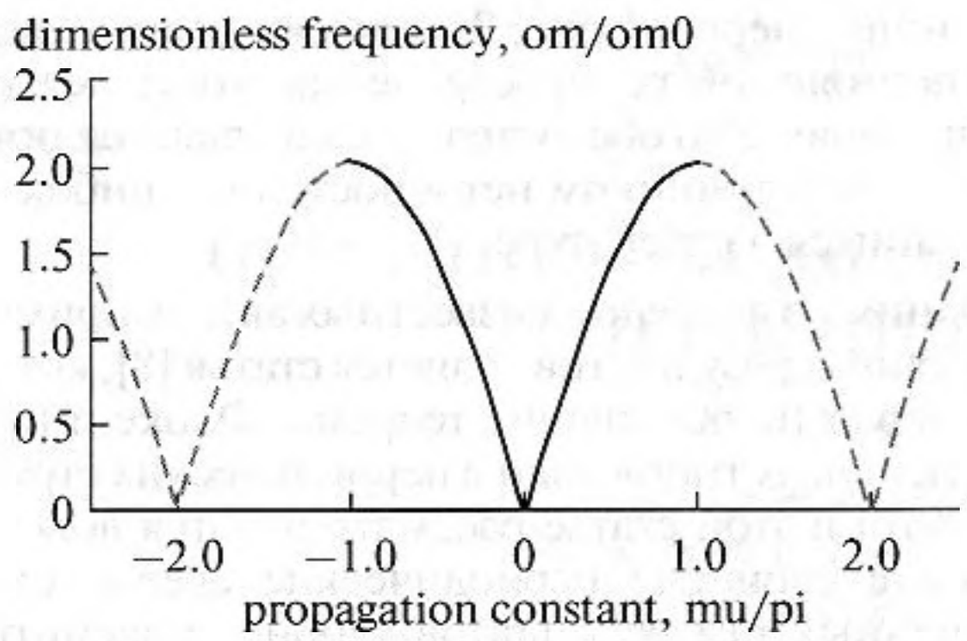

Рис. 1. Действительные ветви дисперсии нормальной волны цепочки Ньютона в первой зоне Бриллюэна (сплошные линии) и других зонах (штриховые линии): μ – постоянная распространения, безразмерная частота равна ω/ω_0 (3).

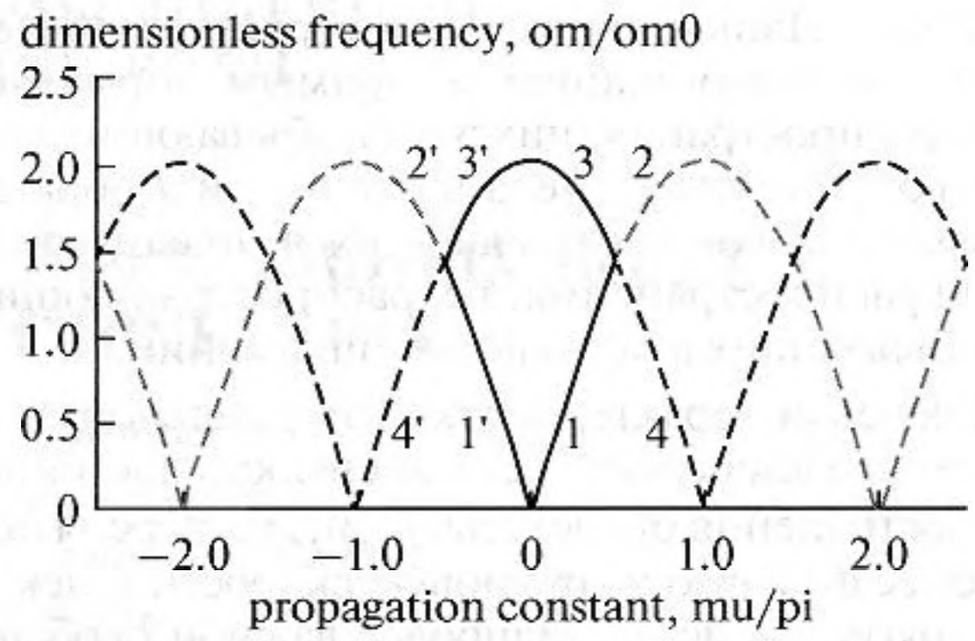

Рис. 2. Действительные ветви дисперсии нормальной волны цепочки Ньютона из сдвоенных ячеек. Обозначения как на рис. 1.

сначала, что уменьшение количества информации увеличивает неопределенность.

Так как цепочка Ньютона кроме минимального периода l имеет также периоды $2l$, $3l$, и т.д., то она может рассматриваться и как цепочка из одинаковых "суперячеек", содержащих, например, по M элементарных ячеек. Применяя к ней теорему Флоке, можно записать

$$u(y + Ml) = u(y)\exp[i(\xi n - \omega t)]. \qquad (5)$$

Здесь n – номер суперячейки, $u(y) = [u_1, u_2, ..., u_M]^T$ – вектор смещений M частиц суперячейки, $\xi = M\mu$ – безрамерная постоянная распространения, определяющая набег фазы (или степень убывания) нормальной волны на длине суперячейки Ml. Переход от цепочки с элементарными ячейками к цепочке из суперячеек можно интерпретировать как уменьшение количества информации о волне в M раз. Покажем, что неопределенность выбора дисперсии при этом увеличивается в M раз. Действительно, так как длина суперячейки равна Ml, то размер зон Бриллюэна здесь равен $2\pi/M$. В каждой из зон имеется по два корня дисперсионного уравнения для ξ. Соответственно, в интервале $[-\pi, \pi]$ теперь содержится $2M$ корней, т.е. в M раз больше, чем корней уравнения (4). Таким образом, если волна наблюдается не на всех частицах, а только на каждой M-й частице, то число возможных ветвей дисперсии увеличивается в M раз и, соответственно, увеличивается неопределенность в выборе дисперсии.

Верно и обратное утверждение: если волна наблюдается в большем числе точек и количество информации о волне возрастает, то число возможных ветвей дисперсии уменьшается, а неопределенность в выборе ветвей дисперсии сокращается. Проиллюстрируем это более подробно на цепочке из сдвоенных ячеек ($M = 2$).

Пусть суперячейка состоит из двух элементарных ячеек, имеет длину $2l$ и волновые движения наблюдаются только на частицах с четными номерами. Уравнения в конечных разностях для такой цепочки нетрудно получить из уравнений (2), исключив из них смещения частиц с нечетными номерами

$$u_{n-2} - 2bu_n + u_{n+2} = 0, \quad b = 2a^2 - 1, \qquad (6)$$

где n четное, a дано в (3). Дисперсионное уравнение получается после подстановки (5) в (6) и имеет вид ($\xi = 2\mu$)

$$\cos(2\mu) - b = 0 \text{ или } \cos^2(\mu) - a^2 = 0. \qquad (7)$$

Соответственные дисперсионные кривые представлены на рис. 2. Так как в цепочке существуют нормальные волны только одного типа, в первой зоне Бриллюэна $[-\pi/2, \pi/2]$, как и во всех остальных зонах, содержатся по два корня уравнения (7) с противоположными знаками (сплошные линии на рис. 2). В отличие от дисперсии на рис. 1, здесь кроме акустических ветвей, помеченных на рис. 2 цифрами *1* и *1'*, есть две оптические ветви *3* и *3'*. Кривые первой зоны периодически повторяются с интервалом π.

Хотя дисперсионные кривые на рис. 1 и 2 относятся к одной и той же нормальной волне, между ними имеется заметная разница. Прежде всего, число корней дисперсионного уравнения (7) в два раза больше, чем уравнения (4), а число ветвей дисперсии на рис. 2 вдвое больше, чем на рис. 1. Кривые на рис. 2, состоящие из отрезков *1*, *2* и *1'*, *2'*, в точности совпадают с кривыми на рис. 1, а кривые *3*, *4*, *3'*, *4'* отсутствуют на рис. 1. Эти последние кривые удовлетворяют уравнению (7), а также уравнению

$$\cos(\mu) + a = 0, \qquad (8)$$

но не удовлетворяют уравнению (4). Более того, нетрудно убедиться, что нормальная волна с такой дисперсией не удовлетворяет уравнениям в конечных разностях (2), хотя и удовлетворяет уравнениям (6) для четных частиц. Физический анализ также указывает на то, что эта дисперсионная зависимость является ложной для цепочки Ньютона. Например, известно [1], что в окрестности соб-

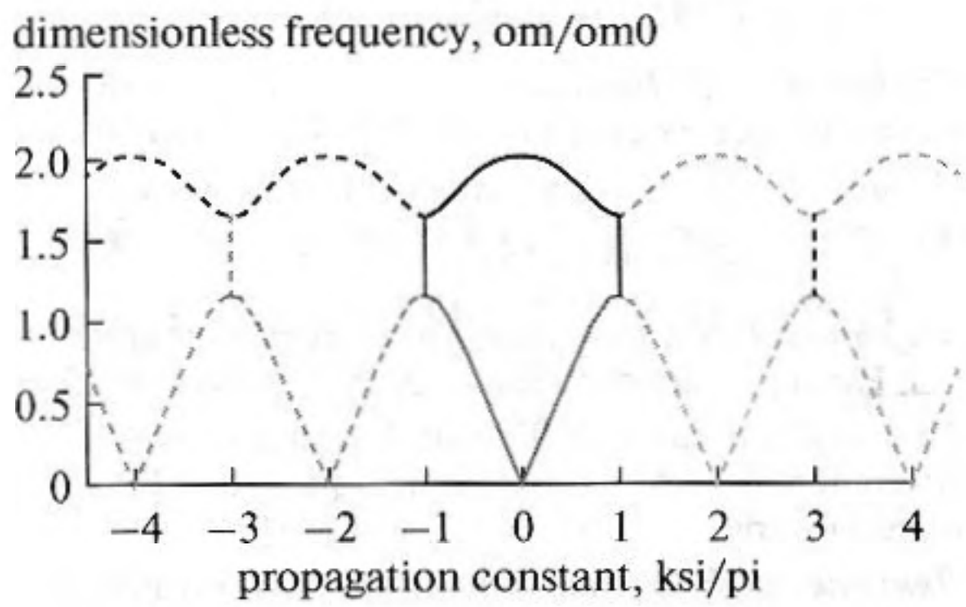

Рис. 3. Действительные ветви дисперсии нормальной волны цепочки Борна ($m_1 = 2m_2$), построенные по общепринятым правилам [1, 7]. Сплошные линии соответствуют первой зоне Бриллюэна.

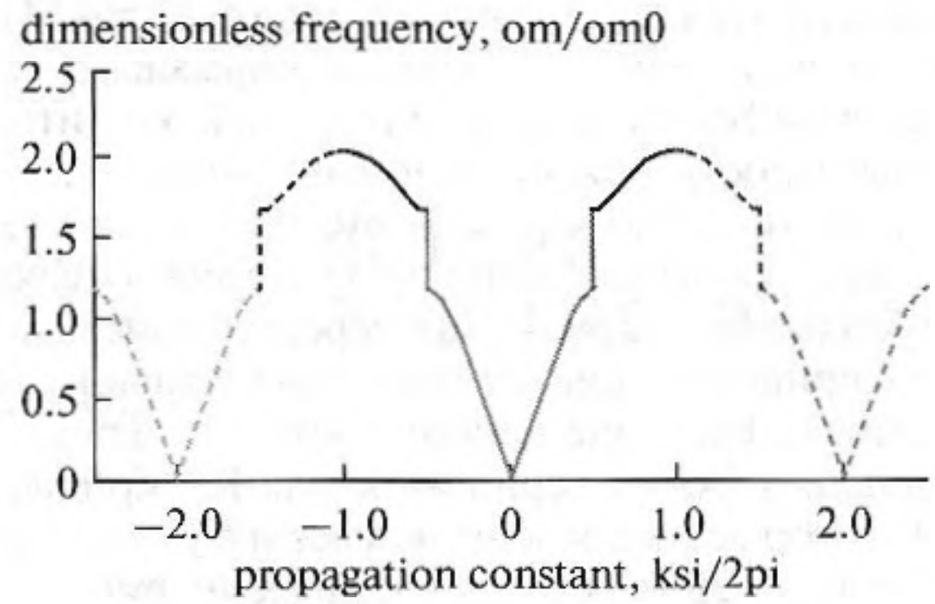

Рис. 4. Действительные ветви дисперсии нормальной волны той же цепочки Борна, что и на рис. 3, но построенные с учетом предельного перехода к цепочке Ньютона ($m_2 = m_1$). Сплошные линии соответствуют основному интервалу дисперсии.

ственной частоты $\varepsilon = 2$ четные и нечетные частицы движутся в противофазе, поэтому набег фазы нормальной волны между смежными частицами равен π, а между соседними четными частицами он равен 2π, а не нулю, как показано на рис. 2. Таким образом, при переходе от цепочки со сдвоенными ячейками к цепочке с элементарными ячейками каждый второй корень дисперсионного уравнения (7) оказывается ложным, не отвечающим реальному движению частиц в цепочке.

В более общем случае при переходе от цепочки из суперячеек, содержащих по M элементарных ячеек, к обычной цепочке Ньютона только один из M корней дисперсионного уравнения имеет физический смысл, остальные $M - 1$ корней являются паразитными и должны быть отброшены. Этот результат верен не только для цепочки Ньютона, но и для любой другой линейной периодической структуры.

Возвращаясь к работе [8], отметим, что именно эти паразитные корни дисперсионного уравнения структуры из суперячеек авторы ошибочно считают истинными, соответственные нормальные волны они считают волнами нового типа, а решения типа (5) принимают за обобщение теоремы Блоха. Как ясно из проведенного выше анализа, никакого обобщения основной теоремы в статье [8] не сделано и никаких волн нового типа не открыто. В любой линейной периодической структуре могут существовать только нормальные волны, предписанные классической теоремой Флоке, а любое движение бесконечной, полубесконечной или конечной периодической структуры полностью описывается линейными комбинациями этих нормальных волн.

Рассмотрим еще одну довольно часто встречающуюся в литературе неточность, связанную с многозначностью дисперсии в периодических структурах. На рис. 3 приведены хорошо известные из учебников физики дисперсионные кривые нормальной волны в цепочке Борна [1, 7], состоящей из равноотстоящих двух чередующихся частиц с разными массами m_1, m_2 и со смежным взаимодействием (она моделирует кристалл поваренной соли). Гармоническое во времени движение цепочки описывается системой уравнений в конечных разностях [1]

$$v_{n-1} - 2a_1u_n + v_n = 0, \quad u_n - 2a_2v_n + u_{n+1} = 0,$$

где u_n и v_n — смещения частиц, n — номер ячейки периодичности,

$$a_1 = 1 - \frac{\omega^2}{2\omega_1^2}, \quad a_2 = 1 - \frac{\omega^2}{2\omega_2^2}, \quad \omega_1^2 = \frac{k}{m_1}, \quad \omega_2^2 = \frac{k}{m_2}.$$

Подставляя в них решение Флоке $[u_n, v_n] = [u_0, v_0] \times \times \exp(i\xi n)$, нетрудно получить форму колебаний ячеек $[u_0, v_0]$ и дисперсионное уравнение единственной нормальной волны цепочки Борна

$$\cos(\xi) = 2a_1a_2 - 1.$$

Графики на рис. 3 соответствуют $m_1/m_2 = 2$ и $\omega_0^2 = \left(\omega_1^2 + \omega_2^2\right)/2$. Дисперсия состоит из акустических ветвей на частотах от нуля до $\omega/\omega_0 = 1.15$ и оптических ветвей на частотах [1.63; 2]. Между ними располагается частотная полоса непропускания, в которой нормальная волна имеет комплексную постоянную распространения с действительной частью $\mathrm{Re}(\xi) = \pm\pi$.

В соответствии с общепринятым правилом кривые обычно изображаются только в первой зоне Бриллюэна (сплошные линии на рис. 3). Подразумевается, однако, что зависимость $\xi(\omega)$ многозначна и кривые на рис. 3 повторяются по оси ξ бесконечное число раз (штриховые линии). К сожалению, некоторые авторы, например [3, 9], забывая о многозначности, делают из рис. 3 ошибочный вывод о том, что для волны оптической ветви фазовая и групповая скорости имеют разные знаки и что, следовательно, поваренная соль и вещества с подобной кристаллической решеткой относятся к средам с отрицательной рефракцией Веселаго [10, 11].

В действительности это, конечно, не так. Правильные дисперсионные кривые нормальной волны цепочки Борна показаны на рис. 4. Убедиться в их правильности можно, положив, что обе частицы имеют одинаковую массу. В этом случае цепочка Борна превращается в цепочку Ньютона со сдвоенными ячейками, а кривые дисперсии на рис. 3 переходят в кривые на рис. 2. Поскольку правильными для цепочки Ньютона являются кривые на рис. 1, то для цепочки Борна верными являются кривые на рис. 4, которые при равенстве масс и с учетом соотношения $\xi = 2\mu$ переходят в кривые на рис. 1. Для них знаки фазовой и групповой скоростей, очевидно, совпадают в основном интервале на всех частотах (сплошные линии на рис. 4).

Подведем итог изложенному в данной статье. Дисперсионные зависимости нормальных волн в периодических структурах по своей природе многозначны. Не существует общих процедур для физически оправданного выбора однозначной зависимости для каждой волны, что является источником регулярного появления в публикациях неточностей и ошибок. В ряде случаев правильный выбор дисперсии позволяет сделать предельный переход от анализируемой периодической структуры к другой структуре, однородной или периодической, для которой дисперсионные зависимости известны более определенно. Полезным также является общее правило: чем больше информации о волне, тем меньше неопределенность в выборе дисперсии, и наоборот. Близкие вопросы дисперсии обсуждаются также в статье [12].

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 09-02-01217-а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бриллюэн Л., Пароди М.* Распространение волн в периодических структурах. М.: ИЛ, 1959. 460 с.
2. *Элаши Ш.* Волны в активных и пассивных периодических структурах // ТИИЭР. 1976. Т. 64. № 12. С. 1666–1698.
3. *Maynard J.D.* Wave propagation in arrays of scatterers tutorial: Part 1 // Acoustics Today. 2008. V. 4. № 4. P. 12–21.
4. *Floquet G.* On linear differential equations with periodic coefficients // Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Superieure. 1883. V. 12. P. 47–89.
5. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. Харьков: Харьковский университет, 1892 (см. также *Ляпунов А.М.* Избранные работы по теории устойчивости. М.: Наука, 2007. С. 27–301).
6. *Bloch F.* About the quantum mechanics of electron in crystal lattices // Zeitschrift fur Physik. 1928. V. 52. P. 555–600.
7. *Борн М., Кунь Х.* Динамическая теория кристаллических решеток. М.: ИЛ, 1958. 488 с.
8. *Chen S., Lin S., Wang Z., Tang T.* The Bloch theorem generalized for semi-infinite periodic systems // Acta Acustica united with Acustica. 2008. V. 94. № 4. P. 528–533.
9. *Мандельштам Л.И.* Групповая скорость в кристаллической решетке // ЖЭТФ. 1945. Т. 15. С. 475–478 (см. также *Мандельштам Л.И.* Полное собрание трудов. Т. 2 под ред. С.М. Рытова. М.: АН СССР, 1947. С. 334–338).
10. *Веселаго В.Г.* О свойствах веществ с одновременно отрицательными значениями диэлектрической и магнитной восприимчивостей // Физика твердого тела. 1966. Т. 8. № 12. С. 3571–3573.
11. *Буров В.А., Дмитриев К.В., Сергеев С.Н.* Акустические дважды отрицательные среды // Акуст. журн. 2009. Т. 55. № 3. С. 292–306.
12. *Ланда П.С., Марченко В.Ф.* К линейной теории волн в средах с периодической структурой // УФН. 1991. Т. 161. № 9. С. 830–834.