АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2012, том 58, № 3, с. 291–295

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК 534.26

ЗВУКОВОЕ ПОЛЕ ВО ФРЕНЕЛЕВОЙ ЗОНЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ПЛОСКОГО ИЗЛУЧАТЕЛЯ С НЕРАВНОМЕРНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СКОРОСТИ

© 2012 г. И. А. Урусовский

Акустический институт им. акад. Н.Н. Андреева

117036 Москва, ул. Шверника 4

E- mail: urusovskii_ia@mail.ru

Поступила в редакцию 14.09.2011 г.

На основе интеграла Рэлея получена формула для звукового давления, создаваемого осесимметричным плоским излучателем в жестком экране, при неравномерном распределении нормальной составляющей колебательной скорости и гармоническом режиме колебаний. Формула получена при условии более слабом, чем условие нахождения точки наблюдения в зоне Фраунгофера. Оно требует малости не размеров излучателя по сравнению с размером зоны Френеля, проведенной из точки наблюдения, а лишь величины, меньшей в число раз, равное квадратному корню из отношения расстояния точки наблюдения до центра излучателя к половине его радиуса. В случае распределения колебательной скорости в виде полинома по четным степеням радиальной координаты поле на оси симметрии представлено конечной суммой элементарных функций.

Ключевые слова: излучение звука, зона Френеля.

Звуковое давление, создаваемое в среде произвольно колеблющимся элементом плоского излучателя площади dS, расположенного в плоском жестком экране, равно

$$dp(t) = \frac{\rho}{2\pi R}\frac{\partial}{\partial t}v\left(t - \frac{R}{c}\right)dS,$$

где R – расстояние от точки наблюдения до центра элемента dS излучателя, $v(t)$ – скорость его колебаний, t – время, ρ – плотность среды, c – скорость звука в ней. Отсюда полное звуковое давление представляется интегралом Рэлея [1]

$$p(t,r,z) = \frac{\rho}{2\pi}\int\limits_S \frac{\partial}{\partial t}v\left(t - \frac{R}{c}\right)\frac{1}{R}dS, \qquad (1)$$

где интегрирование проводится по всей поверхности излучателя, r и z – цилиндрические координаты точки наблюдения. В общем случае расчет поля требует двойного интегрирования, но при равномерном распределении нормальной составляющей скорости оно может быть сведено к однократному интегрированию или даже проведено до конца [2–5]. Однако проблема уменьшения числа интегрирования и получения удобных расчетных формул остается даже при осесимметричном распределении нормальной составляющей скорости по излучающей поверхности.

Проведем расчет звукового давления при осесимметричном распределении нормальной составляющей скорости вида $v(t,\eta) = v_0 u(t) F\left(\eta^2/a^2\right)$ по излучающей поверхности, где η – радиальная координата, a – радиус излучателя, в общем случае $u(t) = \exp(-i\omega t)$, ω – круговая частота, но для расчета поля на оси излучателя $u(t)$ может быть произвольной функцией времени. При этом (1) сводится к виду

$$p(t,r,z) = \rho v_0 \frac{1}{\pi}\int\limits_0^a F\left(\frac{\eta^2}{a^2}\right)d\eta\int\limits_0^\pi \dot{u}\left(t - \frac{R}{c}\right)\frac{\eta}{R}d\varphi, \qquad (2)$$

где $R^2 = R_\perp^2 + z^2$,

$$R_\perp^2 = r^2 + \eta^2 - 2r\eta\cos\varphi, \qquad (3)$$

r – расстояние от центра поршня до проекции точки наблюдения на плоскость поршня. Отсюда и из (2) и (3) следует $R^2 = R_0^2 + \eta^2 - 2r\eta\cos\varphi$,

$$p\left(t + \frac{R_0}{c}, r, z\right) = \\ = \rho v_0 \frac{1}{\pi}\int\limits_0^a \eta F\left(\frac{\eta^2}{a^2}\right)d\eta\int\limits_0^\pi \dot{u}\left(t - \frac{R - R_0}{c}\right)\frac{1}{R}d\varphi, \qquad (4)$$

где $R_0^2 = r^2 + z^2$, $\frac{R}{R_0} = \sqrt{1 + \frac{\eta}{R_0}\left(\frac{\eta}{R_0} - 2\sin\theta\cos\varphi\right)} =$

$$= 1 - \frac{\eta}{R_0}\sin\theta\cos\varphi + \frac{\eta^2}{2R_0^2}\left(1 - \sin^2\theta\cos^2\varphi\right) + O\left(\frac{\eta^3}{R_0^3}\right),$$

$\sin\theta = r/R_0$, $\frac{R_0}{R} = 1 + \frac{\eta}{R_0}\sin\theta\cos\varphi - \frac{\eta^2}{2R_0^2} \times$

$\times\left(1-3\sin^2\theta\cos^2\varphi\right)+O\left(\frac{\eta^3}{R_0^3}\right)$. Пренебрежем здесь слагаемыми порядка $(\eta/R_0)^3$, что для $k(r-R_0)$ соответствует условию $ka\left(\frac{a}{2R_0}\right)^2 \ll 1$, где k – волновое число. Это более мягкое условие, чем условие, используемое при получении характеристики направленности излучателя. Оно требует малости не размеров излучателя по сравнению с размером зоны Френеля, проведенной из точки наблюдения, а лишь в $\sqrt{2R_0/a}$ раз меньшей величины. Таким образом, оно допускает возможность расчета поля в зоне Френеля в рассматриваемом приближении. Разложив в (4) $u\left(t-\frac{R-R_0}{c}\right)=\exp[ik(R-R_0)]u(t)$ в ряд $\exp[ik(R-R_0)]\frac{1}{R}=\frac{1}{R}+ik(R-R_0)\frac{1}{R}+\cdots+\frac{1}{n!}[ik(R-R_0)]^n\frac{1}{R}+\cdots$ и используя формулу для бинома Ньютона, имеем:

$$R-R_0=-\eta\left[\sin\theta\cos\varphi+\frac{\eta}{2R_0}\left(\sin^2\theta\cos^2\varphi-1\right)+O\left(\frac{\eta^2}{R_0^2}\right)\right],$$

$$(R-R_0)^n=(-\eta)^n\left[\sin^n\theta\cos^n\varphi+n\frac{\eta}{2R_0}\times\left(\sin^2\theta\cos^2\varphi-1\right)\sin^{n-1}\theta\cos^{n-1}\varphi+O\left(\frac{\eta^2}{R_0^2}\right)\right],$$

$$\frac{R-R_0}{R}=-\frac{\eta}{R_0}\left[\sin\theta\cos\varphi+\frac{\eta}{2R_0}\left(3\sin^2\theta\cos^2\varphi-1\right)+O\left(\frac{\eta^2}{R_0^2}\right)\right].$$

Заметим, что при $\sin\theta\to 0$ точность этих формул увеличивается, и в пределе их относительная погрешность составляет величину $O\left(\eta^3/R_0^3\right)$.

Проинтегрировав по φ с учетом равенств $\int_0^\pi\cos^{2n}\varphi d\varphi=\frac{(2n-1)!!}{n!2^n}\pi$ [6] и $\int_0^\pi\cos^{2n+1}\varphi d\varphi=0$, получим: $\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\frac{R_0}{R}d\varphi=1+\frac{\eta^2}{2R_0^2}\left(\frac{3}{2}\sin^2\theta-1+O\left(\frac{\eta^2}{R_0^2}\right)\right)$, и с той же относительной точностью

$$\frac{1}{(2n)!\pi}\int_0^\pi(R-R_0)^{2n}\frac{R_0}{R}d\varphi\approx\eta^{2n}\frac{1}{(n!)^2 4^n}\sin^{2n}\theta$$

при $n\geq 1$,

$$\frac{1}{(2n+1)!\pi}\int_0^\pi(R-R_0)^{2n+1}\frac{R_0}{R}d\varphi\approx$$

$$\approx-\frac{1}{2R_0}\eta^{2n+2}\frac{1}{(n!)^2}\left[\frac{2n+3}{2n+2}\sin^2\theta-1\right]\left(\frac{\sin\theta}{2}\right)^{2n},$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\exp[ik(R-R_0)]\frac{R_0}{R}d\phi\approx$$

$$1+\frac{\eta^2}{2R_0}\left(\frac{3}{2}\sin^2\theta-1\right)\left(\frac{1}{R_0}-ik\right)+\cdots+ \tag{5}$$

$$+(-1)^n\left(\frac{k\eta}{2}\sin\theta\right)^{2n}\frac{1}{(n!)^2}\times$$

$$\times\left[1-\frac{ik}{2R_0}\eta^2\left(\frac{2n+3}{2n+2}\sin^2\theta-1\right)\right]+\cdots$$

Искомое звуковое давление находится по формулам (4) и (5):

$$p(r,z)=\rho c v_0\exp(ikR_0)ka\frac{a}{2R_0}P(r,z),$$

$$P(r,z)=-i\frac{2}{a^2}\int_0^a\eta F\left(\frac{\eta^2}{a^2}\right)d\eta\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\exp[ik(R-R_0)]\frac{R_0}{R}d\varphi\approx$$

$$\approx 1+\frac{\eta^2}{2R_0}\left(\frac{3}{2}\sin^2\theta-1\right)\left(\frac{1}{R_0}-ik\right)+\cdots+$$

$$+(-1)^n\left(\frac{k\eta}{2}\sin\theta\right)^{2n}\frac{1}{(n!)^2}\times$$

$$\times\left[1-\frac{ik}{2R_0}\eta^2\left(\frac{2n+3}{2n+2}\sin^2\theta-1\right)\right]+\cdots$$

При равномерном распределении скорости колебаний, когда $F(\eta^2/a^2)\equiv 1$, нормированное звуковое давление $P(r,z)$ равно

$$P_0(r,z)=-i\frac{2}{a^2}\int_0^a\eta d\eta\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\exp[ik(R-R_0)]\frac{R_0}{R}d\varphi-$$

$$-i-\frac{a}{4R_0}\left(\frac{3}{2}\sin^2\theta-1\right)\left(i\frac{a}{R_0}+ka\right)-\cdots-$$

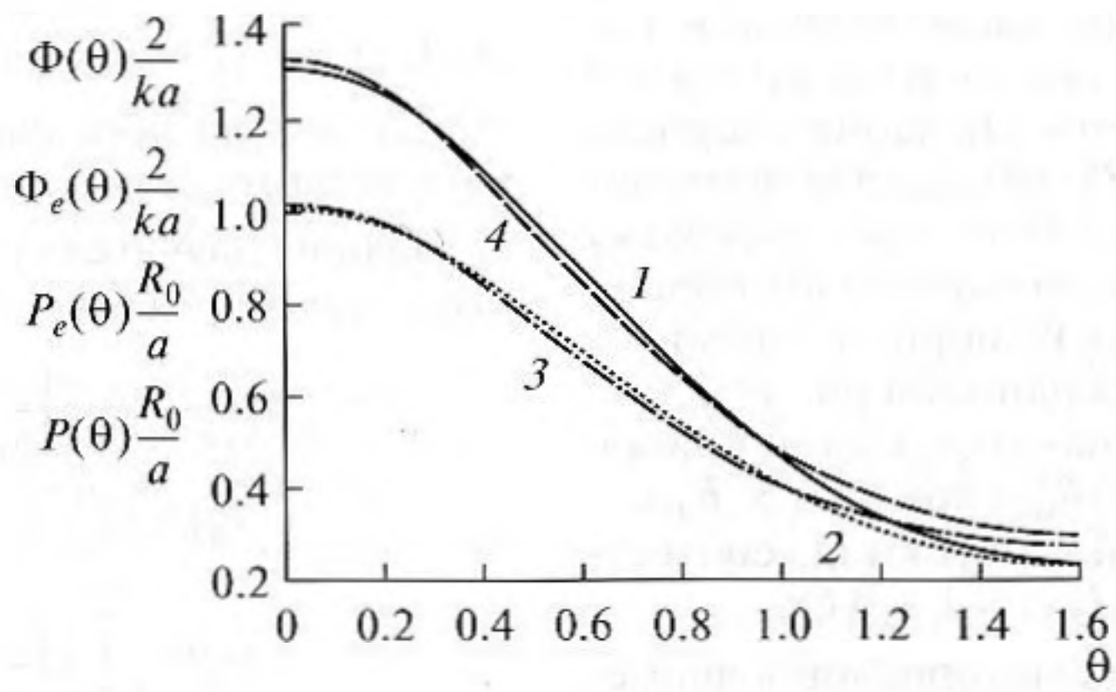
$$-\frac{i}{n+1}(-1)^n\left(\frac{ka}{2}\sin\theta\right)^{2n}\frac{1}{(n!)^2}-$$

$$-(-1)^n\frac{ka^2}{(n+2)2R_0}\left(\frac{ka}{2}\sin\theta\right)^{2n}\times$$

$$\times\frac{1}{(n!)^2}\left(\frac{2n+3}{2n+2}\sin^2\theta-1\right)-\cdots$$

Аналогично, при $F(\eta^2/a^2)=(\eta^2/a^2)^m$ имеем

$$P_m(r,z)=-i\frac{2}{a^2}\int_0^a\eta\frac{\eta^{2m}}{a^{2m}}d\eta\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\exp[ik(R-R_0)]\frac{R_0}{R}d\varphi\approx$$



Характеристика направленности и амплитуда звукового давления при $ka = 3$ в гармоническом режиме колебаний поршня. Сплошная кривая *1* – безразмерная характеристика направленности $\Phi(\theta)2/(ka)$ при неравномерном распределении нормальной составляющей скорости колебаний по безразмерному радиусу поршня η/a по закону $F(x) = 1 + 0.6x$, $x = \eta^2/a^2$. Пунктирная кривая *2* – аналогичная функция $\Phi_e(\theta)2/(ka)$ при равномерном распределении $F(x) \equiv 1$. Штрих-пунктирная кривая *3* – безразмерная амплитуда звукового давления $P_e(\theta)R_0/a$ при $R_0/a = 2$ и $F(x) \equiv 1$. Штриховая кривая *4* – $P(\theta)R_0/a$ – то же при $F(x) = 1 + 0.6x$.

$$\approx -\frac{i}{m+1} - \frac{a}{2(m+2)R_0}\left(\frac{3}{2}\sin^2\theta - 1\right)\left(i\frac{a}{R_0} + ka\right) - \cdots -$$
$$-(-1)^n \frac{i}{(m+n+1)}\left(\frac{ka}{2}\sin\theta\right)^{2n}\frac{1}{(n!)^2} -$$
$$-(-1)^n \frac{ka^2}{2(m+n+2)R_0}\left(\frac{ka}{2}\sin\theta\right)^{2n} \times$$
$$\times \frac{1}{(n!)^2}\left(\frac{2n+3}{2n+2}\sin^2\theta - 1\right) - \cdots.$$

Линейная комбинация этих величин образует искомое нормированное звуковое давление. Образуя для такой комбинации коэффициенты $G_q = \frac{1}{q} + \sum_{m\geq 1} F_m \frac{1}{m+q}$, соответствующие заданной функции

$$F\left(\eta^2/a^2\right) = 1 + \sum_{m\geq 1} F_m \frac{\eta^{2m}}{a^{2m}}, \tag{6}$$

представим искомый результат в виде

$$p\left(t + \frac{R_0}{c}, r, z\right) = \rho c v_0 \frac{ka^2}{2R_0} P(r,z)u(t),$$

где

$$P(r,z) \approx -i\left[G_1 + G_2\frac{a^2}{2R_0^2}\left(\frac{3}{2}\sin^2\theta - 1\right)\right] -$$
$$-G_2\frac{ka^2}{2R_0}\left(\frac{3}{2}\sin^2\theta - 1\right) - \cdots -$$
$$-G_{n+1}(-1)^n\left(\frac{ka}{2}\sin\theta\right)^{2n}\frac{i}{(n!)^2} -$$
$$-G_{n+2}(-1)^n\left(\frac{ka}{2}\sin\theta\right)^{2n}\frac{ka^2}{(n!)^2 2R_0}\left(\frac{2n+3}{2n+2}\sin^2\theta - 1\right) - \cdots,$$

причем амплитуда колебаний во времени равна $\rho c v_0 \frac{ka^2}{2R_0}|P|$.

Для нахождения характеристики направленности излучателя следует удерживать здесь лишь старшие слагаемые, которые нечетных по k множителей не содержат. Тогда характеристика направленности

$$\Phi(\theta) = \lim_{R_0\to\infty}\frac{ka}{2}iP$$

принимает вид

$$\Phi(t,\theta) = \frac{ka}{2}\left[G_1 - G_2\left(\frac{ka}{2}\sin\theta\right)^2 + \cdots + \right.$$
$$\left. + (-1)^n G_{n+1}\left(\frac{ka}{2}\sin\theta\right)^2\frac{1}{(n!)^2} + \cdots\right]. \tag{7}$$

В частности, при равномерном распределении скорости колебаний на поршне имеем $G_n = \frac{1}{n}$ и (7) сводится к известному выражению $\Phi_0(\theta) = ka^2\frac{J_1(ka\sin\theta)}{ka\sin\theta}$ [7], в чем легко убедиться, заменив здесь функцию Бесселя ее разложением в ряд Тейлора.

При $F(\eta^2/a^2) = 1 + F_1(\eta^2/a^2)$ имеем $G_q = \frac{1}{q} + F_1\frac{1}{1+q}$. Для этого случая при $F_1 = 0.6$ на рисунке сплошной кривой представлена нормированная характеристика направленности $\Phi(\theta)2/(ka^2)$. Для сравнения пунктирной кривой представлена функция $\Phi_e(\theta)2/(ka)$, соответствующая равномерному распределению нормальной составляющей скорости колебаний на поршне. Как видно, увеличение скорости колебаний к периферии порш-

ня приводит к обострению характеристики направленности, в то время как в случае линейной антенны для этого требуется спадание скорости колебаний к периферии [8] (однако это противопоставление не ведет к противоречию, поскольку в проекции на любой диаметр поршня интегральная колебательная скорость на поршне стремится к нулю при стремлении координаты на этом диаметре к его концам). Штрих-пунктирной кривой представлена функция $P(\theta)R_0/a$ при $ka = 3$, $R_0/a = 2$ и $F(x) \equiv 1$, штриховой – функция, соответствующая распределению $F(x) = 1 + 0.6x$.

Присутствие квадратов факториалов в знаменателях членов ряда в расчетных формулах обеспечивает быструю сходимость рядов: погрешность расчета кривых, представленных на рисунке, при учете всего двух первых членов ряда равна 10^{-4}, а при учете трех – 10^{-10}.

Функция $F\left(x^2\right) = \sum_{m\geq 0} F_m x^{2m}$ может быть представлена в в виде ряда по четным полиномам Лежандра $F\left(x^2\right) = \sum_{n\geq 0} A_n P_{2n}(x)$, где $P_0(x) = 1$, $P_2(x) = (3x^2 - 1)/2$, $P_{2n}(x) = 2^{-2n}\sum_{m=0}^{n}(-1)^m \times \frac{(4n-2m)!}{m!(2n-m)!(2n-2m)!}x^{2n-2m}$ [6]. Замена $m = n - \nu$ переменной суммирования позволяет преобразовать эту формулу к виду

$$P_{2n}(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \alpha_{n,\nu} x^{2\nu},$$

где $\alpha_{n,0} = (-1)^n \frac{1}{n!2^n}$, $\alpha_{n,\nu} = 2^{-n}(-1)^{n-\nu} \times \frac{(2n+2\nu-1)!!}{(n-\nu)!\nu!(2\nu-1)!!}$.

При этом из ортогональности полиномов Лежандра и $\int_0^1 [P_{2n}(x)]^2 dx = \frac{1}{4n+1}$ следует $A_n = (4n+1)\int_0^1 F\left(x^2\right)P_{2n}(x)\,dx$, $F_\nu = \sum_{n\geq 0} A_n \alpha_{n,\nu}$.

В случае $r = 0$ из (4) с учетом тождеств $\frac{\partial}{\partial t} v\left(t - \frac{R}{c}\right) = -c\frac{\partial}{\partial R} v\left(t - \frac{R}{c}\right)$ и $\eta d\eta = RdR$ [4] получим $p\left(t + \frac{z}{c}, z\right) = \rho v_0 \int_0^{\sqrt{z^2+a^2}-z} F\left(\frac{\xi(\xi+2z)}{a^2}\right)\dot{u}\left(t - \frac{\xi}{c}\right)d\xi$, откуда, интегрируя по частям, найдем

$$p\left(t + \frac{z}{c}, 0, z\right)\frac{1}{\rho c v_0} = u(t) - u\left(t - \frac{a}{c}L(z)\right) + \frac{a}{c}\int_0^{L(z)} \left\{F\left[\varsigma\left(\varsigma + 2\frac{z}{a}\right)\right] - 1\right\}\dot{u}\left(t - \frac{a}{c}\varsigma\right)d\varsigma,$$

где $L(z) = a\Big/\left(z + \sqrt{z^2 + a^2}\right)$. В частности, при $F(x) \equiv 1$ интеграл здесь обращается в нуль и поле сводится к известному результату Шоха [2].

На оси излучателя при $F(x) = 1 + F_1 + F_1 x$ и гармоническом режиме колебаний имеем

$$p\left(t + \frac{z}{c}, 0, z\right)\frac{1}{\rho c v_0} = P_h(0,z)u(t),$$

$$P_h(0,z) = 1 - \exp[ikaL(z)] - ikaF_1\int_0^{L(z)} \varsigma\left(\varsigma + 2\frac{z}{a}\right)\exp(ika\varsigma)\,d\varsigma$$

и интегрирование дает

$$P_h(0,z) = 1 - \exp[ikaL(z)] - F_1\left\{\exp[ikaL(z)]\left[L^2(z) + 2\frac{z}{a}L(z) + i\frac{2}{ka}\left(L(z) + \frac{z}{a}\right) - \frac{2}{k^2a^2}\right] + \frac{2}{k^2a^2} - 2i\frac{z}{ka^2}\right\}.$$

В этом случае амплитуда колебаний равна $\rho c v_0 |P_h(0,z)|$. При этом для примера, приведенного на рисунке, имеем: $|P_h(0,z)|\frac{2z}{ka^2} = 1.197$ при $F_1 = 0.6$, $|P_h(0,z)|\frac{2z}{ka^2} = 0.925$ при $F_1 = 0$, где $z = 2a$, а соответственные приближенные значения, вычисленные по формулам (6)–(8), равны 1.321 и 1.010.

При последующих значениях z соответственные четверки величин, представленных в том же порядке, таковы:

1.251, 0.964, 1.309, 1.004 при $z = 3a$;
1.272, 0.979, 1.305, 1.002 при $z = 4a$;
1.282, 0.987, 1.303, 1.001 при $z = 5a$;
1.287, 0.991, 1.302, 1.001 при $z = 6a$;
1.295, 0.997, 1.301, 1.000 при $z = 10a$;
1.298, 0.998, 1.300, 1.000 при $z = 15a$.

Отсюда видно, что по мере возрастания z/a точность вычислений по приближенным формулам увеличивается. В общем случае (6)

$$P_h(0,z) = 1 - \exp[ikaL(z)] - \sum_{m\geq 1} F_m\left[M_m(z) + \sum_{s=1}^{m}(-1)^s C_\nu^s\left(\frac{z}{a}\right)^{2s} M_{m-s}(z)\right],$$

где

$$M_n(z) = ika\exp(-ikz)\int_{z/a}^{L(z)+(z/a)} y^{2n}\exp(ikay)\,dy = \left[L(z) + \frac{z}{a}\right]^{2n}\exp[ikaL(z)] - \left(\frac{z}{a}\right)^{2n} +$$

$$+\sum_{s=1}^{2n} i^s \left\{ \left[L(z) + \frac{z}{a} \right]^{2n-s} \times \right.$$

$$\left. \times \exp[ikaL(z)] - \left(\frac{z}{a}\right)^{2n-s} \right\} \frac{2n(2n-1)\cdots(2n-s+1)}{(ka)^s}.$$

Отсюда видно, что если коэффициенты F_m отличны от нуля лишь при m, меньших конечного номера, то точное поле на оси симметрии представляется конечной суммой элементарных функций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Рэлей*. Теория звука. Т. 2. М.: ГИТТЛ, 1955. 475 с.
2. *Schoch A.* Betrachtungen uber des Schallfield einer Kolbenmembranen // Akust. Zeitschrift. 1941. B. 6. № 6. S. 318–326.
3. *Козина О.Г. Макаров Г.И.* Переходные процессы в акустических полях, создаваемых поршневой мембраной произвольной формы и при произвольном характере колебаний ее поверхности // Акуст. журн. 1961. Т. 7. № 1. С. 53–58.
4. *Урусовский И.А.* О реакции среды для плоских поршней, колеблющихся в плоском жестком экране по произвольному временному закону // Акуст. журн. 1987. Т. 33. № 4. С. 751–760.
5. *Сумбатян М.А.* Развитие метода Шоха для численного исследования поля ультразвуковых излучателей // Акуст. журн. 1988. Т. 34. № 1. С. 185–187.
6. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: ГИФМЛ, 1962. 1094 с.
7. *Морз Ф.* Колебания и звук / Пер. с англ. под ред. С.Н. Ржевкина. М.; Л.: Гостехиздат, 1949. 496 с.
8. *Pritchard R.L.* Optimum directivity patterns for linear point arrays // J. Acoust. Soc. Amer. 1953. V. 25. № 5. P. 879–891.