

УДК 534.222

## НЕЛИНЕЙНЫЕ АКУСТИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ В КАНАЛАХ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ

© 2012 г. В. Ф. Ковалев, О. В. Руденко\*

*Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН*

*125047 Москва, Миусская пл. 4*

*E-mail: vfkvvfkv@gmail.com*

*\*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет*

*119991 Москва, ГСП-1, Ленинские горы, МГУ 1, стр. 2*

*E-mail: rudenko@acs366.phys.msu.ru*

Поступила в редакцию 06.11.2011 г.

Исследована группа точечных симметрий для обобщенного уравнения типа Вебстера, описывающего нелинейные акустические волны в каналах переменного сечения с поглощением. Доказано, что для профилей поперечного сечения специального вида происходит расширение допускаемой группы симметрий и построены соответствующие им инвариантные решения. Найдены приближенные аналитические решения обобщенного уравнения Вебстера при произвольных начальных условиях для каналов с плавно меняющимся поперечным сечением.

*Ключевые слова:* нелинейная акустика, группы симметрии, ренормгрупповая симметрия, уравнение Вебстера.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Уравнение Вебстера [1–3] описывает волны в трубах, рупорах, концентраторах и других волноведущих системах с изменяющимся поперечным сечением  $S(x)$ :

$$\frac{1}{S(x)} \frac{\partial}{\partial x} \left( S(x) \frac{\partial p}{\partial x} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0. \quad (1)$$

Здесь  $x$  — координата, отсчитываемая вдоль оси системы. Уравнение (1) применимо для трубок, характерная ширина которых мала по сравнению с длиной волны. Кроме того, сечение предполагается медленно изменяющимся вдоль  $x$ : площадь  $S(x)$  должна мало измениться при увеличении  $x$  на величину порядка ширины трубки [3]. Заметим, что в общем случае уравнение (1) не может описывать волну, бегущую внутри трубки в одном направлении (например, в положительном направлении оси  $x$ ):

$$p(x, t) = A(x) \Phi(t - \varphi(x)). \quad (2)$$

Здесь  $\Phi$  — произвольная функция. Действительно, подставляя (2) в (1), получим соотношения:

$$\left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^2 = \frac{1}{c^2}, \quad \frac{d}{dx} (A^2 S) = 0, \quad \frac{d}{dx} \left( S \frac{dA}{dx} \right) = 0. \quad (3)$$

Для граничных условий  $A(x=0) = p_0$ ,  $S(x=0) = 1$  из соотношений (3) следует:

$$A = \frac{p_0}{1 \pm x/R}, \quad S = (1 \pm x/R)^2. \quad (4)$$

Знак “плюс” в (4) отвечает сферически расширяющейся трубке и, соответственно, сферически расходящейся волне. Если в (4) взять “минус”, получим сужающуюся трубку и сходящуюся к центру сферы  $x = R$  волну. При  $R \rightarrow \infty$  трубка становится однородной ( $S(x) = \text{const}$ ), а волна — плоской. Итак, только в случаях плоской и сферической геометрии уравнение (1) может описывать бегущую в одном направлении волну с произвольным профилем  $\Phi(t)$ . Во всех других случаях неоднородность сечения  $S(x)$  приведет к переотражениям распространяющихся в противоположных направлениях сигналов, и сформируется сложная картина волнового поля — комбинация стоячих и бегущих волн.

Однако, если  $S(x)$  изменяется очень медленно, на расстояниях порядка нескольких длин волн, переотражениями можно пренебречь и рассматривать волну, бегущую только в одном направлении. Этот вывод справедлив не только для обычного уравнения Вебстера (1), но и для его обобщения на случай нелинейной диссипативной среды, заполняющей трубку. Обобщенное уравнение типа Вебстера возникает в задачах распространения интенсивного звука [4, 5]. Оно отличается от уравнения (1) наличием двух дополнительных членов, описывающих нелинейные и диссипативные эффекты. Запишем это уравнение в виде:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial \ln S(x)}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\varepsilon}{c^2 \rho} \frac{\partial^2 p^2}{\partial t^2} + \frac{b}{\rho} \frac{\partial^3 p}{\partial t \partial x^2}. \quad (5)$$

Здесь  $\varepsilon$ ,  $b$  — параметры нелинейности и диссипации (обозначения те же, что в книге [6]),  $\rho$  — плотность среды. Как исходное (1), так и обобщенное (5) уравнения Вебстера можно использовать для описания распространяющихся и стоячих волн.

В тех случаях, когда каждый из членов в правой части уравнения мал по сравнению с членами левой части, можно рассмотреть бегущую волну. При этом, используя метод медленно изменяющегося профиля [6], удастся понизить порядок нелинейного уравнения (5). Следуя стандартной процедуре [7], перейдем от переменных  $x$ ,  $t$  в уравнении (5) к новым независимым переменным: “медленной” координате  $x_1 = \delta x$  (где  $\delta$  — малый параметр задачи) и времени  $\tau = t - x/c$  в бегущей со скоростью звука системе координат. Пренебрегая малыми членами порядка  $\delta^n$ ,  $n \geq 2$ , придем к эволюционному уравнению

$$\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{c^3 \rho} p \frac{\partial p}{\partial \tau} - \frac{b}{2c^3 \rho} \frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2} + \frac{p}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\ln S(x)) = 0. \quad (6)$$

Уравнение (6) используется не только как модель распространения волн в трубках, но также при расчетах акустического поля в неоднородных средах в приближении геометрической акустики [4, 8], играя при этом роль уравнения переноса, записанного в лучевых координатах. Осью лучевой трубки является геометрический луч, рассчитанный из уравнения эйконала, а функция  $S(x)$  является сечением лучевой трубки.

Исследование даже наиболее простого, линейного уравнения Вебстера (1) обнаруживает весьма интересные эффекты, такие, например, как туннелирование звуковых волн при распространении через сужающийся волноводный канал [9]. Переход к обобщенному уравнению Вебстера (ОУВ) (6), содержащему дополнительные вклады, ответственные за нелинейные эффекты и поглощение, открывает возможности для исследования задач распространения звуковых волн конечной амплитуды в поглощающих средах, в частности для акустического зондирования сред, сквозь которые распространяются звуковые волны [10]. При этом особую актуальность приобретают точные и приближенные аналитические решения уравнения акустических волн конечной амплитуды, аналогично тому как это имело место в однородной среде для уравнения Бюргерса и его обобщений [11, (Гл. 7, § 2), 5].

Несмотря на понимание того, что решения ОУВ с одновременным учетом эффектов нелинейности, поглощения и неоднородности важны для описания поведения акустических волн в нелинейных поглощающих средах, их аналитическое нахождение даже на основе приближенных подходов представляет собой трудную задачу. Обычно в исходном уравнении либо пренебрегают диссипацией, что позволяет путем замены независимой переменной свести исходное уравне-

ние к уравнению Хопфа [5], либо считают нелинейность малой и решают уравнение для звуковых волн методом последовательных приближений: именно таким способом анализировалось поведение второй гармоники в акустическом канале переменного сечения [10]. Вместе с тем является очевидным, что амплитуда второй гармоники с уменьшением поперечного сечения канала нарастает быстрее основной гармоники, что указывает на необходимость анализа ОУВ в условиях конечной амплитуды звуковой волны. На аналитическое решение ОУВ в таких условиях и нацелена данная работа.

Работа разделена на пять разделов. Во втором из них формулируются исходные уравнения для теоретического анализа процесса распространения акустических волн в среде с учетом нелинейности и поглощения. При этом наряду с исходным ОУВ рассматривается его модифицированный аналог, который зачастую оказывается проще для аналитического изучения методами теории групп. Последние являются наиболее эффективным инструментом для построения аналогов точных аналитических решений, хорошо известных для однородной среды. В третьем разделе нами найдена группа точечных преобразований для модифицированного ОУВ и показано, что для профилей сечения специального вида эта группа симметрий расширяется. Найдены инвариантные решения, отвечающие указанным симметриям, и проведено сравнение этих решений с теми, которые реализуются в волноводе постоянного сечения. Четвертый раздел работы посвящен построению приближенного аналитического решения ОУВ для произвольно изменяющихся сечений и произвольного начального условия для ОУВ. Основу для проведенного построения составляет теория приближенных групп преобразований, которая позволяет найти приближенную симметрию и соответствующее ей приближенное аналитическое решение. Малым параметром в этих построениях является медленность изменения профиля волноводного сечения  $S(x)$ . В пятом разделе кратко сформулированы основные итоги работы.

## 2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Для анализа нелинейных эффектов при распространении звуковых волн в поглощающей среде в канале переменного сечения  $S(x)$  будем использовать ОУВ (6), которое перепишем в виде

$$\frac{\partial p}{\partial x} - ap \frac{\partial p}{\partial \tau} - v \frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2} + \frac{p}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\ln S(x)) = 0, \quad (7)$$

$$p(0, \tau) = P(\tau).$$

Уравнение (7), в отличие от обсуждавшихся выше уравнений, записано в безразмерных обозначениях. Чтобы перейти от физических пере-

менных в уравнении (6) к более удобным нормированным переменным в уравнении (7), нужно заменить в (6):

$$x \rightarrow \frac{c}{\omega} x, \quad \tau \rightarrow \frac{\tau}{\omega}, \quad p \rightarrow p_0 p.$$

Здесь нормировочные константы  $\omega$ ,  $p_0$  имеют смысл характерных значений частоты и амплитуды сигнала соответственно. Два параметра в уравнении (7) даются следующими безразмерными комбинациями констант:

$$a = \frac{\varepsilon p_0}{c^2 \rho}, \quad v = \frac{b \omega}{2c^2 \rho}.$$

Их отношение  $a/v$  называют акустическим числом Рейнольдса [6]. Оно характеризует относительный вклад нелинейных и диссипативных эффектов в искажение профиля волны. При больших значениях  $a/v$  преобладает нелинейность, при малых — диссипация. Без ограничения общности в уравнении (7) можно положить  $S(0) = 1$ .

От последнего слагаемого в (7) можно избавиться, совершив замену переменной  $x$  и вводя зависящее от координаты вдоль канала поглощение, задаваемое функцией  $\mu$ ,

$$\zeta = \int dx / \sqrt{S(x)}, \quad p \sqrt{S} = u, \quad \mu = v \sqrt{S(x(\zeta))}. \quad (8)$$

Тогда в новых переменных уравнение (7) принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial \zeta} - au \frac{\partial u}{\partial \tau} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = 0, \quad u(0, \tau) = P(\tau). \quad (9)$$

Вводя новую переменную  $q$ , связанную с  $u$  соотношением  $u = 2(\partial q / \partial \tau)$ , запишем вместо (7) модифицированное ОУВ (МОУВ)

$$\frac{\partial q}{\partial \zeta} - a \left( \frac{\partial q}{\partial \tau} \right)^2 - \mu \frac{\partial^2 q}{\partial \tau^2} = 0, \quad q(0, \tau) = W(\tau). \quad (10)$$

Переход в (9) к новой переменной  $q$  повышает порядок этого уравнения, однако его однократное интегрирование по  $\tau$  снова дает уравнение первого порядка, (10), но уже для  $q$ . Подобная процедура определяет  $q$  с точностью до функции  $C(\zeta)$  (в (10) она опущена), выбор которой достаточно произволен. Например, для периодических по  $\tau$  решений уравнения (10) эту функцию можно выбрать таким образом, чтобы среднее по периоду значение  $q$  обращалось в нуль при всех значениях  $\zeta$ . Очевидно, однако, что на имеющей физический смысл величине  $u$  тот или иной выбор  $C(\zeta)$  никак не отразится.

### 3. ГРУППА СИММЕТРИИ И ИНВАРИАНТНЫЕ РЕШЕНИЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ВЕБСТЕРА

Группа точечных преобразований, допускаемых уравнением (10) при произвольном профиле

неоднородности  $\mu(\zeta)$ , задается тремя инфинитезимальными операторами:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial q}, \quad X_3 = \zeta \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\tau}{2a} \frac{\partial}{\partial q}. \quad (11)$$

Первые два оператора в этом списке представляют собой очевидные с физической точки зрения операторы трансляций по переменным  $\tau$  и  $q$ , а последний оператор соответствует группе галилеевских преобразований. Расширение группы преобразований (11) происходит для профилей сечения специального вида,

$$M \left( \frac{d}{d\zeta} \ln(\mu(\zeta)) \right)^{-1} = b(\zeta), \quad b(\zeta) = \beta_0 + \beta_1 \zeta + \beta_2 \zeta^2, \quad (12)$$

$$M = \text{const} \neq 0.$$

Условие (12) играет роль классифицирующего соотношения, выделяя те специальные виды профилей, для которых группа симметрии (11) расширяется за счет дополнительного оператора  $X_4$

$$X_4 = b \frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{\tau}{2} \left( M + \frac{db}{d\zeta} \right) \frac{\partial}{\partial \tau} + \left( Mq - \frac{\tau^2}{8a} \frac{d^2 b}{d\zeta^2} \right) \frac{\partial}{\partial q}. \quad (13)$$

Классифицирующее соотношение (12) представляет собой дифференциальное уравнение первого порядка на функцию  $\mu(\zeta)$ , которое интегрируется в явном виде, задавая трехпараметрическое (определяемое параметрами  $\beta_0$ ,  $\beta_1$  и  $\beta_2$ ) семейство кривых в пространстве  $\{\zeta, \mu\}$ ,

$$\ln(\mu/v) = d(\zeta) \equiv M \int_0^\zeta \frac{dy}{b(y)}, \quad (14)$$

где вид функции  $d(\zeta)$  зависит от соотношения между параметрами  $\beta_i$ ,

$$d(\zeta) = \begin{cases} \frac{2M}{\sqrt{4\beta_0\beta_2 - \beta_1^2}} \left[ \arctg \frac{\beta_1 + 2\beta_2\zeta}{\sqrt{4\beta_0\beta_2 - \beta_1^2}} - \arctg \frac{\beta_1}{\sqrt{4\beta_0\beta_2 - \beta_1^2}} \right], & \beta_1^2 < 4\beta_0\beta_2, \\ \frac{M}{\sqrt{\beta_1^2 - 4\beta_0\beta_2}} \ln \frac{(\sqrt{\beta_1^2 - 4\beta_0\beta_2} - \beta_1 - 2\beta_2\zeta)(\sqrt{\beta_1^2 - 4\beta_0\beta_2} + \beta_1)}{(\sqrt{\beta_1^2 - 4\beta_0\beta_2} + \beta_1 + 2\beta_2\zeta)(\sqrt{\beta_1^2 - 4\beta_0\beta_2} - \beta_1)}, & \beta_1^2 > 4\beta_0\beta_2. \end{cases} \quad (15)$$

Выбор  $M = 0$  соответствует каналу с постоянным сечением  $d\mu(\zeta)/d\zeta = 0$ , для которой классифицирующее соотношение (12) выполняется автоматически при любых  $\beta_i$ . При этом вместо оператора  $X_4$  возникают три оператора,

$$X_{41} = \frac{\partial}{\partial \zeta}, \quad X_{42} = \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad (16)$$

$$X_{43} = \zeta^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} + \tau \zeta \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\tau^2}{4a} \frac{\partial}{\partial q},$$

первый из которых,  $X_{41}$ , является оператором трансляций по оси  $\zeta$ , второй,  $X_{42}$ , дает преобразование растяжений, а последний оператор,  $X_{43}$ , соответствует группе проективных преобразований. Помимо операторов (16) для каналов постоянно-

го сечения с  $\mu \equiv v$  МОУВ допускает также оператор бесконечной подгруппы,

$$X_\infty = k(\zeta, \tau) \exp\left(-\frac{aq}{\mu}\right) \frac{\partial}{\partial q}, \quad \frac{\partial k}{\partial \zeta} - \mu \frac{\partial^2 k}{\partial \tau^2} = 0. \quad (17)$$

Здесь линейное параболическое уравнение, которому удовлетворяет функция двух переменных  $k(\zeta, \tau)$ , может быть переписано в переменных  $\{x, \tau\}$ , т.е.

$$\frac{\partial k}{\partial x} - v \frac{\partial^2 k}{\partial \tau^2} = 0.$$

Последний факт будет нами использован при построении приближенной точечной симметрии МОУВ. Отметим, что группа симметрий (11), (16) и (17) хорошо известна в теории модифицированного уравнения Бюргера [12], к которому в этом случае сводится МОУВ.

При построении инвариантных решений для МОУВ мы сосредоточим основные усилия на исследовании решений, инвариантных относительно однопараметрической группы с оператором  $X_4$ , поскольку именно этот оператор является аналогом линейных комбинаций операторов (16), использование которых в каналах неизменного сечения дает хорошо известные и вместе с тем физические содержательные частные решения нелинейного уравнения Бюргера.

С учетом начального условия для МОУВ (10), интересующие нас решения записываются с помощью двух инвариантов,  $J_1$  и  $J_2$ , оператора  $X_4$ ,

$$J_1 = qe^{-d} + \frac{\beta_2}{2a} \left[ \frac{\zeta \tau^2}{2b} e^{-d} + \int_0^\zeta \frac{d\zeta'}{b(\zeta')} e^{-d(\zeta')} \int_0^{\zeta'} d\zeta'' e^{d(\zeta'')} \right], \quad (18)$$

$$J_2 = \frac{\tau}{\sqrt{b}} e^{-d/2},$$

следующим образом,  $J_1 = W(J_2)$ , или в явном виде:

$$q = e^{d(\zeta)} \left\{ W(\lambda) - \frac{\beta_2}{2a} \left[ \frac{\zeta \tau^2}{2b} e^{-d(\zeta)} + \int_0^\zeta \frac{d\zeta'}{b(\zeta')} e^{-d(\zeta')} \int_0^{\zeta'} d\zeta'' e^{d(\zeta'')} \right] \right\}, \quad \lambda = \frac{\tau e^{-d/2}}{\sqrt{b}}. \quad (19)$$

Подставляя это выражение для решения МОУВ в исходное уравнение, получим для функции  $W(\lambda)$  обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка,

$$\frac{d^2 W}{d\lambda^2} + a \left( \frac{dW}{d\lambda} \right)^2 + (M + \beta_1) \frac{\lambda}{2} \left( \frac{dW}{d\lambda} \right) - MW = 0. \quad (20)$$

В качестве примеров рассмотрим некоторые частные случаи общих соотношений.

*Пример 1:*  $\beta_2 = 0, \beta_0, \beta_1 \neq 0$ .

Этот вариант для канала постоянного сечения отвечает комбинации операторов сдвига по  $x$  и группы растяжений. При  $\beta_2 = 0$  из (15) и (20) следует, что решение является автомодельным (ср. с [5]), и, в зависимости от соотношения между па-

раметрами  $\beta_1$  и  $M$ , реализуется для следующих функций  $S(x)$

$$S(x) = \begin{cases} (1 + (M + \beta_1)x / \beta_0)^{2M/(\beta_1 + M)}, & \beta_1/M \neq -1, \\ \exp(2Mx/\beta_0), & \beta_1/M = -1. \end{cases} \quad (21)$$

Для экспоненциальной зависимости площади поперечного сечения от  $x$ , т.е. для  $\beta_1/M = -1$ , переменная  $\lambda = \tau/\sqrt{\beta_0}$  не зависит от  $\zeta$ , а решение уравнения (20) записывается в квадратурах,

$$\lambda = \int dW (C_0 \exp(-2aW) + (M/2a^2)(2aW - 1))^{-1/2} + C_1, \quad C_0, C_1 = \text{const}, \quad (22)$$

и имеет ограниченные периодические решения при  $M < 0$  и  $C_0 < 0$ .

Для степенной зависимости площади поперечного сечения от  $x$  автомодельная переменная  $\lambda$  и функция  $d$  в (19) имеют вид,

$$\lambda = \frac{\tau}{\sqrt{\beta_0}} \left( 1 + \frac{\beta_1 + M}{\beta_0} x \right)^{\frac{\beta_1 - M}{2(\beta_1 + M)}}, \quad (23)$$

$$d = \frac{M}{\beta_1} \ln \left( 1 + \frac{\beta_1}{\beta_0} \zeta \right), \quad \beta_1 + M \neq 0.$$

*Пример 2:*  $\beta_1 = 0, \beta_0, \beta_2 \neq 0$ .

Этот вариант для канала постоянного сечения отвечает комбинации операторов сдвига по  $x$  и группы проективных преобразований. В нашем случае канала переменного сечения функции  $\lambda$  и  $d$  в (19) принимают вид,

$$\lambda = \frac{\tau e^{-d/2}}{\sqrt{\beta_0 + \beta_2 \zeta^2}}, \quad d = \frac{M}{\sqrt{\beta_0 \beta_2}} \text{arctg} \left( \frac{\sqrt{\beta_2} \zeta}{\sqrt{\beta_0}} \right), \quad (24)$$

$$\beta_1 = 0,$$

где функция  $\zeta$  связана с  $x$  формулами, неявным образом задающими зависимость площади поперечного сечения  $S$  от  $x$ ,

$$\zeta = \sqrt{\frac{\beta_0}{\beta_2}} \text{tg} \left( \frac{\sqrt{\beta_0 \beta_2}}{2M} \ln S \right), \quad (25)$$

$$x = \frac{\beta_0}{2M} \int_1^S \frac{dS}{\sqrt{S}} \cos^{-2} \left( \frac{\sqrt{\beta_0 \beta_2}}{2M} \ln S \right).$$

Отметим, что автомодельные решения для экспоненциального и степенного законов изменения поперечного сечений (21) обсуждались в литературе [5], хотя запись решения МОУВ в квадратуре (22), по-видимому, дана здесь впервые. Что же касается инвариантного решения (19), (24) и (25), то оно ранее не приводилось.

#### 4. ГРУППА ПРИБЛИЖЕННЫХ СИММЕТРИЙ И ПРИБЛИЖЕННЫЕ ИНВАРИАНТНО-ГРУППОВЫЕ РЕШЕНИЯ МОУВ

Полученные в предыдущем разделе инвариантные решения МОУВ обладают тем недостатком, что, будучи точными, они, однако, могут быть получены только для специального типа профилей канала и начальных условий, задаваемых классифицирующим соотношением (12) и решением уравнения (20). В качестве альтернативы таким решениям в этом разделе мы приведем приближенные аналитические решения нелинейной краевой задачи (10), которые, однако, могут быть построены для произвольных начальных условий. Инструментом для построения таких решений служат приближенная группа симметрий, а условием существования последней является наличие в системе малого параметра, связанного со сравнительной плавностью изменения площади поперечного сечения вдоль оси волноводной системы, т.е. малость производной  $d(\ln \mu(\zeta))/d\zeta \equiv \mu_\zeta/\mu \ll 1$  (здесь нижний индекс обозначает производную по соответствующему аргументу). В этом случае симметрия исследуемой краевой задачи представляется рядом по степеням малого параметра и позволяет с приемлемой точностью получать приближенные аналитические решения задачи.

В основу построения приближенного аналитического решения для канала с медленно изменяющимся сечением положим алгоритм ренормгрупповой симметрии [13] для краевой задачи (10), который позволяет продолжить решения по теории возмущений по параметру нелинейности  $a$  в область конечных значений этого параметра. Общее описание алгоритма можно найти в [13], а детали вычислений на примере решения краевой задачи для модифицированного уравнения Бюргерса приведены в [14].

С целью учета преобразования параметра  $a$  включим его в список независимых переменных и запишем инфинитезимальный оператор такого преобразования

$$X_5 = \xi(a) \left( \frac{\partial}{\partial a} - \frac{q}{a} \frac{\partial}{\partial q} \right). \quad (26)$$

Искомый оператор ренормгрупповой симметрии запишем как линейную комбинацию оператора (26) с  $\xi(a) = 1$  и оператора бесконечной подгруппы (17), которая, как было показано в предыдущем разделе, в нулевом порядке по  $\mu_\zeta/\mu$  допускается краевой задачей (10),

$$R = \frac{\partial}{\partial a} + \left( k(\zeta, \tau, a) \exp\left(-\frac{aq}{\mu}\right) - \frac{q}{a} \right) \frac{\partial}{\partial q}. \quad (27)$$

Здесь функция трех переменных  $k(\zeta, \tau, a)$  подчиняется линейному параболическому уравнению в

(17) с начальным условием  $k(0, \tau, a) = W(\tau)/a$ , которое возникает из условия инвариантности решения по ТВ при  $a \rightarrow 0$  относительно оператора ренормгрупповой симметрии (27). В результате приходим к соотношению

$$k = \frac{\nu}{a} K_a, \quad K(a, x, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{\frac{aW(\xi)}{\nu}} G(x, \tau - \xi), \quad (28)$$

$$G(x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\nu x}} e^{-\frac{x^2}{4\nu x}}.$$

Здесь нижний индекс у функции  $K$  означает частную производную по соответствующему аргументу,  $K_a \equiv \partial K / \partial a$ .

Конечные преобразования непрерывной группы взаимнооднозначно связаны с инфинитезимальным преобразованием с помощью уравнений Ли – уравнений характеристик для сопряженного с оператором (27), (28) дифференциального уравнения в частных производных первого порядка. Решение уравнений Ли для оператора (27), (28) приводит к следующему приближенному аналитическому решению начальной задачи (10),

$$q^{(0)} = \frac{\mu}{a} \ln \left[ 1 + \frac{\nu}{\mu} (K - 1) \right], \quad (29)$$

которое справедливо в среде с плавно изменяющимся сечением  $\mu_\zeta/\mu \ll 1$ . Фактически отличие (29) от решения в каналах постоянного сечения проявляется в наличии не равной единице множителя  $\nu/\mu$ .

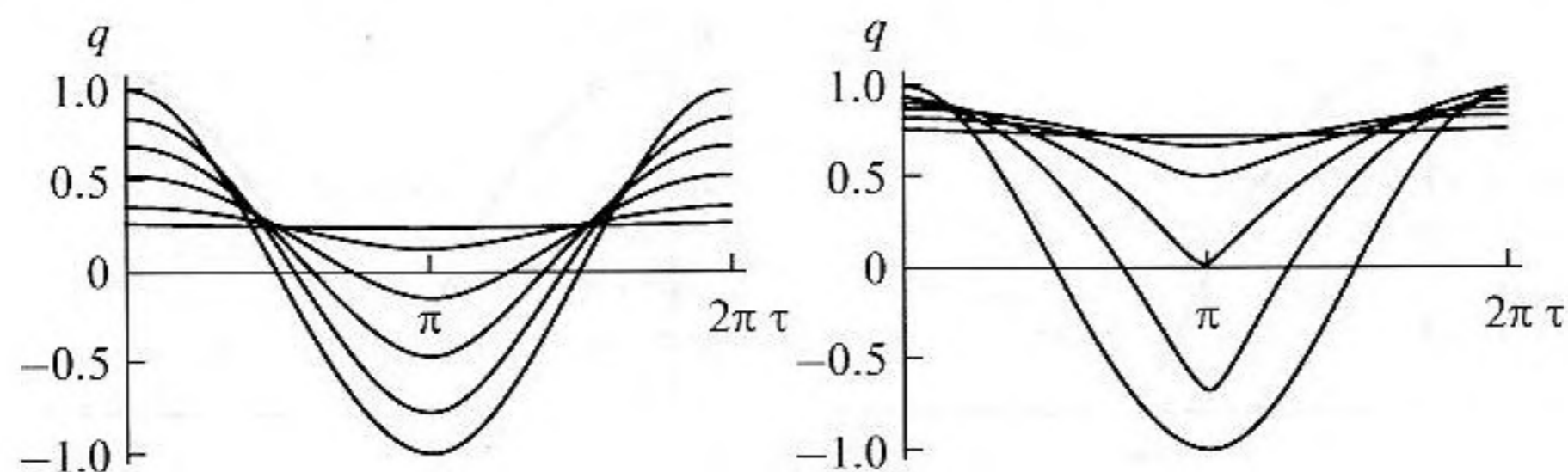
Достоинством ренормгруппового подхода является возможность последовательного улучшения полученных аналитических приближений. Применительно к рассматриваемой задаче такое улучшение (в следующем, первом порядке по  $\mu_\zeta/\mu$ ) достигается использованием в операторе (27) для функции  $k(\zeta, \tau, a)$  вместо решения параболического уравнения в (10) решения неоднородного параболического уравнения

$$\frac{\partial k}{\partial \zeta} - \mu \frac{\partial^2 k}{\partial \tau^2} = A, \quad (30)$$

правая часть которого пропорциональна градиенту поперечного сечения канала  $\mu_\zeta/\mu$  и линейно зависит от функции  $q^{(0)}$  нулевого по этому градиенту приближения,

$$A = akq^{(0)} \mu_\zeta/\mu^2 = (\mu_\zeta/\mu)(\nu/a) K_a \ln [1 + (\nu/\mu)(K - 1)]. \quad (31)$$

Уравнение (30) получается на этапе вычисления оператора ренормгрупповой симметрии (27) из так называемого определяющего уравнения группы, где во вкладах, пропорциональных  $\mu_\zeta/\mu$  (которые были опущены на предыдущем шаге), используются результаты нулевого приближения (28) и (29). Решение уравнения (30) дает модифицированное



**Рис. 1.** Графики решения  $q$  модифицированного обобщенного уравнения Вебстера (10), определяемого формулами (33) и (35) для периодического начального условия  $W(\xi) = \cos \xi$ , в зависимости от  $\tau$  при различных значениях координаты  $x$  вдоль оси канала, площадь поперечного сечения которого изменяется по экспоненциальному закону  $\mu(x)/v = \exp(\alpha x)$ . На левом рисунке кривые приведены для  $vx = 0; 0.2; 0.5; 1; 2; 4$  (увеличение  $vx$  соответствует переходу от верхних кривых к нижним на оси  $\tau = 0$ ),  $\alpha/v = -0.1$  и  $a/v = 1$ . На правом рисунке кривые приведены для  $vx = 0; 0.08; 0.2; 0.5; 1; 2$  (увеличение  $vx$  соответствует переходу от верхних кривых к нижним на оси  $\tau = 0$ ),  $\alpha/v = -0.1$  и  $a/v = 10$ .

(за счет вклада с градиентом поперечного сечения) выражение для функции  $k(a, x, \tau) \Rightarrow \hat{k}(a, x, \tau)$

$$\hat{k} = \frac{v}{a} K_a - \int_0^x dx' \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' G(x - x', \tau - \tau') \times \frac{v\mu'_x}{a\mu'} K'_a \ln \left( 1 + \frac{v}{\mu'} (K' - 1) \right), \quad (32)$$

$\mu' \equiv \mu(x'), \quad K' \equiv K(a, x', \tau'),$

а подстановка  $\hat{k}$  вместо  $k$  в инфинитезимальный оператор (27) и последующее решение уравнений Ли приводит к улучшенному приближению для искомого решения,

$$q^{(1)} = \frac{\mu}{a} \ln \left\{ 1 + \frac{v}{\mu} (K - 1) - \frac{v}{\mu} \int_0^x dx' \frac{\mu'_x}{\mu'} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' G(x - x', \tau - \tau') \times \left[ 1 - K' + \left( K' - 1 + \frac{\mu'}{v} \right) \ln \left( 1 + \frac{v}{\mu'} (K' - 1) \right) \right] \right\}. \quad (33)$$

При малых значениях параметра нелинейности  $a$  первые два члена разложения решения (33) в ряд по степеням параметра нелинейности имеют вид

$$q^{pt} = vK_a^{(0)} + \frac{va}{2} \left[ K_{aa}^{(0)} - \frac{v}{\mu} (K_a^{(0)})^2 - \int_0^x dx' \frac{v\mu'_x}{(\mu')^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' G(x - x', \tau - \tau') ((K'_a)^{(0)})^2 \right] + O(a^2), \quad (34)$$

где  $K_a^{(0)}$  и  $K_{aa}^{(0)}$  означают значения частных производных функции  $K$ , вычисленные в пределе  $a \rightarrow 0$ . Непосредственной подстановкой в  $K$  периодического начального условия  $W(\xi) = \cos \xi$  и вычислением возникающих интегралов можно убедиться, что выражение для  $q^{pt}$  согласуется с результатом,

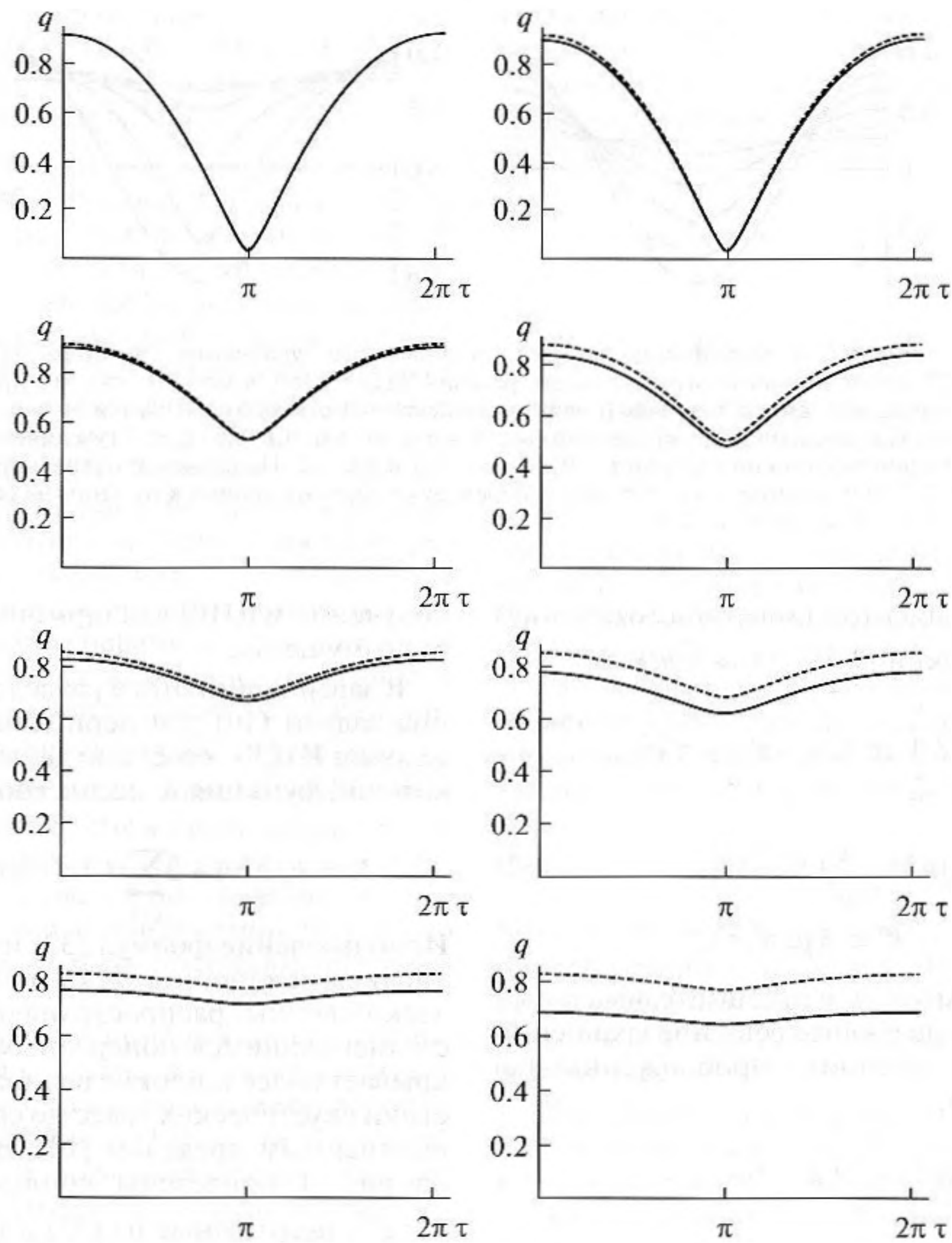
полученным в [10] для гармонического начального возмущения.

В завершении этого раздела укажем вид решения задачи (10) для периодического начального условия  $W(\xi) = \cos \xi$ : оно дается формулой (33), в которой функция  $K$  задана соотношением

$$K = I_0(a/v) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} I_k(a/v) \cos k\tau e^{-vk^2x}. \quad (35)$$

Использование формул (33) и (35) позволяет вычислить нелинейное искажение спектра акустической волны, распространяющейся в волноводе с изменяющимся поперечным сечением, что открывает более широкие возможности для диагностики акустических трасс по сравнению со слабо-нелинейным пределом [10]. В качестве примера на рис. 1 приведены кривые решения МОУВ  $q \equiv q^{(1)}$ , полученные из (33) и (35), в зависимости от  $\tau$  при различных координатах  $x$  вдоль оси канала с экспоненциально меняющейся площадью поперечного сечения,  $\mu/v = \exp(\alpha x)$ .

Для оценки точности полученных приближенных аналитических решений было проведено численное решение исходного уравнения (10). Сравнение кривых, построенных на основе аналитических результатов (33), (35), с кривыми, возникающими при численном решении исходного уравнения (10), показывает хорошее совпадение численных и аналитических результатов при умеренной нелинейности,  $a/v = 1$ , с точностью до долей процента. Результаты вычислений  $q \equiv q^{(1)}$  при более сильной нелинейности,  $a/v = 10$ , указывает на то, что здесь уже наблюдается отличие результатов, полученных в численных и аналитических расчетах, причем это отличие растет с увеличением расстояния вдоль оси трубки, как следует из сравнения кривых на рис. 2 слева. Однако величина этого отличия сравнительно невелика и даже для  $x = 2$  оказывается порядка семи процентов. Отметим также, что наибольшее вли-



**Рис. 2.** Сравнение решений  $q$  модифицированного обобщенного уравнения Вебстера (10), полученных при численном решении уравнения (10) (пунктирные кривые), с приближенными аналитическими решениями  $q \equiv q^{(1)}$  (слева, сплошные кривые) и с  $q \equiv q^{(0)}$  (справа, сплошные кривые) при различных значениях координаты  $vx = 0.2; 0.5; 1; 2$ . Увеличение координаты  $vx$  вдоль оси трубки соответствует переходу от верхних рисунков к нижним. Значения остальных параметров взяты такими же, как и на рис. 1.

яние нелинейности, приводящее к укрупнению профиля волны, проявляется еще в той области  $x$ , где отличие аналитических и численных величин невелико: для рассматриваемого примера с  $a/v = 10$  это значение координаты  $vx$  оказывается величиной порядка 0.08. Для иллюстрации возможности повышения точности аналитических расчетов с использованием приближенной симметрии на этом же рис. 2 справа приведены кривые, иллюстрирующие отличие решения нулевого приближения  $q^{(0)}$  от решения  $q$ , полученного в численном моделировании. Видно, что уже переход от  $q^{(0)}$  к  $q^{(1)}$  значительно улучшает согласие

между численными и приближенными аналитическими результатами.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подводя итог, отметим, что в настоящей работе в модели модифицированного обобщенного уравнения Вебстера исследованы точные и приближенные аналитические решения задачи о распространении звуковых волн в канале переменного сечения. Использование групповых методов в качестве инструмента исследования позволило указать специальные виды профилей поперечного сечения, для которых указанная задача допус-

кает новые точные инвариантно-групповые решения. Применение ренормгрупповых симметрий дало возможность найти приближенные аналитические решения для произвольных начальных условий и достаточно гладких профилей изменения поперечного сечения волноводных каналов, а также указать способ улучшения этих приближенных решений.

Наряду с традиционными приложениями, обсуждавшимися во Введении, нужно указать на возможность использования полученных результатов в актуальных междисциплинарных направлениях. Они связаны, прежде всего, с исследованиями биологических тканей и с медицинскими приложениями. Так, уравнения типа модифицированного и обобщенного уравнений Вебстера используются в гемодинамике для описания нелинейных пульсовых волн [15]. Неоднородности сосудов связаны с тем, что их просвет  $S(x)$  уменьшается по мере удаления от сердца. Кроме того, изменяется жесткость сосудистого русла. Жесткость, от которой зависит скорость распространения волн, обусловлена изменяющимся соотношением между содержанием волокон коллагена и эластина. Периферические сосуды обычно более жесткие. Диагностика кровеносных сосудов — важное приложение математических моделей, основанных на уравнениях типа Вебстера и их усложненных модификаций, которые еще предстоит исследовать.

Авторы благодарны проф. Д.В. Ширкову за плодотворные обсуждения, которые послужили стимулом для написания этой статьи.

Работа выполнена в Уфимском государственном авиационном техническом университете и в Нижегородском государственном университете им. Н.И. Лобачевского в рамках договоров (мегагрантов) № 11.G34.31.0042 и № 11.G34.31.0066 по постановлению № 220 правительства Российской Федерации. Авторы также выражают благодарность за финансовую поддержку в рамках гранта РФФИ № 11-01-00267а и гранта НШ-3810.2010.2.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Webster A.G. Acoustical impedance, and the theory of horns and of the phonograph // Proc. Nat. Acad. Sci. 1919. V. 5. P. 275–282. Reprinted in J. Audio Eng. Soc. 1977. V. 25(1–2). P. 24–28.
2. Eisner E. Resonant oscillation system design // Physical Acoustics (Ed. W.P. Mason). V. 1. Pt. B. Ch. 6. NY, Academic Press, 1964.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Курс теоретической физики, Т. 6: Гидродинамика. Наука, 1986.
4. Руденко О.В. Нелинейные пилообразные волны // УФН. 1995. Т. 165(9). С. 1011–1036.
5. Enflo B.O., Rudenko O.V. To the theory of generalized Burgers' equation // Acta Acustica unified with Acustica. 2002. V. 88. P. 155–162.
6. Руденко О.В., Солуян С.И. Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975, 288 с.
7. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн (2-е изд.). М.: Наука, 1990.
8. Руденко О.В., Сухорукова А.К., Сухоруков А.П. Уравнения высокочастотной нелинейной акустики неоднородных сред // Акуст. журн. 1994. Т. 40(2). С. 290–294.
9. Rudenko O.V., Shvartsburg A.B. Nonlinear and linear phenomena in narrow pipes // Acoustical Physics. 2010. V. 56(4). P. 429–434.
10. Ланидус Ю.Р., Руденко О.В. Нелинейная генерация высших гармоник как способ профилирования каналов // Акуст. журн. 1990. Т. 36(6). С. 1055–1058.
11. Гурбатов С.Н., Руденко О.В., Саичев А.И. Волны и структуры в нелинейных средах без дисперсии. Физматлит, 2008.
12. CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations. Ed. by Ibragimov N.H. Vol. 1: Symmetries, Exact Solutions and Conservation Laws. 1994, CRC Press, Boca Raton, Florida, USA.
13. Ширков Д.В., Ковалев В.Ф. Ренормгрупповые симметрии для решений нелинейных краевых задач // УФН. 2008. Т. 178(8). С. 849–865.
14. Kovalev V.F., Pustovalov V.V. Lie algebra of renormalization group admitted by initial value problem for Burgers equation // Lie Groups and Their Applications. 1994. V. 1. № 2. P. 104–120.
- Ковалев В.Ф., Пустовалов В.В. Функциональная автомодельность точного решения уравнения Бюргерса // Препринт ФИАН СССР им. П.Н. Лебедева, № 116. 1991. 29 с.
- Ковалев В.Ф., Пустовалов В.В. Восьмимерная алгебра Ли ренормгруппы, допускаемой начальной задачей для уравнения Бюргерса // Препринт ФИАН СССР им. П.Н. Лебедева, № 53. 1992. 14 с.
15. Розанов В.В., Руденко О.В., Сысоев Н.Н. Гемодинамика и нелинейная акустика: общие подходы и решения // Акуст. журн. 2009. Т. 55. № 4–5. С. 602–612.